15. Lavrentiev M. Methods of the theory of functions of a complex variable / M. Lavrentiev, B. Shabat. — M. : Nauka, 1987. — 688 p.
16. Gradshtein I. Tables of integrals, series and products / I. Gradshtein, I. Ryzhik. — M. : Nauka, 1971. — 1108 p.

Методом гібридного інтегрального перетворення типу Лежандра-Бесселя-Лежандра зі спектральним параметром одержано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку мішаної задачі для системи рівнянь параболічного типу на кусково-однорідній полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з м'якими межами. Моделювання еволюційного процесу здійснено методом гібридного диференціального оператора Лежандра-Бесселя-Лежандра.

Ключові слова: *параболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, диференціальний оператор, гібридне інтегральне перетворення, функції Гріна, функції впливу.*

Отримано: 14.10.2013

УДК 519.21

В. Р. Кукурба, аспірант

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

СТОХАСТИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ З НАПІВМАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕННЯМИ ТА ІМПУЛЬСНИМИ ЗБУРЕННЯМИ

Розглядається неперервна процедура стохастичної оптимізації з імпульсними збуреннями в напівмарковськовському середовищі. Для функція регресії, що залежить від рівномірно ергодичного напівмарковського процесу, встановлено достатні умови збіжності через властивості компенсуючого оператора розширеного процесу марковського відновлення процедури та його асимптотичне представлення на збуреній функції Ляпунова.

Ключові слова: *стохастична оптимізація, напівмарковський процес, компенсуючий оператор, імпульсні збурення.*

Вступ. Розглядається задача оптимізації у випадковому середовищі, що описується напівмарковським процесом, і полягає у встановленні умов збіжності процедури стохастичної оптимізації (ПСО). Широкий спектр застосування оптимізаційних процедур при обробці та аналізі експерементальних даних, оптимізації складних систем [1] та задачах розпізнавання образів підкреслює актуальність нових застосування оптимізаційних процедур.

Оптимізаційна процедура Кіфера-Вольфовиця [2] для функції регресії $C(u)$, полягає у розв'язку рівняння регресії $C'(u) = 0$, тобто у пошуку кореня u^* цього рівняння, при похибках вимірювання функції регресії типу гаусівського білого шуму.

У роботі [3] розглянуто випадок неперервної ПСО, коли функція регресії залежить від зовнішнього напівмарковського середовища в схемі усереднення.

У цій статті розглядається неперервна ПСО в напівмарковському середовищі [4] з додатковими імпульсними збуреннями [5]. Збіжність ПСО встановлюється з використанням компенсуючого оператора (КО) розширеного процесу марковского відновлення [6]. Для цього розглянуті асимптотичні представлення (п.3), а також отримано розв'язок проблеми сингулярного збурення для асимптотичного представлення КО (п.4).

1. Постановка задачі. Неперервна процедура стохастичної оптимізації з напівмарковськими переключеннями та імпульсними збуреннями задається еволюційним рівнянням

$$du^{\varepsilon}(t) = a(t)\left[\nabla_{b(t)}C\left(u^{\varepsilon}(t); x(t/\varepsilon^4)\right)dt + \varepsilon d\eta^{\varepsilon}(t)\right], \tag{1}$$

де $\nabla_{b(t)}C(u;x) = \dfrac{\left(C(u+b(t);x\right) - C\left(u-b(t);x)\right)}{2b(t)}$, $u \in R$ [2].

Поряд з незбуреною системою (1) розглядається супроводжуюча система

$$du_x(t)/dt = a(t)\nabla_{b(t)}C(u_x(t);x), x \in X. \tag{2}$$

Функція регресії $C(u;x)$, $u \in R$, $x \in X$ задовольняє умовам існування глобального розв'язку супроводжуючих систем (2). Задача розглядається в умовах існування єдиної точки екстремуму u^*. Напівмарковський процес $x(t), t \geq 0$ є рівномірно ергодичним зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in X$, у вимірному фазовому просторі (X, X), та задається напівмарковським ядром [6]

$$Q(x,B,t) = P(x,B)G_x(t),$$

де $G_x(t)$ — функція розподілу часу перебування в стані $x \in X$.

Імпульсний процес збурень (ІПЗ) $\eta^{\varepsilon}(t), t \geq 0$ задається співвідношенням [5]

$$\eta^{\varepsilon}(t) = \int_0^t \eta^{\varepsilon}\left(ds; x(s/\varepsilon^4)\right),$$

де сімейство процесів з незалежними приростами $\eta^{\varepsilon}(t;x), t \geq 0, x \in X$ задається генераторами [5]:

$$\Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(w)=\varepsilon^{-4}\int_R\left[\varphi(w+\varepsilon^2 v)-\varphi(w)\right]\Gamma(dv;x), x\in X .$$

Генератор допускає асимптотичне представлення [5]

$$\Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(w)=\varepsilon^{-2}\Gamma_1(x)\varphi(w)+\Gamma_2(x)\varphi(w)+\varepsilon^2\theta^{\varepsilon}(x)\varphi(w),$$

де

$$\Gamma_1(x)\varphi(w)=b_1(x)\varphi'(w); b_1(x)=\int_R v\Gamma(dv;x),$$

$$\Gamma_2(x)\varphi(w)=\frac{1}{2}b_2(x)\varphi''(w); b_2(x)=\int_R v^2\Gamma(dv;x).$$

Залишковий член такий, що $\varepsilon^2\theta^{\varepsilon}(x)\varphi(w)\to 0$, при $\varepsilon\to 0$. Нехай при цьому виконується умова балансу

$$\Pi\Gamma_1(x)=\int_X\pi(dx)b_1(x)=0. \tag{3}$$

Збіжність ПСО (1) розглядається в умовах експоненційної стійкості динамічної системи [2]

$$du(t)/dt=C'(u(t)), C(u):=\int_X\pi(dx)C(u;x). \tag{4}$$

Умовою існування точки екстремуму, що співпадає з стаціонарною точкою системи є умова балансу

$$\Pi C'(u^*,x)=\int_X\pi(dx)C'(u^*,x)=0.$$

Без зменшення загальності покладемо $u^*=0$.

2. Основний результат.

Теорема. Нехай існує функція Ляпунова $V(u)\in C^3(R)$, що забезпечує експоненційну стійкість системи (4)

$$C1: C'(u)V'(u)\le -c_0V(u), c_0>0.$$

А також, при $\nabla_{b(t)}\tilde{C}(u;x)=\left[\nabla_{b(t)}C(u;x)-\nabla_{b(t)}C(u)\right]$ та при довільних t виконуються умови:

$$C2: \left|\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x)V(u)\right|\le c_1\left(1+V(u)\right), c_1>0,$$

$$C3: \left|\nabla_{b(t)}C(u;x)R_0\left[\Gamma_1(x)V(u)\right]'\right|\le c_2\left(1+V(u)\right), c_2>0,$$

$$C4: \left|\Gamma_1(x)R_0\nabla_{b(t)}\tilde{C}(u;x)V'(u)\right|\le c_3\left(1+V(u)\right), c_3>0,$$

$$C5: \left|\nabla_{b(t)}C(u;x)R_0\left[\nabla_{b(t)}\tilde{C}(u;x)V'(u)\right]'\right|\le c_4\left(1+V(u)\right), c_4>0,$$

та умова Ліпшиця

$$C6: \left|\nabla_{b(t)}C(u)-C'(u)\right|\le kb(t)V'(u).$$

Функції розподілу $G_x(t)$, $x \in X$, задовольняють умові Крамера, рівномірно по $x \in X$:

$$C7:\sup_{x\in X}\int_0^\infty e^{ht}\overline{G}_x(t)dt \le H < \infty, h > 0.$$

Крім того, нехай функція регресії $C(u;x)$ має першу похідну по $u \in R$ і разом з функціями $b_1(x), b_2(x)$ є рівномірно обмеженими по $x \in X$. Також нехай виконується умова балансу (3). Нехай керуючі функції $a(t) > 0, b(t) > 0$ вибрана так, щоб виконувалися умови:

$$\int_0^\infty a(t)dt = \infty, \int_0^\infty a^2(t)dt < \infty, \int_0^\infty a(t)b(t)dt < \infty.$$

Тоді для всіх додатніх $\varepsilon < \varepsilon_0, \varepsilon_0$ — достатньо мале, процедура стохастичної оптимізації (1), при усіх початкових умовах $u^\varepsilon(0) = u$ з ймовірністю 1 збігається до точки екстремуму усередненої системи (4):

$$P\left\{\lim_{t\to\infty} u^\varepsilon(t) = 0\right\} = 1.$$

3. Властивості компенсуючого оператора ПСО (1). Введемо розширений процес марковського відновлення (ПМВ), що задається послідовністю

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), x_n^\varepsilon = x^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon = \varepsilon\tau_n,$$

де $\tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k$, $n \ge 0$, $\tau_0 = 0$, є моментами відновлення напівмарковського процесу $x(t)$, $t \ge 0$ [2].

Розглянемо сукупність неоднорідних півгруп $C_{t+\varepsilon^4 s}^{\varepsilon,t}(x)$, $t \ge 0$, $x \in X$, що породжується супроводжоючою ПСО (2), яка на тест функціях $\varphi(u) \in C^2(R)$ має представлення

$$C_{t+\varepsilon^4 s}^{\varepsilon,t}(x)\varphi(u) = \varphi\left(u_x(t+\varepsilon^4 s)\right), u_x(t) = u, \tag{5}$$

де $u_x(t+s) := u_x(t+s,u), u_x(t) := u_x(t,u)$.

Породжуючий оператор $C_t(x)$ півгрупи (5) визначається формулами:

$$C_t(x)\varphi(u) = a(t)C_b(x)\varphi(u) = a(t)\nabla_{b(t)}C(u;x)\varphi'(u).$$

Означення. Компенсуючий оператор (КО) ПМВ визначається співвідношенням

$$L_t^\varepsilon(x)\varphi(u;x) = \varepsilon^{-4}q(x)E\left[\varphi\left(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon\right) - \varphi(u;x) \mid u_n^\varepsilon = u, x_n^\varepsilon = x\right],$$

тобто має представлення

$$L_t^{\varepsilon}(x)\varphi(u;x)=\varepsilon^{-4}q(x)\Big[\int_0^{\infty}G_x(ds)C^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)\Gamma^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)\times$$
$$\times\int_X P(x,dy)\varphi(u,y)-\varphi(u;x)\Big]. \tag{6}$$

Лема 1. КО (6) на функціях $\varphi(u;\cdot)\in C^3(R)$ допускає асимтотичне представлення

$$L_t^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x)=\varepsilon^{-4}Q\varphi(u,x)+\varepsilon^{-1}a(t)\Gamma_1(x)\varphi(u,x)+\varepsilon\theta_L(x)\varphi(u,x), \tag{7}$$

де

$$\theta_L(x)=\varepsilon^3\theta_{L_a}(x)+\varepsilon^3\theta_{L_b}(x)+\varepsilon^3\theta_{L_{ab}}(x)+a(t)\Gamma_2(x)q^{-1}(x).$$

Залишкові доданки $\theta_{L_a}(x),\theta_{L_b}(x),\theta_{L_{ab}}(x)$ обмежені, тобто $\|\varepsilon\theta_L(x)\varphi(u,x)\|\to 0$, при $\varepsilon\to 0,\varphi(u,\cdot)\in C^{3,3}(R\times R)$.

Доведення леми 1. Спочатку виділимо генератор марковського процесу Q використовуючи доданок у внутрішньому інтегралі (6)

$$L_t^{\varepsilon}(x)\varphi(u;x)=\varepsilon^{-4}Q\varphi(u;x)+\varepsilon^{-4}q(x)L_tP\varphi(u;x),$$

де

$$L_t=\int_0^{\infty}G_x(ds)\Big[C^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)\Gamma^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)-I\Big].$$

Використаємо алгебраїчну тотожність

$$abP-I=P-I+(ab-I)P.$$

Отримаємо представлення

$$L_t=L_a+L_b+L_{ab},$$

де

$$L_a=\int_0^{\infty}G_x(ds)\Big[C^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)-I\Big],$$
$$L_b=\int_0^{\infty}G_x(ds)\Big[\Gamma^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)-I\Big],$$
$$L_{ab}=\int_0^{\infty}G_x(ds)\Big[C^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)-I\Big]\Big[\Gamma^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)-I\Big].$$

Розглянемо інтеграл L_a. Застосуємо інтегрування частинами, для цього виконаємо настумпні заміни:

$$\left|\begin{matrix} u=\mathrm{C}^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)-I & dv=G_x(ds)\\ du=\varepsilon^4\mathrm{C}_{t+\varepsilon^4 s}(x)\mathrm{C}^{\varepsilon^4,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x)ds & v=-\overline{G}_x(s)\end{matrix}\right|$$

У результаті отримаємо, враховуючи умову С7,

$$L_a = -\left[(C^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x) - I)\overline{G}_x(s) \right]_0^\infty + \varepsilon^4 \int_0^\infty \overline{G}_x(s) \mathrm{C}_{t+\varepsilon^4 s}(x) \mathrm{C}^{\varepsilon^4,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x) ds .$$

Перший доданок рівний нулю, враховуючи властивості півгрупи. Для другого доданку проведемо інтегрування частинами і отримаємо

$$L_a = \varepsilon^4 \left[L_{a1} + L_{a2} + L_{a3} \right],$$

де

$$L_{a1} = C_{t+\varepsilon^4 s}(x) C^{\varepsilon^4,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x) \overline{G}_x^{(2)}(s) = C_t(x) g(x),$$

$$L_{a2} = \int_0^\infty \overline{G}_x(s) C'_{t+\varepsilon^4 s}(x) C^{\varepsilon^4,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x) ds,$$

$$L_{a3} = \varepsilon^4 \int_0^\infty \overline{G}_x(s) C^2_{t+\varepsilon^4 s}(x) C^{\varepsilon^4,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x) ds.$$

Розглянемо доданок L_{a2}, а саме складову $C'_{t+\varepsilon^4 s}(x)$.

$$C'_{t+\varepsilon^4 s}(x) = \left[a(t+\varepsilon^4 s) \nabla_{b(t+\varepsilon^4 s)} C(u;x) \right]' =$$

$$= \varepsilon^4 \left[A' - B' \right] \mathrm{C}_{t+\varepsilon^4 s}(x) + \varepsilon^4 a\left(t+\varepsilon^4 s\right) B' C_1(u;x),$$

де

$$C_1(u;x) = C'(u + b(t+\varepsilon^4 s); x) + C'(u - b(t+\varepsilon^4 s); x),$$

$$A' = \frac{a'(t+\varepsilon^4 s)}{a(t+\varepsilon^4 s)}, B' = \frac{b'(t+\varepsilon^4 s)}{b(t+\varepsilon^4 s)}.$$

Отже, маємо

$$L_a = \varepsilon^4 C_t(x) q^{-1}(x) + \varepsilon^8 \theta_{L_a}(x),$$

де

$$\theta_{L_a}(x) = \int_0^\infty \overline{G}_x^{(2)}(s) \left[A' - B' \right] C_{t+\varepsilon^4 s}(x) C^t_{t+\varepsilon^4 s}(x) ds +$$

$$+ \int_0^\infty \overline{G}_x^{(2)}(s) \frac{a(t+\varepsilon^4 s)}{2} B' C_1(u;x) \mathrm{C}^t_{t+\varepsilon^4 s}(x) ds +$$

$$+ \int_0^\infty \overline{G}_x^{(2)}(s) \mathrm{C}^2_{t+\varepsilon^4 s}(x) \mathrm{C}^t_{t+\varepsilon^4 s}(x) ds .$$

Розглянемо доданок L_b, для якого використаємо інтегрування частинами:

$$L_b = -\overline{G}_x(s) \left[\Gamma^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x) - I \right]_0^\infty + \varepsilon^4 \int_0^\infty \overline{G}_x(s) \varepsilon^4 \Gamma_{t+\varepsilon^4 s}(x) \Gamma^{\varepsilon^4,t}_{t+\varepsilon^4 s} ds =$$

$$= \varepsilon^4 \int_0^\infty \overline{G}_x(s) a\left(t + \varepsilon^4 s\right) \Gamma_t(x)\, \Gamma^{\varepsilon^4,t}_{t+\varepsilon^4 s} ds\ .$$

Для останнього виразу, використовуючи інтегрування частинами, отримаємо

$$L_b = \left[\Gamma_{t+\varepsilon^4 s}(x) \frac{a(t+\varepsilon^4 s)}{a(t)} \Gamma^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x) \overline{G}^{(2)}_x(s) \right]\Bigg|_0^\infty +$$

$$+\varepsilon^4 \Gamma_{t+\varepsilon^4 s}(x) \int_0^\infty \overline{G}^{(2)}_x(s) \left[\frac{a(t+\varepsilon^4 s)}{a(t)} + \frac{a(t+\varepsilon^4 s)}{a(t)} \Gamma_{t+\varepsilon^4 s}(x) \right] \times$$

$$\times \Gamma^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x) ds = \varepsilon^4 \Gamma_t(x) q^{-1}(x) + \varepsilon^8 \theta_{L_b}(x),$$

або

$$L_b = \varepsilon^3 a(t) \Gamma_1(x) q^{-1}(x) + \varepsilon^5 a(t) \Gamma_2(x) q^{-1}(x) + \varepsilon^8 \theta_{L_b}(x)\ ,$$

де

$$\theta_{L_b}(x) = \Gamma_{t+\varepsilon^4 s}(x) \int_0^\infty \overline{G}^{(2)}_x(s) \left[\frac{a(t+\varepsilon^4 s)}{a(t)} + \frac{a(t+\varepsilon^4 s)}{a(t)} \Gamma_{t+\varepsilon^4 s}(x) \right] \times$$

$$\times \Gamma^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x) ds = \varepsilon^2 \int_0^\infty \overline{G}^{(2)}_x(s) a^2(t+\varepsilon^4 s) \Gamma_1^2(x) \Gamma^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x) ds +$$

$$+2 \int_0^\infty \overline{G}^{(2)}_x(s) a^2(t+\varepsilon^4 s) \Gamma_1(x) \Gamma_2(x) \Gamma^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x) ds +$$

$$+\varepsilon^2 \int_0^\infty \overline{G}^{(2)}_x(s) a^2(t+\varepsilon^4 s) \Gamma_2^2(x) \Gamma^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^4 s}(x) ds\ .$$

У результаті проведених перетворень отримаємо представлення для L_t

$$L_t = \varepsilon^4 C_t(x) q^{-1}(x) + \varepsilon^3 a(t) \Gamma_1(x) q^{-1}(x) + \varepsilon^5 \theta_L(x).$$

З останнього отримаємо твердження леми.

4. Розв'язок проблеми сингулярного збурення. Ключовим етапом у доведенні теореми є розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного КО (7), а саме для оператора

$$L^\varepsilon_{t,0} = \varepsilon^{-4} Q\varphi(u;x) + \varepsilon^{-1} a(t) \Gamma_1(x) + C_t(x) \tag{8}$$

на збуреній функції Ляпунова

$$V^\varepsilon(u,x,t) = V(u) + \varepsilon^3 a(t) V_1(u;x) + \varepsilon^4 a(t) V_2(u;x). \tag{9}$$

Функції збурення $V_1(u;x), V_2(u;x)$ визначаються розв'язком проблеми сингулярного збурення (РПСЗ)[7].

Лемма 2. Компенсуючий олератор $L^\varepsilon_{t,0}$ на збуреній функції Ляпунова $V^\varepsilon(u,x,t)$, при $V(u) \in C^4(R)$ допускає представлення

$$L_{t,0}^{\varepsilon}V^{\varepsilon}(u,x,t) = a(t)LV(u) + \varepsilon\theta_0^{\varepsilon}(t)V(u), \tag{10}$$

де

$$LV(u) = \Pi C_b(x)V(u) = \Pi\nabla_b C(u;x)V'(u).$$

Залишковий оператор $\theta_0^{\varepsilon}(t)V(u)$, задовольняє умові $|\theta_0^{\varepsilon}(t)V(u)| \leq M$.

Доведення леми 2. Розглянемо оператор $L_{t,0}^{\varepsilon}$ на функціях $V^{\varepsilon}(u,x,t)$:

$$L_{t,0}^{\varepsilon}V^{\varepsilon}(u,x,t) = \varepsilon^{-4}QV(u) + \varepsilon^{-1}a(t)\left[QV_1(u;x) + \Gamma_1(x)PV(u)\right] +$$
$$+a(t)\left[QV_2(u;x) + C_b(x)PV(u)\right] + \varepsilon a^2(t)\theta_{L_{t,0}}^{\varepsilon}(x)V(u),$$

де

$$\begin{gathered}\theta_{L_{t,0}}^{\varepsilon}(x)V(u) = \Gamma_1(x)V_1(u,x) + \varepsilon C_b(x)V_1(u,x) + \\ +\varepsilon\Gamma_1(x)V_2(u,x) + \varepsilon C_b(x)V_2(u,x).\end{gathered} \tag{11}$$

Відповідно з твердженням [6, с. 145] розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (8) на функціях (9) приводить до системи рівнянь

$$QV(u) = 0, \tag{12}$$

$$QV_1(u;x) + \Gamma_1(x)PV(u) = 0, \tag{13}$$

$$a(t)QV_2(u;x) + a(t)C_b(x)PV(u;x) = a(t)LV(u). \tag{14}$$

Рівність (12) виконується, оскільки $V(u)$ не залежить від $x \in X$. Умова балансу (3) забезпечує розв’язність рівнянню (13), розв'язок якого представлений у наступному вигляді:

$$V_1(u;x) = R_0\Gamma_1(x)V(u).$$

З умови розв'язності рівняння (14) отримаємо вигляд граничного оператора

$$LV(u) = \Pi C_b(x)V(u) = \Pi\nabla_b C(u;x)V'(u).$$

Отримаємо розв'язок рівняння

$$V_2(u;x) = R_0\tilde{C}(x)V(u),$$

де

$$\tilde{C}(x) = C_b(x) - L,\ \tilde{C}(x)V(u) = \nabla_{b(t)}\tilde{C}(u;x)V'(u),$$

$$\nabla_{b(t)}\tilde{C}(u;x) = \left[\nabla_{b(t)}C(u;x) - \nabla_{b(t)}C(u)\right].$$

Залишковий член (11) має представлення

$$\theta_{L_{t,0}}^{\varepsilon}(x)V(u) = \Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x)V(u) + \varepsilon C_b(x)R_0\Gamma_1(x)V(u) +$$

$$+\varepsilon\Gamma_1(x)R_0\tilde{C}(x)V(u) + \varepsilon C_b(x)R_0\tilde{C}(x)V(u),$$

і за умов С2-С5 обмежений.

Лема 3. Компенсуючий оператор на збуреній функції Ляпунова допускає оцінку

$$L_t^{\varepsilon} V^{\varepsilon}(u,x,t) \le -c_0 a(t)V(u) + ka(t)b(t)(1+V(u)) + \ \varepsilon^2 a^2(t)c(1+V(u)).$$

Доведення леми 3. Отримуємо оцінку для першого доданку (10), для цього використаємо умову теореми С6:

$$a(t)\nabla_b C(u)V'(u) = a(t)\,|\,\nabla_{b(t)}C(u) - C'(u) + C'(u)\,|\,V'(u) \le$$

$$\le c_0 a(t)C'(u)V'(u) + ka(t)b(t)V'(u) \ \le -c_0 a(t)V(u) + ka(t)b(t)(1+V(u)).$$

Для оцінки залишкового члена використаємо умови С2-С5:

$$\theta_{L_{t,0}}^{\varepsilon}(x)V(u) < c(1+V(u)).$$

Доведення теореми. Ключова нерівність Леми 3 і обмеженість залишкових членів в Лемах 1 та 2 дають можливімть завершення доведення теореми, використовуючи результати, представлені в роботі Невельсона-Хасьмінського ([2], с. 100).

Висновки. Отримано представлення компенсуючого оператора розширеного процесу марковського відновлення для ПСО з імпульсними збуреннями. Отримані результати з пункту 3 дали змогу провести асимптотичний аналіз випадкової еволюції з імпульсними збуреннями в напівмарковському середовищі. В результаті проведеного аналізу отримано умови збіжності ПСО, що дозволяє розглядати асимптотичну нормальність даної процедури, умови збіжностей модифікацій ПСО, та вивченню флуктуацій з імпульсними збуреннями.

Список використаних джерел:

1. Лебедев Е. А. Оптимальное распределение информационных потоков в сетях полумарковского типа / Е. А. Лебедев, И. А. Макушенко // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения : сборник научных статей. — Минск : РИВШ, 2009. — № 2. — С. 80–87.
2. Невельсон М. Б. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание / М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский. — М. : Наука, 1972. — 304 с.
3. Кукурба В. Р. Збіжність одновимірної процедури стохастичної оптимізації в напівмарковському середовищі / В. Р. Кукурба, У. Б. Ярка // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика : наук. журнал. Донецьк : Донецький нац. ун-т., 2012. — № 1. — С. 64–69.
4. Королюк В. С. Полумарковские процессы и их применение / В. С. Королюк, А. Ф. Турбин. — К. : Наук. думка, 1976. —184 с.
5. Семенюк С. А. Стохастичні еволюційні системи з імпульсними збуреннями / С. А. Семенюк, Я. М. Чабанюк // Фізико-мататематичні науки. — Львів : Вид-во Нац. ун-ту «Львів. політехніка».
6. Koroliuk V. Stochastic Systems in Merging Phase Space / V. Koroliuk, N. Limnios. — Singapore : World Scientific Publishing, 2005. — 330 p.
7. Korolyuk V. S. Random evolutions with locally independent increments on increasing time intervals / V. S. Korolyuk // Journal of Mathematical Sciences. — 2011. — Vol. 179, № 2. — P. 273–289.

We consider the continuous stochastic optimization procedure with impulsive perturbation in semi-Markov environment. Sufficient conditions for convergence were established for the regression function, which depends on the uniform ergodic semi-Markov process, by using properties of extended compensating operator of the Markov renewal of procedure and its asymptotic representation of perturbed Lyapunov function.

Key words: *stochastic optimization procedure, semi-Markov process, compensating operator, impulsive perturbation.*

Отримано: 14.11.2013

УДК 330.51

В. П. Лісовська, канд. фіз.-мат. наук,
Ю. В. Ігнатова, асистент,
Л. В. Іващенко, аспірант

ДВНЗ «Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана», м. Київ

МОДЕЛЬ УПРАВЛІННЯ ЗЕРНОПЕРЕРОБНИМ ПІДПРИЄМСТВОМ З ГІСТЕРЕЗИСНИМ ПЕРЕМИКАННЯМ ІНТЕНСИВНОСТІ ОБСЛУГОВУВАННЯ

У статті запропоновано модель управління зернопереробним підприємством з використанням апарату систем масового обслуговування. На основі математичної моделі роботи зернопереробного підприємства в динаміці отримано прогноз функціонування підприємства на фазі прийому зернових культур та його основні операційні характеристики.

Ключові слова: *зернопереробне підприємство, системи масового обслуговування, вхідний потік вимог, розв'язки в динаміці, стаціонарний режим.*

Вступ. Зернопродуктовий підкомплекс АПК є важливою складовою економіки України, його розвиток значною мірою визначає рівень забезпечення населення достатньою кількістю вітчизняних продуктів харчування та соціально-економічну ситуацію в країні.

Виробництво зерна як складова частина зернопродуктового підкомплексу за суспільно-економічним значенням було і є пріоритетним напрямом на всіх етапах розвитку сільського господарства України. За рахунок власного виробництва забезпечується потреба держави в зерні продовольчого призначення, в насіннєвому матеріалі, сировині для пивоварної, спиртової, комбікормової галузей. Україна має значні потенціальні можливості для нарощування експорту зерна.

Вивчення комплексу виробничих процесів післязбиральної обробки зерна передбачає системний підхід. «Хлібоприймальне підпри-