

8. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.

We propose an approach to solving of two-dimensional inverse modeling problem of identifying the coefficient (the conductivities of a medium) in the nonlinear (quasilinear) elliptic differential equation in the domain between lines of flow and equipotential lines by using numerical methods the analysis of complex. The corresponding algorithm is constructed for the case where the coefficient allows separation of variables in the field of complex potential.

**Key words:** *inverse problem of identifying, stationary processes, elliptic differential equation, quasiconformal mappings.*

Отримано: 10.02.2014

УДК 532.543

**П. С. Венгерський**, канд. фіз.-мат. наук

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

## **ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СУМІСНОГО СТОКУ ПОВЕРХНЕВИХ І ГРУНТОВИХ ВОД З ТЕРИТОРІЇ ВОДОЗБОРУ**

Для опису поверхневих потоків записано початково-крайову задачу стоку мілкої води. З урахуванням гідравлічного потоку для опису ґрунтових потоків використовується рівняння Бусинеску. З урахуванням суцільного однорідного середовища водяного потоку сформулюємо початково-крайову задачу спільного руху рідини по поверхні водозбору. Побудовані моделі апробовано на тестових прикладах, досліджується збіжність і стійкість задачі з урахуванням дії природних факторів. Розроблені програми обчислювалися за допомогою програмного пакету COMSOL.

**Ключові слова:** *рухомий шар рідини, мілка вода, поверхневі потоки, ґрунтова вода, н'єзометричний напір, сумісний потік, варіаційна задача, білінійні форми, метод скінченних елементів, дискретизація задачі, лінеаризація задачі, умови спряження.*

Сформулюємо задачу для опису руху схилових потоків по поверхні водозбору з урахуванням крайових та початкових умов[1–3].

**1. Система рівнянь руху поверхневих потоків.** Виділимо в суцільному середовищі (рідині) рухомий шар  $S(t) \in R^3$  (рис. 1)

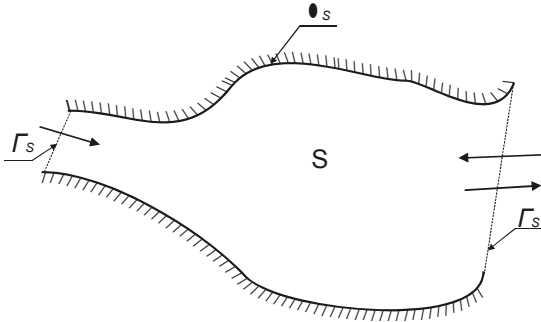


Рис. 1. Графічне зображення території водозбору

такої структури

$$S(t) := \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3, \eta(x, t) < x_3 < \xi(x, t) \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega(t)\}.$$

Позначимо проєкції його нижньої

$$\Gamma(t) := \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_3 = \eta(x, t) \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega(t)\}$$

та верхньої

$$\Lambda_s(t) := \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_3 = \xi(x, t) \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega(t)\}$$

основ на площину  $0x_1x_2$ . Решту поверхні цього шару

$$\Gamma_s(t) := \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3, \eta(x, t) < x_3 < \xi(x, t) \quad \forall x \in \Gamma(t)\}$$

будемо називати бічною поверхнею шару  $S(t)$ .

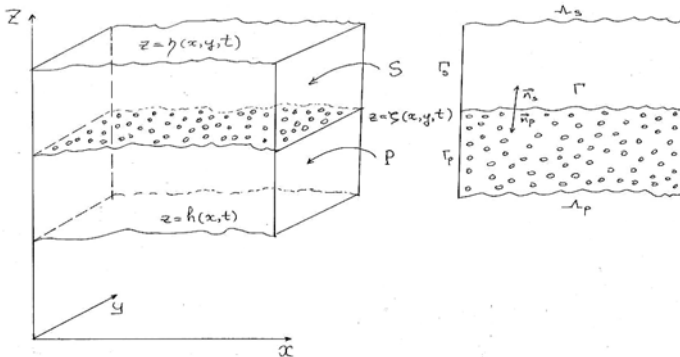


Рис. 2. Загальне зображення моделі потоків та їх поперечний розріз

Запишемо загальні рівняння руху рідини

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_i u_k) - \rho f_i - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= -p_s \delta_{ij} + \tau_{ij}, \\ \tau_{ij} &= 2\mu e_{ij}, i, j = 1, 2, 3, \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} &= 0, \text{ в } S \times (0, T],\end{aligned}\quad (2)$$

де  $\{u_i(x, t)\}_{i=1}^3$  та  $p_s = p_s(x, t)$  шукані вектор швидкості частинок рідини та гідростатичний тиск відповідно,  $F = \{g f_i(x)\}_{i=1}^3$  — масові сили,  $\rho = \rho(x, t) > 0$ ,  $\mu = \mu(x) > 0$ ,  $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^3$ ,  $\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^3$  — густина маси, коефіцієнт в'язкості, симетричні тензори швидкостей деформації та напружень рідини в точці  $x$  на момент часу  $t$ ,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

**2. Крайові та початкові умови для поверхневих вод.** На практиці досить часто використовують граничні умови більш загального вигляду. Це граничні умови змішаного типу, коли на ділянках межі області  $S$  задаються компоненти вектора швидкості та поверхневих напружень:

$$\vec{u}_i = \vec{u}_i \text{ на } \Gamma_1,$$

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \nu_j = \hat{p}_i, \text{ на } \Gamma_2, i = 1, 2, 3,$$

де  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial S$ ,  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ ,  $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  — вектор зовнішньої одиничної нормалі до  $\partial S$ ;  $\vec{\hat{p}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$  — задана вектор-функція.

З огляду на те, що в загальному випадку частина поверхні  $\xi(x, t)$  потоку є вільною поверхнею і, отже, однією з невідомих його характеристик, тоді потрібно задати ще умови для визначення її положення в просторі в кожен момент часу. Для відшукування вільної поверхні на верхній межі стоку  $x_3 = \xi(x_1, x_2, t)$  використаємо кінематичну умову:

$$u_3 + R = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u_1^0 \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + u_2^0 \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \text{ в } S \times (0, T],$$

де  $R$  — швидкість падіння капель дощу,  $u_1^0, u_2^0$  — горизонтальні складові швидкості на вільній поверхні та початкову умову

$$\xi|_{t=0} = \xi^0 \text{ в } S.$$

У загальному випадку на нижній межі потоку  $x_3 = \eta(x_1, x_2)$  можна вважати, що рідина може перетікати у ґрунтову масу вздовж осі  $x_3$

$$u_3 = -I \text{ на } \eta \times [0, T],$$

де  $I$  — відома функція, яка описує швидкість потоку рідини в доквіллі. Наприклад,  $I = 0$  означає, що поверхня  $\eta$  непрониклива для рідини;  $I > 0$  — частинки рідини інфільтруються в ґрунт із заданою швидкістю;  $I < 0$  — ґрунтові води підживляють поверхневий стік води своїм виходом на донну поверхню землі, що трапляється, коли тиск в ґрунтових водах перевищує напруження в рідині.

Щодо швидкості, то на нижній межі потоку, врахувавши умову прилипання, покладемо

$$u_1 = u_2 = 0.$$

**3. Рівняння руху ґрунтових вод.** Моделі для опису руху води в різноманітних шарах ґрунту відрізняються одна від одної в міру різноманітності, забезпеченості даними, можливостями перевірки на адекватність в реальних умовах. Для спрощення опису руху води проводиться вертикальна декомпозиція задачі — весь підземний простір на виділеній території розбивається на шари: поверхня землі, ненасичена зона, насичена зона, зона напірного руху. В кожному шарі для опису руху води використовуються моделі різної розмірності, їх розв'язки з'єднуються за допомогою граничних умов. В насиченій зоні відбуваються процеси фільтрації води, капілярного підйому, випаровування та вбирання води корінням рослин, рух ґрунтової води вздовж водопідпору, взаємодія з русловим стоком, з водою в насиченій зоні. В напірному шарі рух відбувається між двома водопідпорами. Тут можлива взаємодія з русловим стоком і вищими або нижчими водонасиченими шарами при наявності проникливого водопідпору.

Для виведення рівнянь, що описують процес фільтрації, відомі два підходи: гідродинамічний та гідравлічний.

Гідродинамічний підхід полягає в тому, що припускаємо, що фільтраційний потік підпорядковується загальному закону руху суцільного середовища. Для цього середовища записуються закони збереження маси та енергії і отримуються рівняння, що описують рух середовища. Отримані рівняння називають основними рівняннями теорії фільтрації. Основні рівняння теорії фільтрації не утворюють замкнуту систему рівнянь, тому їх, як правило, доповнюють рівнянням стану рідини.

Гідравлічний підхід до виведення рівнянь полягає в тому, що виділяється в безнапірному потоці нескінченно малий елемент, для якого записується балансове рівняння притоку та відтоку води. Висота грані виділеного об'єму (глибини потоку) співпадає з аплікатою вільної поверхні і діючим напором. Допускається, що всі лінії току, що пересікаються з однією і тією ж вертикаллю потоку, близькі до паралельних кривих. За рахунок інфільтрації з поверхні землі у виділеному об'ємі проходить приріст маси рідини, який викликає підвищення вільної по-

верхні зі збільшенням глибини потоку. Так були отримані рівняння, які носять назву рівнянь Ж. Бусинеска або рівнянь планової фільтрації. Загальним для випадків планової теорії фільтрації є нехтування вертикальною складовою швидкості фільтрації, яка може бути знайдена з рівняння нерозривності потоку у вигляді лінійної залежності від  $z$  (рідина — нестислива, середовище — недеформівне).

Рівняння, що описує процес фільтрації, отримане при застосуванні гідравлічного підходу, запишемо у такому вигляді [4]:

$$m \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) + \varepsilon \quad \text{в } P \times (0; T], \quad (3)$$

$$-k \nabla \varphi \cdot \vec{n} = \bar{q} \quad \text{на } \Gamma = \partial P,$$

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0(x) \quad \text{в } P,$$

де

$$k = k(x, t) = \begin{cases} k_s (\eta(x) - \eta_0(x)), & \varphi(x, t) \geq \eta(x); \\ k_s (\varphi(x, t) - \eta_0(x)), & \eta_0(x) < \varphi(x, t) < \eta(x); \\ 0, & \varphi(x, t) \leq \eta_0(x). \end{cases} \quad (4)$$

$k = k(x, t)$  — коефіцієнт рівнепровідності,  $k_s$  — коефіцієнт фільтрації,  $m = m(x)$  — коефіцієнт питомої водовіддачі,  $\varepsilon = \varepsilon(x, t)$  — відома функція джерел притоку води,  $\varphi = z + \frac{P_p}{\rho g}$  — п'єзометричний

напір,  $\bar{\Omega} = \bar{S} \cup \bar{P}$ ,  $S \cap P = 0$ ,  $\bar{S} \cap P = \Gamma$ ,  $q = -k \nabla \varphi$  — потік,

$v = \frac{q}{\omega}$ ,  $\omega$  — об'ємна пористість,  $v = v(x, t)$  — вектор швидкості рідини в ґрунті,

$$\vec{n}_s = -\vec{n}_p, \partial S = \Gamma_s \cup \Lambda_s \cup \Gamma, \partial P = \Gamma_p \cup \Lambda_p \cup \Gamma.$$

**4. Граничні задачі для ґрунтових вод.** Практичне значення має розгляд деяких граничних варіантів загальної задачі (3) більш доступних для розв'язування. Один з варіантів отримаємо, якщо спрямуємо товщину водоносного шару до нуля, але так, щоб опір ґрунту фільтраційного потоку, який рухається паралельно до обмежуючої з низу поверхні, залишився незмінним. У результаті отримаємо двовимірну задачу про рух рідини по заданій криволінійній поверхні, яку ми назвали плановою задачею. Другим граничним варіантом можемо

вважати задачу про рух ґрунтової води по деякій вертикальній циліндричній поверхні заданої форми. Цей варіант отримаємо, коли розглянемо фільтраційний потік між двома вертикальними циліндричними поверхнями і спрямуємо відстань між ними до нуля, залишаючи незмінним опір потоку зі сторони ґрунту при русі потоку паралельно вказаним поверхням. Другий граничний варіант також дає двовимірну задачу, його називають профільним. Такі підходи можна трактувати як усереднення характеристик фільтраційного потоку за напрямом нормалей до поверхонь, що обмежують область фільтрації.

Планову і профільну фільтрацію можна розглядати як спрощені моделі тривимірного фільтраційного потоку. В залежності від того, які характеристики фільтраційного потоку треба дослідити, вибирають ту чи іншу модель.

**5. Умови спряження сумісного потоку води.** Спочатку перетворимо рівняння (1). Введемо простір:

$$V := \left\{ \xi = \{ \xi_i \}_{i=1}^3 \in H^1(S)^3 \mid \bar{\xi} \cdot \bar{n} |_{\Gamma_s} = 0 \right\},$$

$$\int_S \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \xi_i ds + \int_S \sum_{k=1}^3 \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \xi_i ds - \int_S \rho f_i \xi_i ds + \int_S \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik}(u, p_s) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} ds -$$

$$(5)$$

$$- \int_{\partial S} \xi_i \sum_{k=1}^3 \bar{\sigma}_{ik}(u, p_s) \bar{n}_k d\gamma = 0, i = \bar{1}, \bar{3}.$$

Далі перейдемо до рівняння нерозривності (2). Домножимо рівняння (2) на  $\theta \in Q$ , де  $Q = L^2(S)$ , будемо мати

$$\int_S \frac{\partial \rho}{\partial t} \theta ds + \int_S \sum_{k=1}^3 \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} \theta ds = 0,$$

$$\int_S \frac{\partial \rho}{\partial t} \theta ds + \int_{\partial S} (\rho \bar{u}) \cdot \bar{n}_f \theta d\gamma - \int_S (\rho \bar{u}) \cdot \nabla \theta ds = 0.$$

Припустимо для ґрунтової води  $\rho = \text{const}$ , тоді попереднє рівняння переписеться у вигляді

$$\int_{\partial S} \bar{u}_n \theta d\gamma - \int_S \bar{u}_s \nabla \theta ds = 0. \quad (6)$$

Розпишемо значення інтегралу по границі області  $P$

$$\int_{\partial S} \bar{u} \cdot \bar{n}_s \theta d\gamma = \int_{\Gamma_s} \bar{u} \cdot \bar{n}_s \theta d\gamma + \int_{\Gamma} \bar{u} \cdot \bar{n}_s \theta d\gamma + \int_{\Lambda_s} \bar{u} \cdot \bar{n}_s \theta d\gamma.$$

Врахуємо, що на поверхні води  $\Lambda_s$  задано кінематичну умову

$$\bar{u}_{n_s} = \tilde{u},$$

і нехай  $\Gamma_s$  обмежена границями території водозбору, тому інтеграл по цій границі буде дорівнювати нулю.

Перейдемо до аналізу рівняння (3). Введемо простір:

$$W := \left\{ \psi \in H^1(P) \mid \psi|_{\Gamma_p} = 0 \right\}.$$

Домножимо це рівняння на  $\frac{\rho g}{n_v}$ , тоді

$$m \frac{\rho g}{n_v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \frac{\rho g}{n_v} + \frac{\varepsilon \rho g}{n_v}.$$

Проінтегруємо його по області  $P$ :

$$\begin{aligned} \int_P m \frac{\rho g}{n_v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \psi dp &= \int_P \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \frac{\rho g}{n_v} \psi dp + \int_P \frac{\varepsilon \rho g}{n_v} \psi dp, \\ \int_P m \frac{\rho g}{n_v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \psi dp - \int_{\partial P} k(x,t) \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}} \frac{\rho g \psi}{n_v} d\gamma &+ \\ + \int_P \sum_{j=1}^3 k(x,t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\rho g}{n_v} dp - \int_P \frac{\varepsilon(x,t) \rho g \psi}{n_v} dp &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Додамо вирази (5) та (7):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \left[ \int_S \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \xi_i ds + \int_S \sum_{i=1}^3 \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \xi_i ds - \int_S \rho f_i \xi_i ds + \right. \\ \left. + \int_S \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik}(u, p_s) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} ds - \int_{\partial S} \sum_{k=1}^3 \xi_i \bar{\sigma}_{ik}(u, p_s) \bar{n}_k d\gamma \right] + \\ + \int_P m \frac{\rho g}{n_v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \psi dp - \int_{\partial P} \sum_{j=1}^3 k(x,t) \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}} \frac{\rho g \psi}{n_v} d\gamma + \\ + \int_P \sum_{j=1}^3 k(x,t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\rho g}{n_v} dp - \int_P \frac{\varepsilon(x,t) \rho g \psi}{n_v} dp = 0. \end{aligned}$$

Розглянемо інтеграли на границях областей:

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^3 \int_{\partial S} \xi_i \sum_{k=1}^3 \bar{\sigma}_{ik}(u, p_s) \bar{n}_k d\gamma - \int_{\partial P} k(x,t) \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}} \frac{\rho g \psi}{n_v} d\gamma = \\ = - \sum_{i=1}^3 \int_{\partial S} \xi_i \sum_{k=1}^3 \bar{\sigma}_{ik}(u, p_s) \bar{n}_k d\gamma - \int_{\partial P} \frac{\rho g \psi}{n_v} k(x,t) (\nabla \bar{\varphi} \cdot \bar{n}_p) d\gamma. \end{aligned}$$

Розкладемо ці інтеграли

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Lambda_s} (\xi_n \bar{\sigma}_{mn}(u, p_s) + \bar{\xi}_\tau \bar{\sigma}_{\tau n}(u, p_s)) d\gamma - \int_{\Gamma_s} (\xi_n \bar{\sigma}_{mn}(u, p_s) + \bar{\xi}_\tau \bar{\sigma}_{\tau n}(u, p_s)) d\gamma - \\
 & - \int_{\Gamma = \partial S \cap \partial P} (\xi_n \bar{\sigma}_{mn}(u, p_s) + \bar{\xi}_\tau \bar{\sigma}_{\tau n}(u, p_s)) d\gamma - \int_{\Gamma_p} k(x, t) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{n}_p} \frac{\rho g \Psi}{n_v} d\gamma - \quad (8) \\
 & - \int_{\Lambda_p} k(x, t) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{n}_p} \frac{\rho g \Psi}{n_v} d\gamma - \int_{\Gamma} k(x, t) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{n}_p} \frac{\rho g \Psi}{n_v} d\gamma.
 \end{aligned}$$

Розглянемо значення інтегралів на спільній границі  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma} (\xi_n \bar{\sigma}_{mn}(u, p_s) + \bar{\xi}_\tau \bar{\sigma}_{\tau n}(u, p_s) + \frac{\rho g \Psi}{n_v} k(x, t) (\nabla \bar{\varphi} \cdot \bar{n}_p)) d\gamma = \\
 & \int_{\Gamma} (\xi_n \bar{\sigma}_{mn}(u, p_s) + \bar{\xi}_\tau \bar{\sigma}_{\tau n}(u, p_s) + \frac{k(x, t) \cdot \nabla \bar{\varphi} \cdot \bar{n}_p}{n_v} \rho g \Psi) d\gamma.
 \end{aligned}$$

Враховуючи суцільність середовища, запишемо умови поведінки вологи на спільній границі  $\Gamma$  [5]:

- 1)  $\sigma_{mn}(u, p_s) = p_p$ ;
- 2)  $\bar{\sigma}_{\tau n} = 0$ ;
- 3)  $\bar{u}_n = -\bar{v}_n$ .

**6. Тестовий приклад сумісного стоку.** В  $\Omega_1$  рух рідини над поверхнею  $\Gamma_u$  описується системою рівнянь:

$$\begin{aligned}
 \rho(u \cdot \nabla)u &= -\nabla \cdot [-pI + \mu(\nabla u + (\nabla u)^T)] \nabla \cdot u = 0, \\
 \mu &= 1e-1 \text{ (pa*s)}; \quad \rho = 1000 \text{ (kg/m}^3\text{)}.
 \end{aligned}$$

Крайові умови  $u = (u_0, v_0)$  на  $\Gamma_1$  нижнє ;

$$\rho = 0, \quad \mu(\nabla u + (\nabla u)^T) = 0 \text{ на } \Gamma_1 \text{ верхнє}.$$

В  $\Omega_2$  рух рідини в ґрунті описується рівнянням

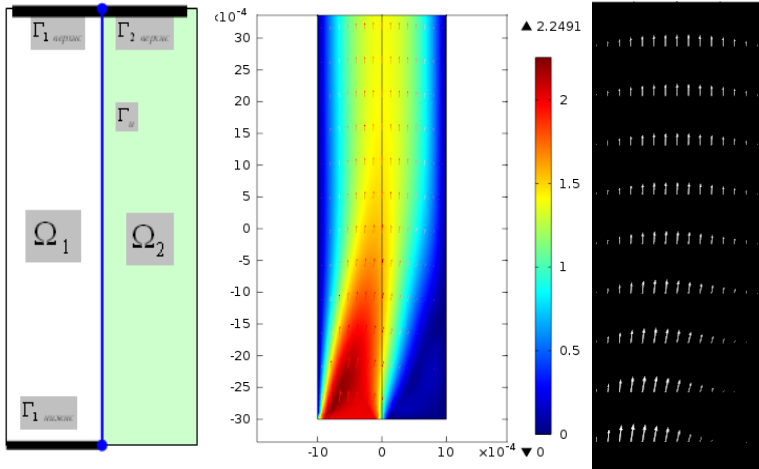
$$\frac{\mu}{k} u = \nabla \cdot [-pI + \frac{\mu}{\varepsilon_p} (\nabla u + (\nabla u)^T)] - \frac{\rho \varepsilon_p C_f}{\sqrt{k}} u |u|,$$

де  $C_f = 0$ ;  $k$  — коефіцієнт рівнепровідності пористого середовища;  $\varepsilon_p$  — коефіцієнт пористості ґрунту.

На  $\Gamma_1$  нижнє  $u = 2$ ;  $\Gamma_1$  верхнє  $\cup \Gamma_2$  верхнє  $p = 0$ , на решта границі  $u \cdot n = 0$ .

На  $\Gamma_u$  умови контакту (14).





**Рис. 3.** Поверхня значень та напрямів швидкостей в області  $\Omega$

**Висновки.** Сформульована варіаційна задача спільного руху поверхневих і ґрунтових вод з території водозбору. Виведені умови спряження для різних потоків, виходячи з принципів суцільності середовища води. Отримані розв'язки задачі апробовано на тестових прикладах. Перевірено справедливність результатів з виконання закону збереження маси середовища.

#### Список використаних джерел:

1. Венгерський П. С. Чисельне моделювання мілкого схилового стоку в кінематичному наближенні / П. С. Венгерський, В. М. Трушевський // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прик. матем. та інф. — Львів, 2000. — Вип. 1. — С. 44–49.
2. Венгерський П. С. Застосування об'єктно-орієнтованого підходу для опису алгоритмів розв'язування крайових задач методом скінченних елементів / П. С. Венгерський, О. В. Єфремов, Б. М. Стрихалюк // Вісн. Нац. ун-ту «Львівська політехніка». Сер. «Радіоелектроніка та телекомунікації». — Львів, 2002. — № 443. — С. 190–192.
3. Венгерський П. С. Чисельне розв'язування варіаційних задач поверхневого стоку / П. С. Венгерський, В. М. Трушевський, Г. А. Шинкаренко // Вісн. Київськ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. кібернетика. — 2002. — Вип. 3. — С. 26–30.
4. Венгерський П. С. Побудова математичної моделі процесу фільтрації рідини в ґрунті / П. С. Венгерський, О. Демкович // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. Прикл. матем. інформ. — 2009. — Вип. 15. — С. 170–177.
5. Венгерський П. С. До моделювання сумісного руху поверхневих та ґрунтових вод / П. С. Венгерський, Я. В. Коковська // Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки. — Львів : Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2009. — С. 255–257.

For the description of surface flows initial boundary value problem of shallow water is written. Taking into account the hydraulic flow to describe groundwater flow equation is used equation of Busynesku. Given a continuous homogeneous medium water flow formulate the initial-boundary value problem coupled fluid motion on the surface of the watershed. The constructed model was tested on the test examples the convergence and stability problem is investigated taking into account the action of natural factors. Developed programs were calculated using the software package COMSOL.

**Key words:** *moving layer of fluid, shallow water, surface flow, underground water, piezometric pressure, coupled flow, variational problem, bilinear forms, finite element method, discretization of problem, linearization problem, coupling conditions.*

Отримано: 19.03.2014

УДК 004.021

\*А. А. Верлань, канд. техн. наук,

\*\*А. И. Махович, аспирант

\* Национальный технический университет Украины «КПИ», г. Киев,

\*\*Каменец-Подольский национальный университет

имени Ивана Огиенко, г. Каменец-Подольский

## АППРОКСИМАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЕ С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В работе рассмотрен способ численной реализации математических моделей нестационарных тепловых процессов при наличии несимметричных граничных условий.

**Ключевые слова:** *модель, нестационарный тепловой процесс, несимметричные граничные условия, аппроксимация, численная реализация.*

**Введение.** Надежность современных технических систем в значительной степени зависит от соблюдения температурных режимов эксплуатации. Поэтому исследование процессов теплопроводности занимает существенное место в процессе их проектирования. Базовыми математическими моделями этих процессов являются дифференциальные уравнения в частных производных параболического типа. Как известно, методы их решения являются трудоемкими и могут в значительной степени различаться в зависимости от граничных условий [1; 2; 4]. Для решения задач данного класса можно применить многие программные средства компьютерного моделирования (3D-MAX, ANSYS, T-FLEX, MAYA, CATI и др.), использующие,