УДК 517.977.56

М. М. Копець, канд. фіз.-мат. наук

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

СИСТЕМА ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ РІККАТІ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ В ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ КОЛИВАНЬ СТРУНИ

У статті розглядається лінійно-квадратична задача оптимального керування процесом коливань струни. Для цієї задачі з допомогою методу множників Лагранжа отримані необхідні умови оптимальності. З цих умов виведена система інтегро-диференціальних рівнянь Ріккаті. Розв'язок отриманої системи поданий в явній формі.

Ключові слова: *лінійно-квадратична задача оптимального керування, метод множників Лагранжа, необхідні умови оптимальності, система інтегро-диференціальних рівнянь Ріккаті.*

Вступ. Лінійно-квадратична задача справедливо посідає одне із центральних місць в теорії оптимального керування. Для керованих систем із зосередженими параметрами ця задача досліджена досить повно [1; 2], чого не можна стверджувати про аналогічну задачу для систем із розподіленими параметрами. В деяких досить відомих монографіях вона зовсім не розглядається [3; 4]. В інших роботах для її дослідження використані методи функціонального аналізу [5], що обумовлює досить високий рівень абстракції. На противагу такому підходу до дослідження лінійно-квадратичної задачі в цій статті для її детального вивчення пропонуються сучасні методи математичної фізики та варіаційного числення.

Постановка задачі. Розглядається задача мінімізації функціонала

$$I(u,z)=\frac{1}{2}\int_0^l z^2(t_1,x)dx+\frac{1}{2}\int_0^l\left[\frac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}\right]^2dx+ \\ +\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[z^2(t,x)+u^2(t,x)]dx\,dt \tag{1}$$

на розв'язках крайової задачі

$$\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial z(t,x)}{\partial x^2}+u(t,x), \tag{2}$$

$$z(t_0,x)=f(x),\ \frac{\partial z(t_0,x)}{\partial t}=g(x), \tag{3}$$

$$z(t,0)=0,\ z(t,l)=0, \tag{4}$$

де $0\le x\le l,\ \ t_0\le t\le t_1$, дійсні числа a, $t_0\ge 0,\ \ t_1>t_0$, $l>0$ та функції $f(x)\in L_2(0,l),\ \ g(x)\in L_2(0,l)$ задані. Позначимо через Ω множину $\Omega=\{(t,x):t\in[t_0,t_1],x\in[0,l]\}$. Функція $u(t,x)\in L_2(\Omega)$ називається допустимим керуванням. Для фіксованого допустимого керування $u(t,x)$ під розв'язком $z(t,x)$ задачі (2)–(4) розуміваємо узагальнений розв'язок $z(t,x)\in W_2^{1,0}(\Omega)$. Допустиме керування $u(t,x)$, на якому реалізується мінімум функціонала (1), називається оптимальним керуванням.

Необхідні умови оптимальності. Використовуючи метод множників Лагранжа [6, с. 31], приходимо до такого твердження.

Теорема 1. Для знаходження оптимального керування в сформульованій вище задачі оптимізації (1)–(3) маємо наступну систему співвідношень

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}+u(t,x),\\ z(t_0,x)=f(x),\ \dfrac{\partial z(t_0,x)}{\partial t}=g(x),\\ z(t,0)=0,\ \ z(t,l)=0,\\ \dfrac{\partial^2 p(t,x)}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}+z(t,x),\\ p(t_1,x)=\dfrac{\partial z(t_1,x)}{\partial t},\ \dfrac{\partial p(t_1,x)}{\partial t}=-z(t_1,x),\\ p(t,0)=0,\ \ p(t,l)=0,\\ u(t,x)+p(t,x)=0,\end{cases} \tag{5}$$

де функція $p(t,x)$ — множник Лагранжа.

Виведення системи інтегро-диференціальних рівнянь Ріккаті. Якщо врахувати рівність $u(t,x)=-p(t,x)$ та виконати заміни $\dfrac{\partial z(t,x)}{\partial t}=y(t,x)$, $\dfrac{\partial p(t,x)}{\partial t}=-q(t,x)$, то замість системи (5) отримаємо наступну систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(t,x)}{\partial t} = y(t,x), \\ \dfrac{\partial y(t,x)}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} - p(t,x), \\ z(t_0,x) = f(x),\ y(t_0,x = g(x), \\ z(t,0) = 0,\ \ z(t,l) = 0, \\ \dfrac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -q(t,x), \\ \dfrac{\partial q(t,x)}{\partial t} = -a^2 \dfrac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2} - z(t,x) \\ q(t_1,x = z(t_1,x),\ p(t_1,x) = y(t_1,x), \\ p(t,0) = 0,\ \ p(t,l) = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Припущення про існування залежностей

$$q(t,x) = \int_0^l R_{11}(t,x,s) z(t,s) ds + \int_0^l R_{12}(t,x,s) y(t,s) ds,$$

$$p(t,x) = \int_0^l R_{21}(t,x,s) z(t,s) ds + \int_0^l R_{22}(t,x,s) y(t,s) ds,$$

та врахування співвідношень (6) приводить до такого висновку.

Теорема 2. Функції $R_{ij}(t,x,s)$, $\mathrm{i} = 1,2$, $\mathrm{j} = 1,2$, є розв'язком нелінійної системи інтегро-диференнціальних рівнянь з частинними похідними

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R_{11}(t,x,s)}{\partial t} + a^2 \dfrac{\partial^2 R_{12}(t,x,s)}{\partial s^2} + a^2 \dfrac{\partial^2 R_{21}(t,x,s)}{\partial x^2} - \\ -\displaystyle\int_0^l R_{12}(t,x,\lambda) R_{21}(t,\lambda,s) d\lambda + \delta(x-s) = 0, \\ \dfrac{\partial R_{12}(t,x,s)}{\partial t} + a^2 \dfrac{\partial^2 R_{22}(t,x,s)}{\partial x^2} + R_{11}(t,x,s) - \displaystyle\int_0^l R_{12}(t,x,\lambda) R_{22}(t,\lambda,s) d\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial R_{21}(t,x,s)}{\partial t} + a^2 \dfrac{\partial^2 R_{22}(t,x,s)}{\partial s^2} + R_{11}(t,x,s) - \displaystyle\int_0^l R_{22}(t,x,\lambda) R_{21}(t,\lambda,s) d\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial R_{22}(t,x,s)}{\partial t} + R_{12}(t,x,s) + R_{21}(t,x,s) - \displaystyle\int_0^l R_{22}(t,x,\lambda) R_{22}(t,\lambda,s) d\lambda = 0, \end{cases} \qquad (7)$$

де $\delta(x)$ — дельта-функція Дірака, і задовольняють наступним додатковим умовам

$$\begin{cases} R_{12}(t,x,0)=0,\, R_{12}(t,x,l)=0, \\ R_{22}(t,x,0)=0,\, R_{22}(t,x,l)=0, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} R_{11}(t_1,x,s)=\delta(x-s),\, R_{12}(t_1,x,s)=0, \\ R_{21}(t_1,x,s)=0,\, R_{22}(t_1,x,s)=\delta(x-s). \end{cases} \tag{9}$$

Оскільки справедливе співвідношення

$$\delta(x-s)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi ns}{l}$$

[7, с. 272] , то цілком виправданими є наступні представлення

$$R_{11}(t,x,s)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}r_{n11}(t)\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi ns}{l},$$

$$R_{12}(t,x,s)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}r_{n12}(t)\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi ns}{l},$$

$$R_{21}(t,x,s)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}r_{n21}(t)\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi ns}{l},$$

$$R_{22}(t,x,s)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}r_{n22}(t)\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi ns}{l},$$

де $r_{nij}(t), i=1,2, j=1,2,$ — невідомі функції. В результаті легко отримаємо таке твердження.

Теорема 3. Для знаходження функцій $r_{nij}(t), i=1,2, j=1,2,$ маємо наступну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dr_{n11}(t)}{d\,t}-\left(\dfrac{a\pi n}{l}\right)^2[r_{n12}(t)+r_{n21}(t)]-r_{n12}(t)r_{n21}(t)+1=0, \\ \dfrac{dr_{n12}(t)}{d\,t}-\left(\dfrac{a\pi n}{l}\right)^2 r_{n22}(t)+r_{n11}(t)-r_{n12}(t)r_{n22}(t)=0, \\ \dfrac{dr_{n21}(t)}{d\,t}-\left(\dfrac{a\pi n}{l}\right)^2 r_{n22}(t)+r_{n11}(t)-r_{n21}(t)r_{n22}(t)=0, \\ \dfrac{dr_{n22}(t)}{d\,t}+r_{n12}(t)+r_{n21}(t)-r_{n22}^2(t)r=0. \end{cases} \tag{10}$$

При цьому виконуються такі додаткові умови

$$r_{n11}(t_1)=1,\ \ r_{n12}(t_1)=0,\ \ r_{n21}(t_1)=0,\ \ r_{n22}(t_1)=1, n=1,2,... \tag{11}$$

Зауваження. Порівняння другого і третього рівнянь системи (10) та відповідних умов (11) показує на існування залежності $r_{n12}(t)=r_{n21}(t)$.

Представляючи невідомі функції $y(t,x)$, $z(t,x)$, $q(t,x)$, $p(t,x)$ і $u(t,x)$ у вигляді рядів Фур'є

$$y(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}y_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l},\ \ z(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}z_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l},$$

$$q(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l},\ \ p(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}p_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l},$$

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l},$$

та беручи до уваги рівність $u_n(t)=-p_n(t)$, замість системи співвідношень (6) отримаємо наступну нескінчену систему рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{dz_n(t)}{dt}=y_n(t),\\ \dfrac{dy_n(t)}{dt}=-\left[\dfrac{a\pi n}{l}\right]^2 z_n(t)-p_n(t),\\ \dfrac{dq_n(t)}{dt}=-z_n(t)+\left[\dfrac{a\pi n}{l}\right]^2 p_n(t),\\ \dfrac{dp_n(t)}{dt}=-q_n(t),\end{cases}\tag{12}$$

з додатковими умовами

$$\begin{cases}z_n(t_0)=f_n,\ y_n(t_0)=g_n,\\ q_n(t_1)=z_n(t_1),\ p_n(t_1)=y_n(t_1),\end{cases}$$

де

$$y_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l y(t,x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\ \ z_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l z(t,x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,$$

$$q_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l q(t,x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\ \ p_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l p(t,x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,$$

$$u_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l u(t,x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\ \ f_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,$$

$$g_n=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

Системі рівнянь (12) можна поставити у відповідність матрицю A_n четвертого порядку

$$\mathrm{A}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Власні числа матриці A_n мають вигляд:

$$\lambda_{n1} = -\alpha_n - i\beta_n,\ \lambda_{n2} = \alpha_n + i\beta_n,\ \lambda_{n3} = -\alpha_n + i\beta_n,\ \lambda_{n4} = \alpha_n - i\beta_n,$$

де

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^4 + 1} - \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2}{2}},\ \beta_n = \sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^4 + 1} + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2}{2}}.$$

Теорема 4. Матриця $\exp(\mathrm{A}_n t)$ має вигляд

$$\exp(\mathrm{A}_n t) = \mathrm{S}_n(t) = \begin{bmatrix} s_{n11}(t) & s_{n12}(t) & s_{n13}(t) & s_{n14}(t) \\ s_{n21}(t) & s_{n22}(t) & s_{n23}(t) & s_{n24}(t) \\ s_{n31}(t) & s_{n32}(t) & s_{n33}(t) & s_{n34}(t) \\ s_{n41}(t) & s_{n42}(t) & s_{n43}(t) & s_{n44}(t) \end{bmatrix},$$

де

$$s_{n11}(t) = \cosh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t),$$

$$s_{n21}(t) = \alpha_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t) - \beta_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t),$$

$$s_{n31}(t) = -\alpha_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t) - \beta_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t),$$

$$s_{n41}(t) = \sinh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t),$$

$$s_{n12}(t) = \frac{\alpha_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t) + \beta_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t)}{\alpha_n^2 + \beta_n^2},$$

$$s_{n22}(t) = \cosh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t),$$

$$s_{n32}(t) = -\sinh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t),$$

$$s_{n42}(t) = \frac{\alpha_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t) - \beta_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t)}{\alpha_n^2 + \beta_n^2},$$

$$s_{n13}(t) = \frac{\alpha_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t) - \beta_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t)}{\alpha_n^2 + \beta_n^2},$$

$$s_{n23}(t) = \sinh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t),\quad s_{n33}(t) = \cosh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t),$$

$$s_{n43}(t) = -\frac{\alpha_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t) + \beta_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t)}{\alpha_n^2 + \beta_n^2},$$

$$s_{n14}(t) = -\sinh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t),$$
$$s_{n24}(t) = -\alpha_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t) - \beta_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t),$$
$$s_{n34}(t) = -\alpha_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t) + \beta_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t),$$
$$s_{n44}(t) = \cosh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t)\,.$$

Зауваження. Елементи матриці $\mathrm{S}_n(t)$ знайдені з допомогою пакету прикладних програм Mathematica 5.2 [8, с. 266]. Якщо ввести позначення

$$x_n(t) = \begin{bmatrix} z_n(t) \\ y_n(t) \end{bmatrix},\ \lambda_n(t) = \begin{bmatrix} q_n(t) \\ p_n(t) \end{bmatrix},\ F_{n11}(t) = \begin{bmatrix} s_{n11}(t) & s_{n12}(t) \\ s_{n21}(t) & s_{n22}(t) \end{bmatrix},$$

$$F_{n12}(t) = \begin{bmatrix} s_{n13}(t) & s_{n14}(t) \\ s_{n23}(t) & s_{n24}(t) \end{bmatrix},\ F_{n21}(t) = \begin{bmatrix} s_{n31}(t) & s_{n32}(t) \\ s_{n41}(t) & s_{n42}(t) \end{bmatrix},$$

$$F_{n22}(t) = \begin{bmatrix} s_{n33}(t) & s_{n34}(t) \\ s_{n43}(t) & s_{n44}(t) \end{bmatrix},$$

то можна записати наступні рівності

$$\begin{aligned} x_n(t_1) &= F_{n11}(t_1 - t)x_n(t) - F_{n12}(t_1 - t)\lambda_n(t), \\ \lambda_n(t_1) &= F_{n21}(t_1 - t)x_n(t) + F_{n22}(t_1 - t)\lambda_n(t). \end{aligned} \tag{13}$$

Із співвідношень $q_n(t_1) = z_n(t_1),\ p_n(t_1) = y_n(t_1),\ n = 1, 2, \ldots$, випливає, що $\lambda_n(t_1) = x_n(t_1),\ n = 1, 2, \ldots$ Тому на підставі (13) маємо

$$\lambda_n(t) = [F_{n12}(t_1 - t) - F_{n22}(t_1 - t)]^{-1}[F_{n21}(t_1 - t) - F_{n11}(t_1 - t)]x_n(t). \tag{14}$$

Беручи до уваги рівності

$$q_n(t) = r_{n11}(t)z_n(t) + r_{n12}(t)y_n(t),\quad p_n(t) = r_{n21}(t)z_n(t) + r_{n22}(t)y_n(t),$$

отримаємо таке співвідношення $\lambda_n(t) = R_n(t)x_n(t)$, де матриця $R_n(t)$ має вигляд

$$R_n(t) = \begin{bmatrix} r_{n11}(t) & r_{n12}(t) \\ r_{n21}(t) & r_{n22}(t) \end{bmatrix}.$$

Порівняння рівності (14) і співвідношення $\lambda_n(t) = R_n(t)x_n(t)$ дозволяє сформулювати наступне твердження.

Теорема 5. Матриця $R_n(t)$ має вигляд

$$R_n(t) = [F_{n12}(t_1 - t) - F_{n22}(t_1 - t)]^{-1}[F_{n21}(t_1 - t) - F_{n11}(t_1 - t)].$$

Для оптимального керування $u_n(t)$ справедливе співвідношення

$$u_n(t) = -r_{n21}(t)z_n(t) - r_{n22}(t)y_n(t).$$

Висновки. У статті отримана система інтегро-диференціальних рівнянь Ріккаті з частинними похідними для лінійно-квадратичної задачі оптимального керування процесом коливань однорідної струни. Розв'язок цієї системи поданий в явній формі. Такий підхід дав змогу виписати формулу для обчислення оптимального керування. Перспективними для подальшого дослідження є вивчення поведінки матриці $\mathrm{R}_n(t)$ при $t_1 \to \infty$ та узагальнення отриманих в роботі результатів на випадок диференціальних рівнянь із дробовими похідними [9; 10].

Список використаних джерел:

1. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами / Ю. Н. Андреев. — М. : Наука, 1976. — 424 с.
2. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление / Я. Н. Ройтенберг. — М. : Наука, 1971. — 396 с.
3. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. — М. : Наука, 1965. — 476 с.
4. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. — М. : Наука, 1975. — 568 с.
5. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. — М. : Мир, 1972. — 414 с.
6. Сиразетдинов Т. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами / Т. К. Сиразетдинов. — М. : Наука, 1977. — 480 с.
7. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — 5-е изд. — М. : Наука, 1977. — 736 с.
8. Васильев А. Н. Mathematica. Практический курс с примерами решения прикладных задач / А. Н. Васильев — К. : ВЕК+ ; СПб. : КОРОНА-ВЕК, 2008. — 448 с.
9. Чикрий А. А. Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана-Лиувилля / А. А. Чикрий, С. Д. Эйдельман // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 6. — С. 66–99.
10. Эйдельман С. Д. Динамические игровые задачи сближения для уравнений дробного порядка / С. Д. Эйдельман, А. А. Чикрий // Укр. мат.журн. — 2000. . — Т. 52, № 11. — С. 1566–1583.

In the present paper the linear-quadratic optimal control problem for vibration process of the string is considered. For this problem the necessary optimality conditions are obtained by using the Lagrange multiplier method. The system of integro-differential Riccati equations is derived from this conditions. The solution of obtained system is represented in closed form.

Key words: *linear-quadratic optimal control problem, Lagrange multiplier method, necessary optimality conditions, system of integro-differential Riccati equations.*

Отримано: 17.06.2014