The conditions of stability in the medium and in the mean square solutions of stochastic differential equations with random jump linear solutions in Hilbert spaces are obtained.

Key words: *hilbert space, stability, formative operator, Markov process.*

Отримано: 15.07.2014

УДК 519.81

И. А. Пасичниченко, аспирант

Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт», г. Киев

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Для класса задач принятия решений, в которых последствия зависят от результатов повторяющихся случайных испытаний, в [1] предложена аксиоматическая модель принятия решений, основанная на принципе гарантированного результата. В этой модели потери решения оцениваются по максимальным ожидаемым потерям, где максимум берётся по некоторому множеству конечно-аддитивных вероятностей на множестве возможных исходов случайного испытания. В статье предложено дополнительное условие непрерывности предпочтений, которое гарантирует счётную аддитивность вероятностей.

Ключевые слова: *отношение предпочтения, критерий оптимальности, принцип гарантированного результата, конечно–аддитивные вероятности, непрерывные предпочтения.*

Введение. Проблема неопределённости в теории принятия решений состоит в отыскании исходных принципов упорядочивания альтернатив в той или иной ситуации выбора. Наиболее содержательной и актуальной эта проблема становится тогда, когда рассматриваемые альтернативы не ведут к однозначно определённым последствиям. Можно без преувеличения утверждать, что проблема неопределённости сопровождает принятие решений во всех сферах деятельности человека. Однако, даже для относительно простых типов задач принятия решений дискуссии вокруг этой проблемы в настоящее время далеки от завершения.

На современном этапе развития теории принятия решений, начиная с работ фон Неймана, Моргенштерна и Севиджа по модели ожидаемой полезности [2; 3], в подходах к решению проблемы неопределённости преобладает использование аксиоматического метода. Обычно принципы упорядочивания альтернатив постулируются в форме простых интуитивно прозрачных и приемлемых аксиом, конъюнкция которых логически эквивалентна возможности представления предпочтений с помощью критерия оптимальности определённого вида. Часто установление этой эквивалентности составляет основной результат в той или иной модели принятия решений.

Анализ последних публикаций. В последнее время развитие получили модели принятия решений, так или иначе обобщающие модель ожидаемой полезности. Наиболее известными из них являются модели ожидаемой полезности по неаддитивной мере [4–8] и модели максиминной ожидаемой полезности [9–11].

Для класса задач принятия решений, в которых последствия зависят от результатов повторяющихся случайных испытаний с закономерностями произвольного характера, Иваненко и Лабковским [1, с. 59–68; 12; 13, p. 109–129] была предложена аксиоматическая модель принятия решений, основанная на принципе гарантированного результата. С ней имеют сходство появившиеся позже модели максиминной ожидаемой полезности, но в отличии от последних она предполагает «динамику», выраженную в повторяющемся испытании. Благодаря этому она имеет возможность использовать принцип гарантированного результата вместо довольно спорной аксиомы несклонности к неопределённости, которая фигурирует в моделях максиминной ожидаемой полезности. Согласно результату Иваненко и Лабковского, потери от принятия решения u оцениваются по максимальным ожидаемым потерям, где максимум берётся по некоторому множеству P конечно–аддитивных вероятностей на множестве Θ возможных исходов случайного испытания, т.е. $L^*(u)=\max\left\{\int_\Theta L(\theta,u)\,dp \,\middle|\, p\in P\right\}$. Результаты Иваненко и Лабковского недавно были обобщены и развиты Михалевичем [14]. Задача выбора оптимального портфеля с критерием данного вида рассмотрена в [15]

Цель работы. Поскольку счётно-аддитивные вероятности более привычны и многие важные результаты доказаны именно для них, естественно возникает вопрос об отсутствии в общем случае свойства непрерывности у рассматриваемых мер. Целью настоящей статьи есть установление дополнительного условия, которое гарантирует счётную аддитивность вероятностей из P и соответствует требованиям, предъявляемым к аксиомам модели принятия решений.

Основная часть. Пусть Θ и U — произвольные непустые множества, Σ — алгебра подмножеств Θ. Будем интерпретировать Θ как множество возможных значений ненаблюдаемого параметра (или множество возможных результатов случайных испытаний, или множество «состояний природы»), U — множество возможных решений (или действий). На множестве возможных исходов $C=\left\{\left(\left(\theta_1,u_1\right),...,\left(\theta_n,u_n\right)\right) \mid \theta_i \in \Theta,\right.$ $\left.u_i \in U, i=\overline{1,n}, n \in N\right\}$ будем рассматривать отношение предпочтения $\precsim$, а на множестве кортежей решений $\left\{\left(u_1,...,u_n\right) \mid u_i \in U, i=\overline{1,n}, n \in N\right\}$ — отношение предпочтения $\precsim^*$. Обычно задача принятия решений состоит в нахождении этих отношений.

Пусть $L:\Theta \times U \to R$ — ограниченная действительная функция, $L(.,u)$ измерима для любого $u \in U$. Пусть множество $\left\{L(.,u) \mid u \in U\right\}$ содержит все простые функции со значениями в некотором интервале, в котором 0 есть внутренней точкой. Будем интерпретировать L как функцию потерь, т.е. $L(\theta,u)$ есть потери от принятия решения u при результате испытания θ. Аналогично $L^*:U \to R$ — потери от решений безотносительно результатов испытаний. Ясно, что функции потерь должны быть определённым образом согласованы с соответствующими отношениями предпочтения.

Сущностью модели Иваненко и Лабковского есть набор условий, которые «порождают» критерий оптимальности известного общего вида. Следовательно, чтобы проверить адекватность использования критерия оптимальности такого вида в определённой задаче принятия решений, достаточно проверить адекватность каждого условия по-отдельности, что обычно легче.

Условие **У0** (статистические предпочтения). Функция потерь L согласована с отношением предпочтения $\precsim$ следующим образом: для любых двух элементов из C

$$\left(\left(\theta_1,u_1\right),...,\left(\theta_n,u_n\right)\right) \precsim \left(\left(\theta_1',u_1'\right),...,\left(\theta_m',u_m'\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} L\left(\theta_i,u_i\right) \geq \sum_{j=1}^{m} L\left(\theta_j',u_j'\right).$$

Аналогично согласованы L^* и $\precsim^*$.

Вследствие У0 L и L^* полностью характеризуют отношения предпочтения и дальнейшие условия могут быть записаны с помощью одних только этих функций.

У1 (монотонность). Для любых $u_1,u_2 \in U$ если $L\left(\theta,u_1\right) \leq L\left(\theta,u_2\right)$ для любого $\theta \in \Theta$, то $L^*\left(u_1\right) \leq L^*\left(u_2\right)$.

У2. Для любых $u_1, u_2 \in U$, $a, b \in R$, $a \geq 0$ если $L(\theta, u_1) = aL(\theta, u_2) + b$ для любого $\theta \in \Theta$, то $L^*(u_1) = aL^*(u_2) + b$.

У3 (принцип гарантированного результата). Для любых $u_1, u_2, u_3 \in U$ если

$$L(\theta, u_1) + L(\theta, u_2) = 2L(\theta, u_3) \tag{1}$$

для любого $\theta \in \Theta$, то $L^*(u_1) + L^*(u_2) \geq 2L^*(u_3)$.

Последнее неравенство означает, что лучше дважды выбрать u_3, чем один раз u_1, а другой раз u_2. Условие У3 мотивированно следующим соображением. Для любых $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ согласно (1) имеем

$$\left[L(\theta_1, u_3) + L(\theta_2, u_3)\right] - \left[L(\theta_1, u_1) + L(\theta_2, u_2)\right] =$$
$$= -\left(\left[L(\theta_2, u_3) + L(\theta_1, u_3)\right] - \left[L(\theta_2, u_1) + L(\theta_1, u_2)\right]\right).$$

Потери от решения (u_3, u_3) не зависят от порядка, в котором появляются θ_1 и θ_2. С другой стороны, если при (θ_1, θ_2) решение (u_1, u_2) по сравнению с (u_3, u_3) приносит «выигрыш» v, то при (θ_2, θ_1) этот «выигрыш» будет $-v$. Таким образом, У3 есть специфической формой принципа гарантированного результата. Далее приводим результат из [1, с. 63].

Теорема 1. Функции L и L^* удовлетворяют условия У1–У3 тогда и только тогда, когда

$$L^*(u) = \max_{p \in P} \int_{\Theta} L(\theta, u)\, dp \quad \text{для любого } u \in U,$$

где P — некоторое замкнутое в *–слабой топологии множество конечно-аддитивных вероятностей на Θ.

Условие У0 нужно для интерпретации У1–У3 и теоремы 1. Позже Гильбоа и Шмеидлером [9] была показана единственность P с точностью до замкнутой выпуклой оболочки.

Следующее дополнительное условие гарантирует, что P содержит только счётно-аддитивные вероятности.

У4 (непрерывность). Для любых таких $u_1, u_2 \in U$, что для любого $\theta \in \Theta$ $L(\theta, u_1) = C_1$, $L(\theta, u_2) = C_2$ и $C_1 < C_2$, для любого $x \in R$ и любой такой последовательности $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $E_n \in \Sigma$ при всех $n \in N$, $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$, существует $n^* \in N$, для которого $L^*(\overline{u_1}) < L^*(u_2)$, где $\overline{u_1}$ — любое решение, для которого

$$L\left(\theta,\overline{u_1}\right)=\begin{cases} x, & \text{если } \theta\in E_{n^*} \\ C_1, & \text{если } \theta\in \overline{E}_{n^*} \end{cases}.$$

Похожее условие использовалось Ерроу [16] и Шатоноф и др. [17] для аналогичных целей в других моделях принятия решений. Пусть решения u_1 и u_2 приносят постоянные потери, u_1 предпочтительнее u_2. Пусть далее u_1 модифицировано до $\overline{u_1}$ заменой на множестве E_{n^*} имеющихся потерь C_1 сколь угодно большими потерями x. Тогда У4 утверждает, что множество E_{n^*} можно выбрать достаточно «малым», чтобы $\overline{u_1}$ осталось предпочтительнее u_2. Проще говоря, произвольные изменения потерь на достаточно «малых» событиях не влияют на предпочтения.

Теорема 2. Если функции L и L^* удовлетворяют условия У1–У4, то

$$L^*\left(u\right)=\max_{p\in P}\int_{\Theta} L\left(\theta,u\right)dp \text{ для любого } u\in U ,$$

где P — некоторое замкнутое в *–слабой топологии множество счётно–аддитивных вероятностей на Θ.

Доказательство. По теореме 1 имеем $L^*\left(u\right)=\max\limits_{p\in P}\int L\left(\theta,u\right)dp$ для любого $u\in U$, где P — множество конечно-аддитивных вероятностей на Θ. Пусть $\left\{E_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность со свойствами как в У4. Пусть последовательность $\left\{u_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что для любого $k\in N$ $u_k\in U$, $L\left(\theta,u_k\right)=y_k$ для любого $\theta\in\Theta$, $y_{k+1}<y_k$ и $\lim\limits_{k\to\infty} y_k=0$. Пусть $L\left(\theta,u\right)=0$ для любого $\theta\in\Theta$. Зафиксируем $k\in N$, по У4 найдется такое $n^*\in N$, что $L^*\left(\overline{u}\right)<L^*\left(u_k\right)$ и

$$L\left(\theta,\overline{u}\right)=\begin{cases} x, & \text{если } \theta\in E_{n^*} \\ 0, & \text{если } \theta\in \overline{E}_{n^*} \end{cases},$$

где $x>0$ достаточно мало для того, чтобы такое $\overline{u}$ существовало. Следовательно, $\max\limits_{p\in P} xp\left(E_{n^*}\right)<y_k$. Последовательность $\max\limits_{p\in P} xp\left(E_n\right)$ монотонна и ограничена, поэтому предел существует и

$$\lim_{n\to\infty}\max_{p\in P} xp\left(E_n\right)<y_k .$$

Поскольку k произвольно, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\max_{p\in P} p\left(E_n\right)=0\,.$$

Для любых $p\in P$ и $n\in N$ $0\le p\left(E_n\right)\le \max\limits_{p\in P} p\left(E_n\right)$, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} p\left(E_n\right)=0$ и p — счётно-аддитивна, ч. т. д.

Выводы. Установление общего вида критерия оптимальности в задаче принятия решений носит объективный характер, тогда как подбор параметров этого критерия — субъективный. Предпочтения, удовлетворяющее набор условий У0–У3, соответствуют критерию оптимальности вида максимум ожидаемых потерь по некоторой множеству конечно-аддитивных вероятностей. Усиление имеющегося набора условий интуитивно прозрачным и приемлемым условием У4 даёт возможность в решении прикладных задач использовать счётно-аддитивные вероятности вместо конечно-аддитивных.

Список использованной литературы:

1. Иваненко В. И. Проблема неопределенности в задачах принятия решений : монография / В. И. Иваненко, В. А. Лабковский — К. : Наукова думка, 1990. — 136 с.
2. Neumann J. Theory of games and economic behavior / J. von Neumann, O. Morgenstern. — 3 ed. — Princeton ; NJ : Princeton Univ. Press, 1953. — 674 p.
3. Savage L. J. The foundations of statistics / L. J. Savage — New York : Wiley & Sons, 1954. — 294 p.
4. Quiggin J. A theory of anticipated utility / J. Quiggin // Journal of Economic Behavior and Organization. — 1982. — Vol. 3. — P. 323–343.
5. Yaari M. The dual theory of choice under risk / M. E. Yaari // Econometrica. — 1987. — Vol. 55, № 1. — P. 95–115.
6. Schmeidler D. Subjective probability and expected utility without additivity / D. Schmeidler // Econometrica. — 1989. — Vol. 57, № 3. — P. 571–587.
7. Tversky A. Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty / A. Tversky, D. Kahneman // Journal of Risk and Uncertainty. — 1992. — Vol. 5. — P. 297–323.
8. Wakker P. Prospect theory: for risk and ambiguity / P. Wakker. — New York : Cambridge Univ. Press, 2010. — 503 p.
9. Gilboa I. Maxmin expected utility with a non-unique prior / I. Gilboa, D. Schmeidler // Journal of Mathematical Economics. — 1989. — № 18. — P. 141–153.
10. Maccheroni M. Ambiguity aversion, robustness, and the variational representation of preferences / F. Maccheroni, M. Marinacci, A. Rustichini // Econometrica. — 2006. — Vol. 74, № 6. — P. 1447–1498.
11. Bracha A. Affective decision making: A theory of optimism bias / A. Bracha, D. J. Brown // Games and Economic Behavior. — 2012. — Vol. 75, № 1. — P. 67–80.
12. Иваненко В. И. Об Одном классе правил выбора критерия / В. И. Иваненко, В. А. Лабковский // ДАН СССР. — 1986. — Вип. 287, № 3. — С. 564–567.
13. Ivanenko V. I. Decision systems and nonstochastic randomness / V. I. Ivanenko. — New York : Springer, 2010. — 272 p.

14. Михалевич В. М. Проблема неопределенности в задачах принятия решения и принцип гарантированного результата : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.05.02 / В. М. Михалевич ; Нац. ун-т «Києво-Могил. акад.». — К., 2013. — 316 с.
15. Кирилюк В. С. Полиэдральные меры риска и робастные решения / В. С. Кирилюк, А. С. Бабанин // Теорія оптимальних рішень. — К. : Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, 2008. — Вип. 7. — С. 66–72.
16. Chateauneuf A. Monotone continuous multiple priors / A. Chateauneuf, F. Maccheroni, M. Marinacci, J.-M. Tallon // Economic Theory. — 2005. — Vol. 26. — P. 973–982.
17. Arrow K. Essays in the theory of risk-bearing / K. Arrow. — Chicago : Markham Pub. Co., 1971. — 278 p.

For the class of decision-making problems in which consequences depend on the results of repeated random trials, the axiomatic decision-making model based on the principle of guaranteed result has been introduced in [1]. In the model the decision losses are evaluated as maximal expected losses, where maximum is taken over some set of finitely additive probabilities on the set of possible outcomes of the random trial. This paper introduces the additional preference continuity condition guaranteeing countable additivity of probabilities.

Key words: *preference relation, optimality criterion, the principle of guaranteed result, finitely additive probabilities, continuous preferences.*

Отримано: 10.07.2014

УДК 519.2:519.6

А. О. Пашко, канд. фіз.-мат. наук

Київський національний університет культури і мистецтв, м. Київ

МОДЕЛЮВАННЯ ГАУССОВИХ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ З НЕПЕРЕРВНИМ СПЕКТРОМ

У роботі досліджуються алгоритми побудови субгауссових моделей для гауссових стаціонарних випадкових процесів з неперервним спектром. Отримано оцінки для випадкових процесів з стандартними кореляційними функціями, що покращують існуючі. Побудовано алгоритми для моделювання випадкових процесів з заданими точністю і надійністю в різних функціональних просторах.

Ключові слова: *гауссовий процес, субгауссові моделі, точність моделі, надійність моделі, спектральне зображення.*

Вступ. У роботі продовжуються дослідження алгоритмів побудови субгауссових моделей для гауссових стаціонарних випадкових процесів та полів [1–5]. Для побудови моделей випадкових процесів використовуються їх спектральні зображення у вигляді стохастичних