УДК 517.5

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,
В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ЗАДАЧА НАЙКРАЩОЇ У РОЗУМІННІ СІМ'Ї ОПУКЛИХ ФУНКЦІЙ РІВНОМІРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ МНОЖИНОЮ ОДНОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ З ДОДАТКОВИМ ОБМЕЖЕННЯМ, ЩО ЗАДАЄТЬСЯ СИСТЕМОЮ ЗАМКНЕНИХ КУЛЬ

У статті встановлено необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні сім'ї опуклих функцій рівномірної апроксимації півнеперервного зверху компактнозначного відображення множиною неперервних однозначних відображень з додатковим обмеженням, що задається системою замкнених куль з центрами та радіусами, які змінюються неперервно.

Ключові слова: *півнеперервне зверху компактнозначне відображення, найкраща у розумінні сім'ї опуклих функцій рівномірна апроксимація, умови екстремальності, додаткове обмеження.*

Вступ. У статті для задачі найкращої у розумінні сім'ї опуклих функцій рівномірної апроксимації півнеперервного зверху компактнозначного відображення множиною неперервних однозначних відображень з додатковим обмеженням, що задається системою замкнених куль, встановлено необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента, які узагальнюють на випадок вищеназваної задачі відповідні умови екстремальності елемента для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервної на компакті функції елементами скінченновимірного підпростору, які задовольняють додатковому обмеженню (див., наприклад, [1–5]).

Постановка задачі. Нехай S — компакт, X — лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел нормований простір, $C(S,X)$ — лінійний над полем дійсних чисел простір однозначних відображень g компакта S в X, неперервних на S, з нормою: $\|g\| = \max\limits_{s\in S}\|g(s)\|$, $K(X)$ — сукупність всіх непорожніх компактів простору X, $\tilde{C}(S,K(X))$ — множина багатозначних півнеперервних зверху на S відображень a компакта S в X таких, що $a(s)\in K(X)$ для кожного $s \in S$, $\{p_s\}_{s \in S}$ — сім'я неперервних на S опуклих функцій таких, що відображення $(s,x) \in S \times X \to p_s(x)$ півнеперервне зверху на $S \times X$, $V \subseteq C(S,X)$, $u \in C(S,X)$, $r \in C(S,R)$, $r(s) > 0$, $s \in S$,

$$D = \left\{ g : g \in C(S,X), \left\| g(s) - u(s) \right\| \le r(s), s \in S \right\},$$

існує елемент $g_0 \in V$, для якого $\left\| g_0(s) - u(s) \right\| < r(s)$ для всіх $s \in S$.

Задачею найкращої у розумінні сім'ї $\{p_s\}_{s \in S}$ рівномірної апроксимації відображення $a \in \tilde{C}(S, K(X))$ множиною $V \subseteq C(S,X)$ з додатковим обмеженням, що задається системою замкнених куль $b(s) = \left\{ x : x \in X, \left\| x - u(s) \right\| \le r(s) \right\}, s \in S$, будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha^*_{V \cap D}(a) = \inf_{g \in V \cap D} \sup_{s \in S} \sup_{y \in a(s)} p_s\left(y - g(s)\right). \tag{1}$$

З урахуванням тверджень 1, 2 [6] та узагальненої теореми Вейєрштрасса (див., наприклад, [7, с. 28]) задачу відшукання величини (1) можна подати у такому вигляді

$$\alpha^*_{V \cap D}(a) = \inf_{g \in V \cap D} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s\left(y - g(s)\right). \tag{2}$$

Якщо існує елемент $g^* \in V \cap D$ такий, що

$$\max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s\left(y - g^*(s)\right) = \alpha^*_{V \cap D}(a),$$

то його назвемо екстремальним елементом для величини (2).

Актуальність теми. Теорія багатозначних відображень знаходить багаточисельні застосування в теорії оптимального керування, теорії оптимізації, опуклому аналізі, теорії ігор, математичній економіці та інших галузях сучасної математики.

Важливий розділ цієї теорії утворюють задачі найкращого наближення складних багатозначних відображень відображеннями простішої структури (див., наприклад, [8–12]), у тому числі задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного або півнеперервного зверху компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень (див., наприклад, [6; 13–16]).

Слід зазначити, що до задач найкращої рівномірної апроксимації багатозначного відображення множинами однозначних відображень зводиться низка задач оптимального відновлення операторів та функціоналів по неточно заданій інформації (див., наприклад, [17; 18]).

Актуальність задач найкращої несиметричної апроксимації зумовлена, зокрема, необхідністю дослідження задач найкращої зваженої рівномірної апроксимації неперервних на компакті функцій та багатозначних відображень (див., наприклад, [19–21]).

Задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервних на компакті дійснозначних та комплекснозначних функцій елементами скінченновимірних підпросторів, які задовольняють додатковому обмеженню (змінюються у заданому діапазоні), розглядались, зокрема, у працях [1–5].

Встановлені у статті необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента для задачі відшукання величини (2) узагальнюють на випадок цієї задачі відповідні результати праць [1–5].

Вони слугуватимуть відправним пунктом для отримання відповідних результатів й для інших задач, що вкладаються у схему постановки задачі відшукання величини (2), та для побудови чисельних методів відшукання величини (2) і її екстремального елемента.

Мета роботи. Встановити необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента для величини (2).

Допоміжні твердження. Через $\operatorname{int} M$ будемо позначати внутрішність, а через ∂M — межу множини M топологічного простору.

Твердження 1. Множина D є опуклою множиною простору $C(S,X)$.

Справедливість твердження випливає з опуклості множин $b(s)$, $s \in S$.

Твердження 2. Функція $\varphi(x,s) = \|x - u(s)\| - r(s)$, $(x,s) \in X \times S$, є неперервною на $X \times S$.

Доведення. Нехай $(x_0, s_0) \in X \times S$. Для всіх $(x,s) \in X \times S$ маємо

$$\begin{aligned} |\varphi(x,s) - \varphi(x_0,s_0)| &= \left| \|x - u(s)\| - r(s) - \left(\|x_0 - u(s_0)\| - r(s_0) \right) \right| \le \\ &\le \|x - x_0\| + |u(s) - u(s_0)| + |r(s) - r(s_0)|. \end{aligned} \tag{3}$$

Оскільки $u \in C(S,X)$, $r \in C(S,R)$, то для додатного числа ε існує окіл $V(s_0)$ точки s_0 такий, що

$$|u(s) - u(s_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ |r(s) - r(s_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ s \in V(s_0). \tag{4}$$

Покладемо

$$O(x_0) = \left\{ x : x \in X, \|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{3} \right\}. \tag{5}$$

Тоді для $(x,s) \in O(x_0) \times V(s_0)$ внаслідок (3)–(5) отримаємо, що

$$|\varphi(x,s) - \varphi(x_0,s_0)| < \varepsilon .$$

Це означає, що функція $\varphi(x,s)$, $(x,s)\in X\times S$, є неперервною в точці $(x_0,s_0)\in X\times S$. Оскільки точку (x_0,s_0) вибрано довільно з $X\times S$, то функція $\varphi(x,s)$, $(x,s)\in X\times S$, є неперервною на $X\times S$.

Твердження доведено.

Твердження 3. Нехай $s_0\in S$ і

$$x_0\in \operatorname{int} b(s_0)=\left\{x : x\in X, \left\|x-u(s_0)\right\|<r(s_0)\right\}.$$

Тоді існує окіл $V(s_0)$ точки s_0 та окіл

$$O(x_0)=\left\{x : x\in X,\ \left\|x-x_0\right\|<\varepsilon, \varepsilon>0\right\}$$

точки x_0 такі, що $O(x_0)\subset \operatorname{int} b(s)$ для всіх $s\in V(s_0)$.

Доведення. Розглянемо функцію $\varphi(x,s)=\left\|x-u(s)\right\|-r(s)$, $(x,s)\in X\times S$.

Оскільки за умовою $\left\|x_0-u(s_0)\right\|<r(s_0)$, то $\varphi(x_0,s_0)<0$. Внаслідок неперервності функції $\varphi(x,s)$, $(x,s)\in X\times S$, на $X\times S$ (див. твердження 2) існує окіл $O(x_0)=\left\{x : x\in X,\ \left\|x-x_0\right\|<\varepsilon, \varepsilon>0\right\}$ точки x_0 та окіл $V(s_0)$ точки s_0 такі, що

$$\varphi(x,s)=\left\|x-u(s)\right\|-r(s)<0,\ (x,s)\in O(x_0)\times V(s_0).$$

Звідси випливає, що $O(x_0)\subset \operatorname{int} b(s)$ для всіх $s\in V(s_0)$.

Твердження доведено.

Твердження 4. Нехай $g\in C(S,X)$, $s_0\in S$, $g(s_0)\in \operatorname{int} b(s_0)$. Тоді існує окіл $V(s_0)$ точки s_0 такий, що $g(s)\in \operatorname{int} b(s)$ для всіх $s\in V(s_0)$.

Доведення. Внаслідок твердження 3 існує окіл $V_1(s_0)$ точки s_0 та окіл $O(g(s_0),\varepsilon)$ точки $g(s_0)$ радіуса ε такі, що $O(g(s_0),\varepsilon)\subset$ $\subset \operatorname{int} b(s)$ для всіх $s\in V_1(s_0)$, тобто

$$\left\{x : x\in X,\ \left\|x-g(s_0)\right\|<\varepsilon\right\}\subset \operatorname{int} b(s),\ s\in V_1(s_0). \tag{6}$$

Розглянемо функцію $\gamma(s)=\left\|g(s)-g(s_0)\right\|$, $s\in S$.

Оскільки $\gamma(s_0)=0<\varepsilon$ і $\gamma(s)$, $s\in S$, є неперервною функцією на S, то існує окіл $V_2(s_0)$ точки s_0 такий, що

$$\left\|g(s)-g(s_0)\right\|<\varepsilon,\ s\in V_2(s_0). \tag{7}$$

Нехай $V(s_0) = V_1(s_0) \cap V_2(s_0)$. З (6), (7) випливає, що $g(s) \in \operatorname{int} b(s)$ для всіх $s \in V(s_0)$.

Твердження доведено.

Твердження 5. Нехай $g_0 \in C(S, X)$. Для того щоб $g_0 \in \operatorname{int} D$, необхідно і достатньо, щоб $g(s) \in \operatorname{int} b(s)$, $s \in S$.

Доведення. Необхідність. Нехай $g_0 \in \operatorname{int} D$. Тоді існує $\varepsilon > 0$ таке, що $O(g_0) = \{g : g \in C(S, X), \|g - g_0\| < \varepsilon\} \subset D$. Нехай $s_0 \in S$. Для $g_0(s_0)$ і $O(g_0(s_0)) = \{x : x \in X, \|x - g_0(s_0)\| < \varepsilon\}$ маємо, що $O(g_0(s_0)) \subset$ $\subset b(s_0)$. Дійсно, для $x \in O(g_0(s_0))$ позначимо через $g_x(s) =$ $= g_0(s) + x - g_0(s_0)$, $s \in S$.

Зрозуміло, що $g_x \in C(S, X)$ і

$$\|g_x - g_0\| = \max_{s \in S} \|g_x(s) - g_0(s)\| = \|x - g_0(s_0)\| < \varepsilon .$$

Тому $g_x \in O(g_0) \subset D$. Звідки випливає, що $g_x(s_0) = x \in b(s_0)$, $x \in O(g_0(s_0))$. Це й означає, що $O(g_0(s_0)) \subset b(s_0)$. Отже, $g_0(s_0) \in \operatorname{int} b(s_0)$. Оскільки точку s_0 вибрано довільно з S, то $g_0(s) \in \operatorname{int} b(s)$, $s \in S$.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай тепер $g_0(s) \in \operatorname{int} b(s)$, $s \in S$. Тоді $\|g_0(s) - u(s)\| < r(s)$, $s \in S$. Оскільки функція $\psi(s) = r(s) -$ $- \|g_0(s) - u(s)\|$, $s \in S$, є неперервною на S, то із зазначеного вище випливає,що

$$\min_{s \in S} \psi(s) = \min_{s \in S} \left(r(s) - \|g_0(s) - u(s)\| \right) = \varepsilon > 0 .$$

Доведемо, що $O(g_0) = \{g : g \in C(S, X), \|g - g_0\| < \varepsilon\}$ включається в D. Дійсно, нехай $g \in O(g_0)$ і $s \in S$. Тоді

$$\|g(s) - u(s)\| = \|g(s) - g_0(s) + g_0(s) - u(s)\| \le$$

$$\le \|g(s) - g_0(s)\| + \|g_0(s) - u(s)\| \le \|g - g_0\| + \|g_0(s) - u(s)\| <$$

$$< \varepsilon + \|g_0(s) - u(s)\| = \min_{s \in S} \left(r(s) - \|g_0(s) - u(s)\| \right) + \|g_0(s) - u(s)\| \le$$

$$\leq r(s) - \|g_0(s) - u(s)\| + \|g_0(s) - u(s)\| = r(s).$$

Це й означає, що $g \in D$ для всіх $g \in O(g_0)$. Отже, $g_0 \in \operatorname{int} D$.

Достатність доведено.

Твердження доведено.

Позначимо через X^* — простір, спряжений з X, через B^* — замкнену одиничну кулю простору X^*: $B^* = \{f : \|f\| \leq 1\}$.

Як відомо (див., наприклад, [22, с. 156]), для кожного елемента $z \in X$ існує елемент $f \in B^*$ такий, що $f(z) = \|z\|$.

Для будь-якого елемента $z \in X$ позначимо через $B_z^* = \{f : f \in B^*, f(z) = \|z\|\}$. Зі сказаного вище випливає, що $B_z^* \neq \varnothing$ для всіх $z \in X$.

Нехай, крім того, X_R — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, асоційований з X, тобто простір X, в якому множення елементів на числа обмежується лише множенням їх на дійсні числа, $X_R{}^*$ — простір, спряжений з X_R.

Надалі через $\Gamma(M, x_0)$ ($\Gamma^*(M, x_0)$) будемо позначати конус внутрішніх (граничних) напрямків для множини M лінійного нормованого простору з точки x_0 цього простору (див., наприклад, [5, с. 12, 13]).

Твердження 6. Нехай $x_0 \in X$, r — додатне число ($r > 0$), $Q = \{x : x \in X, \|x - x_0\| \leq r\}$ — замкнена куля простору X з центром у точці x_0 радіуса r, $x^* \in \partial Q$, тобто $\|x^* - x_0\| = r$. Має місце рівність

$$\Gamma(Q, x^*) = \{x : x \in X, \operatorname{Re} f(x) < 0,\ f \in B^*_{x^* - x_0}\}. \tag{8}$$

Доведення. Позначимо через

$$A = \{x : x \in X, \operatorname{Re} f(x) < 0,\ f \in B^*_{x^* - x_0}\}. \tag{9}$$

Отже, потрібно довести, що

$$\Gamma(Q, x^*) = A. \tag{10}$$

Нехай $x \in \Gamma(Q, x^*)$. Оскільки Q є опуклою множиною, $\operatorname{int} Q \neq \varnothing$, то з теореми 1.3.4. [5, с. 19] випливає існування числа $\lambda > 0$ такого, що $x^* + \lambda x \in \operatorname{int} Q$, тобто $\|x^* + \lambda x - x_0\| < r$.

Нехай $f \in B^*_{x^* - x_0}$. Тоді

$$f\left(x^*-x_0\right)=\left\|x^*-x_0\right\|=r>\left\|x^*+\lambda x-x_0\right\|\geq \operatorname{Re} f\left(x^*+\lambda x-x_0\right)=$$
$$=\operatorname{Re} f\left(x^*-x_0\right)+\lambda \operatorname{Re} f\left(x\right)=f\left(x^*-x_0\right)+\lambda \operatorname{Re} f\left(x\right).$$

Звідси одержуємо, що $\operatorname{Re} f\left(x\right)<0$. Отже, $x\in A$. Тому

$$\Gamma\left(Q,x^*\right)\subset A. \qquad (11)$$

Нехай тепер $x\in A$. Переконаємося, що існує число $\lambda>0$ таке, що

$$x^*+\lambda x\in \operatorname{int} Q. \qquad (12)$$

Припустимо супротивне. Тоді $x^*+\lambda x\notin \operatorname{int} Q$ для всіх $\lambda\geq 0$. Оскільки $A_{x^*}=\left\{u: u=x^*+\lambda x, \lambda\geq 0\right\}$ є опуклою множиною простору X_R, а Q є опуклою множиною цього простору, для якої $\operatorname{int} Q\neq\varnothing$, та $\operatorname{int} Q\cap A_{x^*}=\varnothing$, то відповідно до теореми віддільності (див., наприклад, [23, с.209]) існує функціонал $f_*\in {X_R}^*$, $\left\|f_*\right\|=1$, та число c такі, що

$$f_*\left(z\right)\leq c \text{ для всіх } z\in Q, \qquad (13)$$

$$f_*\left(u\right)\geq c \text{ для всіх } u\in A_{x^*}. \qquad (14)$$

Оскільки $x^*\in Q$ і $x^*\in A_{x^*}$, то $f_*\left(x^*\right)=c$. З урахуванням цього та (13), (14) матимемо, що

$$f_*\left(z\right)\leq f_*\left(x^*\right) \text{ для всіх } z\in Q, \qquad (15)$$

$$f_*\left(u\right)\geq f_*\left(x^*\right) \text{ для всіх } u\in A_{x^*}. \qquad (16)$$

Зі співвідношення (16) випливає, що

$$f_*\left(x\right)\geq 0. \qquad (17)$$

З урахуванням співвідношення (15) одержимо, що

$$f_*\left(z-x_0\right)\leq f_*\left(x^*-x_0\right),\ z\in Q.$$

Звідки

$$f_*\left(x^*-x_0\right)=\sup_{z\in Q} f_*\left(z-x_0\right)=\sup_{\left\|z-x_0\right\|\leq r} f_*\left(z-x_0\right)=$$
$$=\sup_{\left\|t\right\|\leq r} f_*\left(t\right)=r\sup_{\left\|\frac{t}{r}\right\|\leq 1} f_*\left(\frac{t}{r}\right)=r\left\|f_*\right\|=r=\left\|x^*-x_0\right\|.$$

Отже,

$$f_*\left(x^*-x_0\right)=\left\|x^*-x_0\right\|,\ f_*\in {X_R}^*,\ \left\|f_*\right\|=1. \qquad (18)$$

Покладемо

$$f^*(z)=f_*(z)-if_*(iz),\ z\in X.$$

Тоді $f^*\in X^*$, $\operatorname{Re} f^*(z)=f_*(z)$, $z\in X$, і $\|f^*\|=\|f_*\|=1$ (див., наприклад, [24, с. 209]). Внаслідок цього та (18) отримуємо, що

$$\left|f^*\left(x^*-x_0\right)\right|\le\|f^*\|\|x^*-x_0\|=\|x^*-x_0\|=f_*\left(x^*-x_0\right)=\operatorname{Re} f^*\left(x^*-x_0\right).$$

Звідси випливає, що $f^*\left(x^*-x_0\right)=\|x^*-x_0\|$. Отже, $f^*\in B^*_{x^*-x_0}$. Оскільки $x\in A$, то $\operatorname{Re} f^*(x)=f_*(x)<0$, що суперечить (17).

Одержана суперечність доводить, що має місце співвідношення (12). Згідно з теоремою 1.3.4 [5, с. 19] тоді $x\in\Gamma\left(Q,x^*\right)$. Тому $A\subset\Gamma\left(Q,x^*\right)$. З урахуванням цього, (9), (11) робимо висновок, що мають місце рівності (10) та (8).

Твердження доведено.

Основні результати.

Теорема 1. Нехай $g^*\in D$,

$$F\left(g^*\right)=\left\{s:s\in S,g^*(s)\in\partial b(s)\right\}=\left\{s:s\in S,\left\|g^*(s)-u(s)\right\|=r(s)\right\}.$$

Має місце рівність

$$\begin{gathered}\Gamma\left(D,g^*\right)=\left\{g:g\in C(S,X),\exists\lambda>0,\right.\\ \left.g^*(s)+\lambda g(s)\in\operatorname{int} b(s),s\in F\left(g^*\right)\right\}.\end{gathered}\tag{19}$$

Доведення. Позначимо через

$$B=\left\{g:g\in C(S,X),\exists\lambda>0,g^*(s)+\lambda g(s)\in\operatorname{int} b(s),s\in F\left(g^*\right)\right\}.\tag{20}$$

Нехай $g\in\Gamma\left(D,g^*\right)$. Оскільки D є опуклою множиною простору $C(S,X)$ (див. твердження 1), $g^*\in D$, $\operatorname{int} D\ne\varnothing$, то згідно з теоремою 1.3.4 [5, с. 19] існує число $\lambda>0$ таке, що $g^*+\lambda g\in\operatorname{int} D$.

Згідно з твердженням 5 тоді $g^*(s)+\lambda g(s)\in\operatorname{int} b(s)$, $s\in S$, в тому числі $g^*(s)+\lambda g(s)\in\operatorname{int} b(s)$, $s\in F\left(g^*\right)$. Отже, $g\in B$. Тому

$$\Gamma\left(D,g^*\right)\subset B.\tag{21}$$

Нехай тепер $g\in B$, тобто існує число $\lambda>0$ таке, що

$$g^*(s)+\lambda g(s)\in\operatorname{int} b(s),s\in F\left(g^*\right).\tag{22}$$

Для $s \in S \setminus F\left(g^*\right)$ маємо, що $g^*(s) \in \operatorname{int} b(s)$. Звідси випливає, що існує додатне число $\lambda_s > 0$ таке, що $g^*(s) + \lambda_s g(s) \in \operatorname{int} b(s)$, $s \in S \setminus F\left(g^*\right)$. Якщо покласти $\lambda_s = \lambda$ для $s \in F\left(g^*\right)$, то з урахуванням (22) матимемо, що $g^*(s) + \lambda_s g(s) \in \operatorname{int} b(s)$, $s \in S$, де $\lambda_s > 0$.

Відповідно до твердження 4 робимо висновок, що існує окіл $V(s)$ точки s такий, що $g^*(s') + \lambda_s g(s') \in \operatorname{int} b(s')$, $s' \in V(s)$. Оскільки $g^*(s') \in b(s')$, $s' \in S$, то

$$(1-\alpha) g^*(s') + \alpha\left(g^*(s') + \lambda_s g(s')\right) = g^*(s') + \alpha\lambda_s g(s') \in \operatorname{int} b(s')$$

для всіх $\alpha \in (0,1]$ (див., наприклад, [5, с. 18]).

Звідси випливає, що $g^*(s') + \beta g(s') \in \operatorname{int} b(s')$, $\beta \in (0, \lambda_s]$, $s' \in V(s)$. Оскільки S — компакт і $\bigcup_{s \in S} V(s) = S$, то існують точки $s_1, \ldots, s_k$ із S такі, що $\bigcup_{i=1}^{k} V(s_i) = S$. Покладемо $\bar{\lambda} = \min_{1 \le i \le k} \lambda_{s_i}$. Тоді для будь-якого $s \in S$ існує $i \in \{1, \ldots, k\}$, що $s \in V(s_i)$. Тому $g^*(s) + \bar{\lambda} g(s) \in \operatorname{int} b(s)$, оскільки співвідношення $g^*(s) + \beta g(s) \in \operatorname{int} b(s)$ має місце для всіх $s \in V(s_i)$, $\beta \in \left(0, \lambda_{s_i}\right]$ та $\bar{\lambda} \in \left(0, \lambda_{s_i}\right]$. Згідно з твердженням 5 $g^* + \bar{\lambda} g \in \operatorname{int} D$. Згідно з теоремою 1.3.4 [5, с.19] $g \in \Gamma\left(D, g^*\right)$. Тому

$$B \subset \Gamma\left(D, g^*\right). \tag{23}$$

З (20), (21), (23) випливає справедливість рівності (19).

Теорему доведено.

Теорема 2. Нехай $g^* \in D$. Має місце рівність

$$\Gamma\left(D, g^*\right) = \left\{g : g \in C(S, X), \operatorname{Re} f\left(g(s)\right) < 0,\ f \in B^*_{g^*(s)-u(s)}, s \in F\left(g^*\right)\right\}. \tag{24}$$

Доведення. Позначимо через A праву частину рівності (24). Нехай $g \in \Gamma(D, g^*)$. З урахуванням рівності (19) робимо висновок, що існує число $\lambda > 0$, для якого $g^*(s) + \lambda g(s) \in \operatorname{int} b(s), s \in F(g^*)$. Згідно з теоремою 1.3.4 [5, с. 19] $g(s) \in \Gamma\left(b(s), g^*(s)\right)$, $s \in F\left(g^*\right)$. Внаслідок твердження 6 тоді $\operatorname{Re} f\left(g(s)\right) < 0$ для всіх $f \in B^*_{g^*(s)-u(s)}$, $s \in F(g^*)$. Тому $g \in A$ і, отже,

$$\Gamma\left(D, g^*\right) \subset A. \qquad (25)$$

Нехай тепер $g \in A$. Згідно з твердженням 6 $g(s) \in \Gamma\left(b(s), g^*(s)\right)$, $s \in F\left(g^*\right)$. Відповідно до теореми 1.3.4 [5, с. 19] тоді для кожного $s \in F\left(g^*\right)$ існує число $\lambda_s > 0$ таке, що $g^*(s) + \lambda_s g(s) \in \operatorname{int} b(s)$, $s \in F\left(g^*\right)$. При доведенні теореми 1 встановлено, що в цьому випадку $g \in \Gamma\left(D, g^*\right)$. Тому

$$A \subset \Gamma\left(D, g^*\right). \qquad (26)$$

З (25) та (26) випливає справедливість рівності (24).

Теорему доведено.

У подальших міркуваннях будемо використовувати наступні поняття та позначення.

Нехай ψ задана на лінійному (дійсному або комплексному) просторі Y опукла функція. Через $\psi'(x, y)$ будемо позначати похідну функції ψ в точці $x \in Y$ за напрямком y.

Елемент $\varphi \in X_R^*$ називається субградієнтом дійснозначної функції p, заданої на X, в точці $x_0 \in X$, якщо

$$p(x) - p(x_0) \geq \varphi(x - x_0),\ x \in X$$

(див., наприклад, [7, с. 57]).

Множину субградієнтів функції p в точці $x_0 \in X$ називають субдиференціалом цієї функції в точці x_0 і позначають $\partial p(x_0)$ (див., наприклад, [7, с. 58]).

Якщо p є опуклою неперервною на X функцією, то для $x_0 \in X$ $\partial p(x_0)$ є непорожньою опуклою слабко* компактною множиною простору X_R^* (див., наприклад, [5, с. 327]).

Для $x_0 \in X$ введемо позначення

$$\partial_C p(x_0) = \left\{ f : f \in X^*, \operatorname{Re} f \in \partial p(x_0) \right\}.$$

Очевидно (див., наприклад, [24, с. 269]), що

$$\partial_C p(x_0) = \left\{ f : f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix), \varphi \in \partial p(x_0) \right\}.$$

Функцію $\Phi_a(g) = \max\limits_{s \in S} \max\limits_{y \in a(s)} p_s\left(y - g(s)\right)$, $g \in C(S, X)$, назвемо цільовою функцією задачі відшукання величини (2).

Для $g^* \in C(S,X)$ покладемо:

$$S_a\left(g^*\right)=\left\{s : s\in S,\ \max_{y\in a(s)} p_s\left(y-g^*(s)\right)=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p_s\left(y-g^*(s)\right)=\Phi_a\left(g^*\right)\right\},$$

а для $s\in S_a\left(g^*\right)$ покладемо

$$a\left(s,g^*\right)=\left\{y : y\in a(s),\, p_s\left(y-g^*(s)\right)=\max_{y\in a(s)} p_s\left(y-g^*(s)\right)=\Phi_a\left(g^*\right)\right\}.$$

Теорема 3. Для того щоб елемент $g^* \in V\cap D$ був екстремальним елементом для величини (2), необхідно, щоб не існувало такого елемента $z\in\Gamma^*\left(V,g^*\right)$, що $Re\, f\left(z(s)\right)>0$ для всіх $s\in S_a\left(g^*\right)$, $y\in a\left(s,g^*\right)$, $f\in\partial_C p_s\left(y-g^*(s)\right)$ та $Re\, f'\left(z(s')\right)<0$ для всіх $s'\in F\left(g^*\right)$, $f'\in B^*_{g^*(s')-u(s')}$.

Доведення. Нехай g^* — екстремальний елемент для величини (2). Тоді g^* є екстремальним елементом для такої задачі оптимізації

$$\inf_{g\in V\cap D}\Phi_a(g)=\inf_{\substack{g\in D,\\ g\in V}}\Phi_a(g).$$

Нехай $C_a\left(g^*\right)=\left\{g : g\in C(S,X), \Phi_a(g)<\Phi_a\left(g^*\right)\right\}$.

Якщо $C_a\left(g^*\right)=\varnothing$, то для всіх $g\in C(S,X)$ $\Phi_a(g)\ge\Phi_a\left(g^*\right)$. Тому для всіх $z\in C(S,X)$ $\Phi_a'\left(g^*,z\right)\ge 0$. Згідно з теоремою 2 [6] для будь-якого $z\in C(S,X)$, у тому числі і для будь-якого $z\in\Gamma^*\left(V,g^*\right)$, існують елементи $s_z\in S_a\left(g^*\right)$, $y_z\in a\left(s_z,g^*\right)$, $f_z\in\partial_C p_{s_z}\left(y_z-g^*\left(s_z\right)\right)$ такі, що $\Phi_a'\left(g^*,z\right)=\mathrm{Re}\, f_z\left(-z\left(s_z\right)\right)\ge 0$. Звідки випливає, що $\mathrm{Re}\, f_z\left(z\left(s_z\right)\right)\le 0$.

У цьому випадку теорему доведено.

Припустимо тепер, що $C_a\left(g^*\right)\ne\varnothing$. Згідно з теоремою 1.4.1 [5, с. 22] має місце співвідношення

$$\Gamma\left(C_a\left(g^*\right),g^*\right)\cap\Gamma\left(D,g^*\right)\cap\Gamma^*\left(V,g^*\right)=\varnothing. \tag{27}$$

Оскільки функція $\Phi_a(g)$, $g\in C(S,X)$, є опуклою та неперервною на $C(S,X)$ (див. наслідок 1 [25]), то (див. твердження 6.9.1 [5, с. 352])

$$\Gamma\left(C_a\left(g^*\right),g^*\right)=\left\{z : z\in C\left(S,X\right),\Phi_a^{/}\left(g^*,z\right)<0\right\}. \tag{28}$$

Із співвідношень (27) випливає, що для кожного $z\in\Gamma^*\left(V,g^*\right)$ маємо, що $z\notin\Gamma\left(C_a\left(g^*\right),g^*\right)$ або $z\notin\Gamma\left(D,g^*\right)$. Якщо $z\notin\Gamma\left(C_a\left(g^*\right),g^*\right)$, то $\Phi_a^{/}\left(g^*,z\right)\geq 0$. В цьому випадку, як зазначалось вище, існують $s_z\in S_a\left(g^*\right)$, $y_z\in a\left(s_z,g^*\right)$, $f_z\in\partial_C p_{s_z}\left(y_z-g^*\left(s_z\right)\right)$ такі, що $\operatorname{Re} f_z\left(z\left(s_z\right)\right)\leq 0$.

Якщо ж $z\notin\Gamma\left(D,g^*\right)$, то відповідно до теореми 2 існують $s_z'\in F\left(g^*\right)$, $f_z'\in B^*_{g^*\left(s_z'\right)-u\left(s_z'\right)}$ такі, що $R\text{e} f_z'\left(z\left(s_z'\right)\right)\geq 0$.

Теорему доведено.

Теорему 3 можна сформулювати у таких еквівалентних формах.

Теорема 4. Для того щоб елемент $g^*\in V\cap D$ був екстремальним елементом для величини (2), необхідно, щоб для будь-якого $z\in\Gamma^*\left(V,g^*\right)$ існували елементи $s_z\in S_a\left(g^*\right)$, $y_z\in a\left(s_z,g^*\right)$, $f_z\in$ $\in\partial_C p_{s_z}\left(y_z-g^*\left(s_z\right)\right)$ такі, що $\operatorname{Re} f_z\left(z\left(s_z\right)\right)\leq 0$, або існували елементи $s_z'\in F\left(g^*\right)$, $f_z'\in B^*_{g^*\left(s_z'\right)-u\left(s_z'\right)}$ такі, що $R\text{e} f_z'\left(z\left(s_z'\right)\right)\geq 0$.

Теорема 5. Для того щоб елемент $g^*\in V\cap D$ був екстремальним елементом для величини (2), необхідно, щоб для будь-якого $z\in\Gamma^*\left(V,g^*\right)$ існували елементи $s_z\in S$, $y_z\in a\left(s_z\right)$, $f_z\in$ $\in\partial_C p_{s_z}\left(y_z-g^*\left(s_z\right)\right)$ такі, що

$$\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p_s\left(y-g^*\left(s\right)\right)=\max_{y\in a\left(s_z\right)} p_{s_z}\left(y-g^*\left(s_z\right)\right)=p_{s_z}\left(y_z-g^*\left(s_z\right)\right),$$

$$\operatorname{Re} f_z\left(z\left(s_z\right)\right)\leq 0,$$

або існували елементи $s_z'\in S$, $f_z'\in B^*$ такі, що

$$\left\|g^*\left(s_z'\right)-u\left(s_z'\right)\right\|=r\left(s_z'\right),\ f_z'\left(g^*\left(s_z'\right)-u\left(s_z'\right)\right)=\left\|g^*\left(s_z'\right)-u\left(s_z'\right)\right\|,$$

$$R\text{e} f_z'\left(z\left(s_z'\right)\right)\geq 0.$$

Далі будемо користуватися поняттями Γ^* — множини (див., наприклад, [14, с. 1616]) та Γ — множини (див., наприклад, [15, с. 20]).

Теорема 6. Нехай $g^*\in V\cap D$ і V є Γ^* — множиною відносно $g^*\in V$ (зірковою відносно $g^*\in V$ або опуклою множиною). Для того щоб елемент $g^* \in V \cap D$ був екстремальним елементом для величини (2), необхідно, щоб для будь-якого елемента $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $y_g \in a(s_g)$, $f_g \in \partial_C p_{s_g}\left(y_g - g^*(s_g)\right)$ такі, що

$$\max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s\left(y - g^*(s)\right) = \max_{y \in a(s_g)} p_{s_g}\left(y - g^*(s_g)\right) = p_{s_g}\left(y_g - g^*(s_g)\right), \quad (29)$$

$$\operatorname{Re} f_g\left(g(s_g) - g^*(s_g)\right) \le 0, \quad (30)$$

або існували елементи $s'_g \in S$, $f'_g \in B^*$ такі, що

$$\left\|g^*(s'_g) - u(s'_g)\right\| = r(s'_g),\; f'_g\left(g^*(s'_g) - u(s'_g)\right) = \left\|g^*(s'_g) - u(s'_g)\right\|, \quad (31)$$

$$\operatorname{Re} f'_g\left(g(s'_g) - g^*(s'_g)\right) \ge 0. \quad (32)$$

Справедливість теореми випливає з теореми 5, якщо врахувати, що для будь-якого $g \in V$ елемент $g - g^* \in \Gamma^*\left(V, g^*\right)$, оскільки за умовою V є Γ^* — множиною відносно g^*.

Теорема 7. Для того щоб елемент $g^* \in V \cap D$ був екстремальним елементом для величини (2), достатньо, щоб для кожного елемента $g \in V \cap D$ існували елементи $s_g \in S$, $y_g \in a(s_g)$, $f_g \in \partial_C p_{s_g}\left(y_g - g^*(s_g)\right)$, для яких виконуються умови (29), (30).

Доведення. Нехай для кожного елемента $g \in V \cap D$ існують елементи $s_g \in S$, $y_g \in a(s_g)$, $f_g \in \partial_C p_{s_g}\left(y_g - g^*(s_g)\right)$, для яких виконуються умови (29), (30). Тоді для кожного $g \in V \cap D$ маємо, що

$$0 \le \operatorname{Re} f_g\left(g^*(s_g) - g(s_g)\right) \le p_{s_g}\left(y_g - g(s_g)\right) - p_{s_g}\left(y_g - g^*(s_g)\right) \le$$

$$\le \max_{y \in a(s_g)} p_{s_g}\left(y - g(s_g)\right) - \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s\left(y - g^*(s)\right) \le$$

$$\le \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s\left(y - g(s)\right) - \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s\left(y - g^*(s)\right).$$

Отже, для кожного $g \in V \cap D$

$$\max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s\left(y - g(s)\right) \ge \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s\left(y - g^*(s)\right).$$

Це й означає, що g^* є екстремальним елементом для величини (2).

Теорему доведено.

Теорема 8. Нехай V є Γ — множиною відносно кожного свого елемента, зокрема опуклою множиною. Для того щоб елемент $g^* \in V \cap D$ був екстремальним елементом для величини (2) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $y_g \in a\left(s_g\right)$, $f_g \in \partial_C p_{s_g}\left(y_g - g^*\left(s_g\right)\right)$, для яких виконуються умови (29), (30), або існували елементи $s'_g \in S$, $f'_g \in B^*$, для яких виконуються умови (31), (32).

Доведення. Необхідність випливає з теореми 6, оскільки Γ — множина відносно g^* є Γ^* — множиною відносно g^*.

Достатність. Припустимо, що умови теореми виконуються, але g^* не є екстремальним елементом для величини (2). Тоді знайдеться такий елемент $\overline{g} \in V \cap D$, що

$$\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p_s\left(y-\overline{g}(s)\right) < \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p_s\left(y-g^*(s)\right).$$

Це означає, що $\overline{g} \in C_a^{g^*}$. Згідно з припущенням існує елемент $g_0 \in V$ для якого $g_0(s) \in \operatorname{int} b(s)$, $s \in S$. Відповідно до твердження 5 $g_0 \in \operatorname{int} D$. Оскільки D є опуклою множиною, то елемент $g_\alpha = \overline{g} + \alpha\left(g_0 - \overline{g}\right) \in \operatorname{int} D$ для всіх $\alpha \in (0,1]$ (див, наприклад, [5, с. 18]). З урахуванням того, що V є Γ — множиною відносно $\overline{g}$, а $C_a^{g^*}$ є відкритою множиною, робимо висновок, що існує таке $\alpha \in (0,1]$, що для $g = g_\alpha$ будемо мати $g \in V$, $g \in \operatorname{int} D$, $g \in C_a^{g^*}$.

Оскільки $C_a^{g^*}$ та D є опуклими множинами, то $g - g^* \in$ $\in \Gamma\left(C_a^{g^*}, g^*\right) \cap \Gamma\left(D, g^*\right)$ (див, наприклад, [5, с. 19]). Згідно (28), теореми 2 [6], твердження 6.4.7 [5, с. 328] та теореми 2 тоді

$$\max_{s\in S_a\left(g^*\right)}\ \max_{y\in a\left(s,g^*\right)} p_s'\left(y-g^*(s), g^*(s)-g(s)\right) =$$

$$= \max_{s\in S_a\left(g^*\right)}\ \max_{y\in a\left(s,g^*\right)}\ \max_{f\in\partial_C p_s\left(y-g^*(s)\right)} \operatorname{Re} f\left(g^*(s)-g(s)\right) \le \Phi'\left(g^*, g-g^*\right) < 0$$

та $\operatorname{Re} f\left(g(s)-g^*(s)\right) < 0$ для всіх $s \in F\left(g^*\right)$, $f \in B^*$ таких, що $f\left(g^*(s)-u(s)\right) = \left\|g^*(s)-u(s)\right\|$, що суперечить умовам теореми.

Отримана суперечність доводить, що g^* є екстремальним елементом для величини (2).

Теорему доведено.

Наслідок. Нехай V — підпростір простору $C(S,X)$. Для того щоб елемент $g^* \in V \cap D$ був екстремальним елементом для величини (2), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $y_g \in a(s_g)$, $f_g \in \partial_C p_{s_g}\left(y_g - g^*(s_g)\right)$, для яких виконуються умови

$$\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p_s\left(y - g^*(s)\right) = \max_{y\in a(s_g)} p_{s_g}\left(y - g^*(s_g)\right) = p_{s_g}\left(y_g - g^*(s_g)\right),$$

$$\operatorname{Re} f_g\left(g(s_g)\right) \le 0,$$

або існували елементи $s'_g \in S$, $f'_g \in B^*$ такі, що

$$\left\|g^*(s'_g) - u(s'_g)\right\| = r(s'_g),\ f'_g\left(g^*(s'_g) - u(s'_g)\right) = \left\|g^*(s'_g) - u(s'_g)\right\|,$$

$$\operatorname{Re} f'_g\left(g(s'_g)\right) \ge 0.$$

Справедливість наслідку випливає з теореми 8.

Висновки. Для задачі найкращої у розумінні сім'ї опуклих функцій рівномірної апроксимації півнеперервного зверху компактнозначного відображення множиною неперервних однозначних відображень з додатковим обмеженням, що задається системою замкнених куль з центрами та радіусами, які неперервно змінюються, встановлено необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента.

Список використаних джерел:

1. Taylor G. D. Approximation by polynomials having restricted ranges / G. D. Taylor // I. SIAM J. Numer. Anal. — 1968. — Vol. 5. — P. 258–268.
2. Taylor G. D. On approximation by functions having restricted ranges / G. D. Taylor // J. Math. Anal. Appl. — 1969. — Vol. 27. — P. 241–248.
3. Shi Y. G. The limits of a Chebyshev-type theory of restricted range approximation / Y. G. Shi // J. Approxim. Theory. — 1988. — Vol. 53, № 1. — P. 41–53.
4. Smirnov G. S. Best uniform restricted ranges approximation of complexvalued functions / G. S. Smirnov, R. G. Smirnov // C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. — 1997. — Vol. 19, № 2. — P. 58–63.
5. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация/ П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
6. Гудима У. В. Умови екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні сім'ї опуклих функцій рівномірної апроксимації компактнозначного ві-

дображення множиною однозначних відображень / У.В. Гудима, В. О. Гнатюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. — Вип. 9. — С. 11–28.
7. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. — М. : Наука, 1974. — 480 с.
8. Сендов Б. Хаусдорфовы приближения / Б. Сендов. — София : БАН, 1979. — 372 с.
9. Никольский М. С. Аппроксимация выпуклозначных непрерывных многозначных отображений / М. С. Никольский // Докл. АН СССР. — 1989. — Вып. 308, № 5. — С. 1047–1050.
10. Никольский М. С. Об аппроксимации непрерывного многозначного отображения постоянными многозначными отображениями / М. С. Никольский // Вест. Моск. ун-та. Сер. Вычислит. математика и кибернетика. — 1990. — № 1. — С. 76–80.
11. Чобан М. М. Теорема Стоуна-Вейерштрасса и аппроксимации выпуклозначных непрерывных многозначных отображений / М. М. Чобан, Д. М. Ипате // Изв. АН Респ. Молдова. Мат. — 1981. — № 2. — С. 13–18.
12. Дудов С. И. О приближении непрерывного многозначного отображения постоянными многозначными отображения с шаровыми образами / С. И. Дудов, А. Б. Коноплев // Мат. заметки. — 2007. — Вып. 82, № 4. — С. 525–529.
13. Выгодчикова И. Ю. О наилучшем приближении непрерывного многозначного отображения алгебраическим полиномом / И. Ю. Выгодчикова // Математика. Механика : сб. науч. тр. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та.– 2000. — № 2. — С. 13–15.
14. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень / У. В. Гудима // Укр. мат. журн. — 2005. — Вип. 57, № 12. — С. 1601–1619.
15. Гнатюк Ю. В. Критерії екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень / Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима // Доп. НАН України. — 2005. — № 6. — С. 19–23.
16. Дудов С. И. Критерий решения задачи наилучшего приближения сегментной функции полиномиальной полосой / С. И. Дудов, Е. В. Сорина // Математика. Механика : сб. науч. тр. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та. — 2008. — № 10. — С. 20–23.
17. Арестов В. В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи / В. В.Арестов // Тр. МИАН СССР. — 1989. — С. 3–20.
18. Магарил-Ильяев Г. Г. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным / Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко // Матем. заметки. — 1991 — Вып. 50, № 6. — С. 85–93.
19. Покровский А. В. О наилучшем несимметричном приближении в пространствах непрерывных функций / А. В. Покровский // Изв. РАН. Сер. матем. — 2006. — Вып. 70, № 4. — С. 175–208.
20. Вакал Л. П. Аналітична обробка даних на основі чебишовської апроксимації / Л. П. Вакал, А. О. Каленчук-Порханова // Мат. машини і ситеми. — 2006. — № 2. — С. 15–24.

21. Гнатюк В. О. Метод січної площини розв'язування задачі найкращої зважено рівномірної апроксимації компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором / В. О. Гнатюк, У. В. Гудима // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 15-17 травня, 2014 р., Київ : матеріали конф. — К. : НТУУ «КПІ», 2014. — Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. — С. 66.
22. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М. : Мир, 1967. — 624 с.
23. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1989. — 623 с.
24. Кадец В. М. Курс функционального анализа: Учебное пособие для студентов механико-математического факультета / В. М. Кадец. — Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2006. — 607 с.
25. Гудима У. В. Деякі властивості цільової функції задачі найкращої у розумінні сім'ї опуклих функцій апроксимації компактнозначного відображення / У. В. Гудима // Наукові праці Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка : збірник за підсумками звітної наукової конференції викладачів, докторантів і аспірантів. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. — Вип. 10. — Т. 1. — С. 18–21.

The necessary and sufficient conditions and criteria of the extremal element for the problem of the best at sense of the family convex functions uniform approximation of upper semicontinuous compact-valued maps by set of single-valued maps with the additional restriction which is defined by set of closed balls are proved.

Key words: *the upper semicontinuous compact-valued maps, the best at sense of the family convex functions uniform approximation, conditions of the extremal element, the additional restriction.*

Отримано: 26.06.2014