

УДК 624.048-033.26.621.55

М. Б. Демчук*, магістр,

О. Г. Наконечний**, д-р фіз.-мат. наук

*Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне,

**Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

ЧИСЛОВИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ НА ОСНОВІ МОДЕЛЕЙ ЦЕМЕНТАЦІЇ ҐРУНТУ З ВІЛЬНИМИ РУХОМИМИ МЕЖАМИ

Виконана числова перевірка того, що невизначеністю у кінцевому положенні фронту нагнітання, обумовленою невизначеністю у виборі методу інтерполювання цього фронту на кожному часовому шарі, можна знехтувати, оцінюючи похибку методу розрахунку цього положення згідно моделі цементациї ґрунту з вільною рухомою межею. Результати числового експерименту вказують на те, що криволінійна сітка, на якій виконується розрахунок, має хаотичні розміщення своїх вузлів на деяких часових шарах.

Ключові слова: *цементация ґрунту, числовий аналіз, двовимірні моделі, метод скінчених різниць, хаос.*

Вступ. Інколи виникає необхідність прокласти тунель у крейдяній породі. Суха крейда є міцною породою. Однак за достатньо великого вмісту вологи в ній вона стає м'якою [1]. Тому перед прокладанням тунелю в крейдяній породі її варто закріпити, щоб мати достатньо часу для встановлення тимчасових кріплень за дощової погоди. Цементация, за якої структура ґрунту не руйнується, є тим методом його стабілізації, що зазвичай використовується у цьому випадку. Під час цементациї цементний розчин через інжектор під тиском нагнітається в ґрунт, що закріплюється [2]. Від того наскільки якісно закріплено ґрунт суттєво залежить продуктивність прокладання тунелю в ньому. Режим цементациї визначається еволюцією просторового розподілу концентрації цементу в ґрунті, що закріплюється [3, с. 1195]. Тому математичне моделювання цієї еволюції є важливим. Цементний розчин складається з частинок, які в залежності від їх розмірів можуть або застрягти у вузьких проходах між порами ґрунту, або випасти в осад на стінках цих проходів і пор [4, с. 1637]. Тому математичний опис поширення цементу в ґрунтовому пористому середовищі не є тривіальним. Щоб знайти відповіді на спірні питання, які виникають за побудови цього опису, у роботах [3; 5] моделюється стандартне лабораторне дослідження. У ньому цементний розчин нагнітається в основу вертикальної, зверху відкритої труби. Остання заповнена ущільненим і насиченим водою

піском. У роботах [6; 7] з тією ж метою розглядаються постановки, які є більш наближеними до промислового застосування цієї технології. За тисків в інжекторі порядку $12 \cdot 10^5$ Па, структура сухої крейдяної породи не руйнується [8, с. 12]. У роботі [9, с. 122–123] наведено аргументи на користь того, що за таких тисків нагнітання континуальні моделі [3; 5–7], основані на рівнянні конвективної дисперсії, стають моделями фазового поля [10, с. 57]. Тобто за таких тисків нагнітання еволюцію просторового розподілу концентрації цементу в ґрунті можна моделювати задачею з вільною рухомою межею. Однак порівняння результатів розрахунків згідно моделей останнього класу з результатами лабораторних досліджень, ще не виконувалось. Інформативність такого порівняння залежить від похибок величин, що порівнюються [11, с. 47]. Тому важливо коректно оцінювати похибки розрахунків. У роботі [12] представлено модифікацію числового моделювання [9], в якій забезпечено правомірність використання континуального підходу. Криволінійні сітки, на яких виконуються розрахунки в роботі [12, с. 177], можуть мати хаотичні розміщення своїх вузлів на деяких часових шарах. Однак це не призводить до неузгодженості результатів цих розрахунків. Тому різниці схеми, згідно яких виконуються розрахунки в роботі [12], є умовно стійкими. Таким чином, оцінюючи похибки цих розрахунків, похибками заокруглення можна знехтувати. У роботі [12, с. 177] похибка методу розрахунку кінцевого положення фронту нагнітання оцінена за припущення, що невизначеністю кінцевого положення вільної межі, яка обумовлена невизначеністю у виборі методу інтерполявання фронту нагнітання на кожному часовому шарі, можна знехтувати.

Метою роботи є числова перевірка цього припущення.

Числове моделювання цементациі сухого ґрунту. У даній роботі ми розглядаємо чотири постановки задачі [12, с. 171]. У випадках постановок № 1 та № 3 ми вважаємо, що безмежно довга траншея вирита під фундаментом інжектора. Її ширина рівна $2 \cdot r_0$, а її глибина рівна h_0 . У постановках № 2 та № 4 замість траншеї ми маємо свердловину з радіусом r_0 та глибиною h_0 . У всіх постановках в'яжучий інфільтрат нагнітається в інжектор за постійного тиску p_0 . У постановках № 1 та № 2 вважається, що скелет ґрунту є абсолютно твердим, а в постановках № 3 та № 4 вважається, що він є пружним. У кожному випадку $h_0 \gg r_0$, фронт нагнітання (крива Γ_4 на рис. 1 (а)) є вільною межею та потрібно знайти її еволюцію в часі та просторі.

У роботі [12, с. 172] континуальні моделі цементациі з вільними рухомими межами поділяються на два класи. У кожному момент часу t числове моделювання на основі моделей першого типу виконується в

криволінійному чотирикутнику [13, с. 1032] $G(t)$, який на рис. 1(a) обмежений кривими Γ_i , де $i = \overline{1,4}$. У цьому моделюванні на кожному часовому шарі область G покривається рідкою криволінійною сіткою і похибка методу оцінюється на основі аналізу числових розв'язків. У цьому аналізі міра різниці між двома сплайнами $f_1(y)$ і $f_2(y)$, які інтерполюють кінцеві положення фронту нагнітання, оцінюються як

$$\varepsilon = \max_{y \in [0, L]} |f_1(y) - f_2(y)| / \sqrt{y^2 + (f_1(y))^2}. \quad (1)$$

У рівнянні (1) $L = \max\{y_1^{\max}, y_2^{\max}\}$, де y_1^{\max} і y_2^{\max} є найменшими додатними ординатами, які задовольняють умовам: $f_1(y_1^{\max}) = 0$ та $f_2(y_2^{\max}) = 0$. У моделюванні на основі моделей першого типу, які відповідають постановкам № 3 та № 4, похибка методу приблизно рівна невизначеності в кінцевому положенні фронту нагнітання, що обумовлена кінечністю кроків вищезгаданої криволінійної сітки. Кожна модель другого типу відповідає або постановці № 3, або постановці № 4. Оскільки інформація про рух фронту нагнітання поширюється за допомогою звукових хвиль, які швидко затухають внаслідок тертя між ґрунтом та інфільтратом, в моделях цього типу припускається, що можна вибрати криву $\tilde{\Gamma}_3$ в області G та момент часу t_0 , починаючи з якого п'єзометричний напір в точках цієї кривої не залежить від часу. Числове моделювання на основі моделей цього типу виконується в $G(t)$, якщо $t \leq t_0$. Однак якщо $t > t_0$, то воно виконується в криволінійному чотирикутнику $\tilde{G}(t)$, який обмежений на рис. 1 (a) кривими $\tilde{\Gamma}_i$, де $i = \overline{1,3}$, та кривою Γ_4 . У кожній із цих моделей крива $\tilde{\Gamma}_3$ поділяє відповідну область $G(t_0)$ приблизно навпіл а момент часу t_0 вибирається таким, щоб зробити невизначеність у кінцевому положенні фронту нагнітання, яка обумовлена кінечністю кроків криволінійної сітки, і міру різниці між кінцевим положенням фронту нагнітання та відповідним положенням, яке отримане за розрахунку згідно відповідної моделі першого типу, що поражена згідно формули (1), як можна меншими. У роботі [12, с. 177] похибки методів розрахунків оцінені за припущення, що вкладами невизначеностей в кінцевому положенні фронту нагнітання, які обумовлені невизначеністю у виборі методу інтерполювання вільної межі на кожному часовому шарі, в ці похибки можна знехтувати. Тому той

факт, що момент часу t_0 можна вибрати як описано вище в усіх числових моделюваннях на основі моделей другого типу, що виконані в роботі [12, с. 175–176], підтверджує це припущення. Форми $G(t)$ і $\tilde{G}(t)$ є складними. Тому в дослідженні [12] числові розв'язки шукаються різницевим методом із використанням числових конформних відображень. У цьому методі на кожному часовому шарі використовується алгоритм числового знаходження конформної заміни змінних

$$x = x(\xi, \eta, t), \quad y = y(\xi, \eta, t), \quad (2)$$

що відображає криволінійний чотирикутник, в якому виконується числове моделювання, на параметричний чотирикутник $R(t)$, що зображений на рис. 1 (б) [9, с. 127].

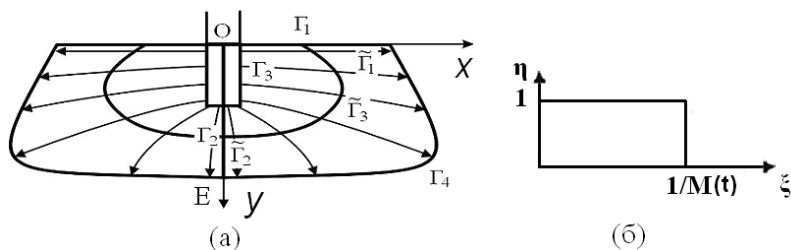


Рис. 1. (а). Криволінійні чотирикутники $G(t)$ та $\tilde{G}(t)$.

(б). Параметричний прямокутник $R(t)$

У цьому алгоритмі на кожному часовому шарі $R(t)$ покривається рівномірною сіткою. Заміна змінних (2) відображає вузли цієї сітки у вузли криволінійної. Вищезгадане числове знаходження полягає у визначенні просторового розміщення останніх. У роботі [9, с. 128] декартові координати вузлів цієї криволінійної сітки знаходяться як розв'язок системи алгебраїчних рівнянь, що в загальному випадку має безмежну кількість розв'язків. Тому на деяких часових шарах цей алгоритм може згенерувати криволінійні сітки з хаотичним розміщенням їх вузлів. У роботі [12] розрахунки виконуються на рідких сітках. Тому похибки апроксимації кінцевих положень фронтів нагнітання, які отримані в результаті розрахунків згідно моделей [12, с. 172], є суттєвими. Для кожної з цих моделей чисельно перевірено коректність таких гіпотез [12, с. 176–177]:

1. На кожному часовому шарі в межах похибки апроксимації фронт нагнітання можна вважати графіком однозначної двічі неперервно-диференційованої функції $x = f(y)$.

- У межах похибки апроксимації всі кути при вершинах криволінійного чотирикутника, в якому здійснюється числове моделювання, можна вважати прямими.
- Ймовірна хаотичність розміщення в просторі вузлів криволінійної сітки на деяких часових шарах не призводить до суттєвого спотворення кінцевого положення фронту нагнітання.

Інтерполяція вільної межі. У даній роботі ми виконуємо 10 обчислень, які визначені в роботі [12, с. 174–175], і використовуємо різні функції для інтерполяції вільних меж на кожному часовому шарі. Нехай нам відомі значення інтерпольованої функції $f(y_p)$ у вузлових точках y_p , де $p = \overline{0, n}$, що лежать на відрізку $[0, b(t)]$, на якому інтерполюється фронт нагнітання.

У даній роботі зручно ввести такі позначення:

$$F_k^{(m)} = (f(y_k), f(y_{k+1}), \dots, f(y_{k+m})), Y_k^{(m)} = (y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}), \quad (3)$$

$$\tilde{F}_k^{(m)} = (f(y_{n-k}), f(y_{n-k-1}), \dots, f(y_{n-k-m})), \quad (4)$$

$$\tilde{Y}_k^{(m)} = (\tilde{y}_k, \tilde{y}_{k+1}, \dots, \tilde{y}_{k+m}), \quad (5)$$

де k та m є невід'ємними цілими числами такими, що $0 \leq k \leq n - m$, а $\tilde{y}_i = b(t) - y_{n-i}$, де $i = \overline{0, n}$. Нижче $P_m(y, F_k^{(m)}, Y_k^{(m)})$ позначає інтерполяційний поліном [14, с. 20], побудований із використанням значень інтерпольованої функції $f(y_k), f(y_{k+1}), \dots, f(y_{k+m})$ у вузлах $y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}$. Оскільки в роботі [12] одиничний вектор нормалі до вільної межі обраховується в кожній вузловій точці на кожному часовому шарі, то всюди нижче ми вважаємо, що $0 < s \leq n - 1$. Якщо вузли інтерполяції занумеровані в порядку зростання значень їх ординат ($0 = y_0 < y_1 < \dots < y_n = b(t)$), то ми визначимо кусково-поліноміальний локальний сплайн $\varphi(y, s, j, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$, де j є цілим числом і $0 \leq j \leq s$, який є двічі неперервно-диференційованим на відрізку $[0, b(t)]$, таким чином

$$\varphi(y, s, j, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) = \begin{cases} P_s(y, F_0^{(s)}, Y_0^{(s)}), & \text{де } y_0 \leq y \leq y_j, \\ Q_{2s+1}^{(j)}(y, F_{k-j}^{(s+1)}, Y_{k-j}^{(s+1)}), & \text{де } y \in [y_k, y_{k+1}] \\ i \ k = j, j+1, \dots, n+j-s-1, \\ P_s(y, F_{n-s}^{(s)}, Y_{n-s}^{(s)}), & \text{де } y_{n+j-s} \leq y \leq y_n. \end{cases} \quad (6)$$

У рівнянні (6) $Q_{2s+1}^{(j)}(y, F_{k-j}^{(s+1)}, Y_{k-j}^{(s+1)})$ є поліномом степені не вище ніж $2 \cdot s + 1$, який задовольняє таким рівнянням:

$$\left. \frac{d^m Q_{2s+1}^{(j)}(y, F_{k-j}^{(s+1)}, Y_{k-j}^{(s+1)})}{dy^m} \right|_{y=y_{\tilde{k}}} = \left. \frac{d^m P_s(y, F_{\tilde{k}-j}^{(s)}, Y_{\tilde{k}-j}^{(s)})}{dy^m} \right|_{y=y_{\tilde{k}}}, \quad (7)$$

де $\tilde{k} = \overline{k, k+1}$, $k = \overline{j, n+j-s}$, $m = \overline{0, s}$.

Теорема 1. Існує один і тільки один поліном степені не вище ніж $2 \cdot s + 1$, який задовольняє рівнянню (7) при $\tilde{k} = k$ та $\tilde{k} = k + 1$.

Доведення. В. С. Рябенський доводить цю теорему, вважаючи, що $j = \overline{0, s-1}$ [14, с. 34–35]. Однак у своєму доведенні він ніде не використовує той факт, що $j \neq s$. Тому ця теорема є справедливою і для випадку $j = s$. Теорему доведено.

Теорема 2. Якщо $f(y)$ є поліномом степені не вище ніж s , то функція $\varphi(y, s, j, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$, яка визначена формулою (6), співпадає з цим поліномом.

Доведення. Якщо $j > 0$ та $y_0 \leq y \leq y_j$, то завдяки єдиності інтерполяційного поліному $\varphi(y, s, j, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) = P_s(y, F_0^{(s)}, Y_0^{(s)}) = f(y)$. Якщо $j < s$ і $y_{n+j-s} \leq y \leq y_n$, то завдяки єдиності інтерполяційного поліному $\varphi(y, s, j, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) = P_s(y, F_{n-s}^{(s)}, Y_{n-s}^{(s)}) = P_s(y, F_{n-s}^{(s)}, Y_{n-s}^{(s)}) = f(y)$. Доведемо, що $\varphi(y, s, j, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) = f(y)$, коли $y_k \leq y \leq y_{k+1}$, де $k = j, j+1, \dots, n+j-s-1$. Завдяки єдиності інтерполяційного поліному $P_s(y, F_{k-j}^{(s)}, Y_{k-j}^{(s)}) = P_s(y, F_{k-j+1}^{(s)}, Y_{k-j+1}^{(s)}) = f(y)$. Якщо ми підставимо в рівність (7) $f(y)$ замість $Q_{2s+1}^{(j)}(y, F_{k-j}^{(s+1)}, Y_{k-j}^{(s+1)})$, то вона буде виконуватись і при $\tilde{k} = k$, і при $\tilde{k} = k + 1$. Тому з Теорема 1 слідує, що $Q_{2s+1}^{(j)}(y, F_{k-j}^{(s+1)}, Y_{k-j}^{(s+1)}) = f(y)$. **Теорему доведено.**

Нижче ми вважаємо, що $n > 5$.

Означення 1. Сплайн $\varphi(y, s, j, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ є сильно локальним в околі точки $y = 0$ ($y = b(t)$), якщо виконується така умова. Якщо

$y \in [y_0, y_s]$ ($y \in [y_{n-s}, y_n]$), то $\varphi(y, s, j, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ не залежить від y_{s+i+1} і $f(y_{s+i+1})$ (y_i та $f(y_i)$), де $i = \overline{0, n-s-1}$.

Зручно ввести таку заміну змінних

$$\tilde{y} = b(t) - y \quad (8)$$

і таку нумерацію точок, в які ця заміна відображає вузли інтерполяції,

$$\tilde{y}_p = b(t) - y_{n-p}, \quad (9)$$

де $p = \overline{0, n}$. Функцію $\tilde{f}(\tilde{y})$ ми визначаємо таким чином

$$\tilde{f}(\tilde{y}) = f(b(t) - y). \quad (10)$$

Теорема 3. Правильними є такі рівності

$$\varphi(y, 1, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) = \varphi(\tilde{y}, 1, 0, \tilde{Y}_0^{(n)}, \tilde{F}_0^{(n)}), \quad (11)$$

$$\varphi(y, 2, 2, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) = \varphi(\tilde{y}, 2, 0, \tilde{Y}_0^{(n)}, \tilde{F}_0^{(n)}). \quad (12)$$

Доведення. Якщо $y_k \leq y \leq y_{k+1}$, де $k = \overline{0, n-1}$, то з рівнянь (8) і (9) слідує, що $\tilde{y}_{n-k-1} \leq \tilde{y} \leq \tilde{y}_{n-k}$. Крім того з цих рівнянь слідує, що $y - y_p = \tilde{y}_{n-p} - \tilde{y}$, де $p = \overline{0, n}$. З рівнянь (9) і (10) слідує, що $\tilde{f}(\tilde{y}_p) = f(y_{n-p})$, де $p = \overline{0, n}$. З рівняння (9) слідує, що $\tilde{y}_k - \tilde{y}_r = y_{n-r} - y_{n-k}$, де $k, r = \overline{0, n}$. Тому з явного вигляду інтерполяційного поліному [14, с. 21] слідує, що

$$P_s(y, F_{k-s+1}^{(s)}, Y_{k-s+1}^{(s)}) = P_s(b(t) - y, \tilde{F}_{n-k-1}^{(s)}, \tilde{Y}_{n-k-1}^{(s)}), \quad (13)$$

де $k = \overline{s-1, n-1}$ і $s = \overline{1, 2}$. З рівнянь (7)–(9) слідує, що

$$\left. \frac{d^m Q_{2s+1}^{(0)}(\tilde{y}, \tilde{F}_p^{(s+1)}, \tilde{Y}_p^{(s+1)})}{d\tilde{y}^m} \right|_{\tilde{y}=\tilde{y}_p} = \left. \frac{d^m P_s(\tilde{y}, \tilde{F}_p^{(s)}, Y_p^{(s)})}{d\tilde{y}^m} \right|_{\tilde{y}=\tilde{y}_p}, \quad (14)$$

де $\tilde{p} = \overline{p, p+1}$, $s = \overline{1, 2}$, $m = \overline{0, s}$, $p = \overline{0, n-1-s}$. $Q_{2s+1}^{(0)}(\tilde{y}, \tilde{F}_p^{(s+1)}, \tilde{Y}_p^{(s+1)})$ є поліномом степені не вище ніж $2 \cdot s + 1$ по відношенню до \tilde{y} і заміна змінних (8) є лінійною. Тому $Q_{2s+1}^{(0)}(b(t) - y, \tilde{F}_p^{(s+1)}, \tilde{Y}_p^{(s+1)})$ є поліномом степені не вище ніж $2 \cdot s + 1$ по відношенню до y . Якщо $k = n - p - 1$, то з рівнянь (13), (14) слідує, що

$$\left. \frac{d^m Q_{2s+1}^{(0)}(\tilde{y}, \tilde{F}_{n-k}^{(s+1)}, \tilde{Y}_{n-k}^{(s+1)})}{d\tilde{y}^m} \right|_{\tilde{y}=\tilde{y}_k} = \left. \frac{d^m P_s(y, F_{k-s}^{(s)}, Y_{k-s}^{(s)})}{dy^m} \right|_{y=y_k}, \quad (15)$$

де $n^- = n - 1$, $\tilde{k} = \overline{k, k + 1}$, \tilde{y} обраховується згідно рівняння (8), $s = \overline{1, 2}$, $m = \overline{0, s}$, $k = \overline{s, n - 1}$. З рівнянь (7), (8), (15) і теореми 1 слідує, що

$$Q_{2s+1}^{(s)}(y, F_{k-s}^{(s+1)}, Y_{k-s}^{(s+1)}) = Q_{2s+1}^{(0)}(b(t) - y, \tilde{F}_{n-k-1}^{(s+1)}, \tilde{Y}_{n-k-1}^{(s+1)}), \quad (16)$$

де $s = \overline{1, 2}$, $m = \overline{0, s}$, $k = \overline{s, n - 1}$. З рівнянь (6), (13) і (16) слідує, що рівняння (11) і (12) є правильними. **Теорему доведено.**

Зауваження 1. У роботі [12] на кожному часовому шарі $R(t)$ покривається рівномірною сіткою. Підставляючи замість ξ та η координати вузлів цієї сітки в рівняння (2), ми отримуємо координати вузлів криволінійної сітки. Відношення сторін комірки криволінійної сітки є інваріантом конформного відображення (параметр $M(t)$ на Рис. 1 (б)), а згідно гіпотези № 2 $f'(b) = -N$, де N є достатньо великим додатним числом. Тому вузли інтерполяції фронту нагнітання розміщені в околі точки E , яка зображена на Рис. 1 (а), більш компактно, ніж в іншій частині відрізка OE . Таким чином ймовірність хаотичного розміщення вузлів, які розміщені в околі точки E , є більшою ніж ймовірність такого розміщення решти інтерполяційних вузлів.

Зауваження 2. З рівняння (6) слідує, що якщо $y \in [y_0, y_2]$ ($y \in [y_{n-2}, y_n]$), то для кожного цілого j такого, що $0 \leq j \leq 2$, $\varphi(y, 2, j, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ залежить тільки від y , y_i та $f(y_i)$, де $i = \overline{0, 4 - j}$ ($i = \overline{n - 2 - j, n}$). Таким чином згідно означення 1 $\varphi(y, 2, 2, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ є сильно локальним в околі точки $y = 0$, а $\varphi(y, 2, 0, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ є сильно локальним в околі точки $y = b(t)$. З означення 1 і теореми 2 слідує, що в загальному випадку $\varphi(y, 2, j, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ не є сильно локальним в околі точки $y = 0$, якщо $0 \leq j \leq 1$, і в околі точки $y = b(t)$, якщо $1 \leq j \leq 2$.

Якщо $y \in [y_{p-1}, y_p]$, де $p = \overline{1, n}$, то $g(y, m, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$, де $m = \overline{1, 4}$, є кубічним поліномом із властивостями [15, с. 191–199]:

$$\partial g(y, m, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) / \partial y \Big|_{y=y_0} = dP_m(y, F_0^{(m)}, Y_0^{(m)}) / dy \Big|_{y=y_0}, \quad (17)$$

$$\partial g(y, m, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) / \partial y \Big|_{y=y_n} = dP_m(y, F_{n-m}^{(m)}, Y_{n-m}^{(m)}) / dy \Big|_{y=y_n}, \quad (18)$$

$$g(y_p, m, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) = f(y_p),$$

де $p = \overline{0, n}$, $\partial^2 g(y, m, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) / \partial y^2$ є неперервною функцією на відрізку $[0, b(t)]$.

Нижче якщо $y_{i+1} < y_i$, де $0 \leq i \leq n-1$, то $[y_i, y_{i+1}] = \emptyset$. У роботі [12] вільна межа інтерполюється на кожному часовому шарі функцією визначеною таким чином. За умови $y \geq y_n$ або за умов $y \in [y_{n-1}, y_n]$ та $y \notin [y_k, y_{k+1}]$, де $k = \overline{0, n-2}$, $\check{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) = P_2(y, F_{n-2}^{(2)}, Y_{n-2}^{(2)})$, інакше якщо $y \notin [y_0, y_1]$ і $y \in [y_r, y_{r+1}]$, де r є найменшим серед цілих чисел k таких, що $1 \leq k \leq n-2$ та $y \in [y_k, y_{k+1}]$, тоді $\check{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) = Q_S^{(1)}(y, F_{r-1}^{(3)}, Y_{r-1}^{(3)})$, інакше $\check{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) = P_2(y, F_0^{(2)}, Y_0^{(2)})$. З рівняння (6) та цього визначення функції $\check{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ слідує, що якщо вузли інтерполяції занумеровані в порядку зростання їх ординат, то $\check{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) = \varphi(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$. У даній роботі ми інтерполюємо вільну межу на кожному часовому шарі функціями: $\check{\varphi}(y, 1, 0, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$, $\check{\varphi}(b(t)-y, 1, 0, \check{Y}_0^{(n)}, \check{F}_0^{(n)})$, $\check{\varphi}(y, 2, 0, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$, $\check{\varphi}(b(t)-y, 2, 0, \check{Y}_0^{(n)}, \check{F}_0^{(n)})$, $\check{\varphi}(y, 3, 2, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$, $\check{g}(y, m, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$, де $m = \overline{1, 4}$, — які визначені аналогічно тому, як визначена функція $\check{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$. А саме якщо вузли інтерполяції занумеровані в порядку зростання їх ординат, то ці функції співпадають відповідно з функціями: $\varphi(y, 1, 0, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$, $\varphi(b(t)-y, 1, 0, \check{Y}_0^{(n)}, \check{F}_0^{(n)})$, $\varphi(y, 2, 0, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$, $\varphi(b(t)-y, 2, 0, \check{Y}_0^{(n)}, \check{F}_0^{(n)})$, $\varphi(y, 3, 2, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$, $g(y, m, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$, де $m = \overline{1, 4}$. Більше того з рівнянь (11) і (12) слідує, що якщо вузли інтерполяції занумеровані в порядку зростання їх ординат, то $\varphi(b(t)-y, 1, 0, \check{Y}_0^{(n)}, \check{F}_0^{(n)})$ і $\varphi(b(t)-y, 2, 0, \check{Y}_0^{(n)}, \check{F}_0^{(n)})$ співпадають відповідно з $\varphi(y, 1, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ і $\varphi(y, 2, 2, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$.

Результати числового експерименту. Нижче, аналізуючи кінцеві положення рухомих меж, які отримані чисельно, ми оцінюємо згідно рівняння (1) міру різниці між двома сплайнами $f_1(y)$ і $f_2(y)$, що інтерполюють кінцеві положення фронтів нагнітань.

У таблиці 1 ε_i є оцінкою похибки методу для розрахунку № i кінцевого положення фронту нагнітання, де $i = \overline{1,10}$, яка отримана в роботі [12, с. 175–177] за припущення, що вкладом невизначеності в кінцевому положенні вільної межі, яка обумовлена невизначеністю у виборі методу інтерполювання фронту нагнітання на кожному часовому шарі, можна знехтувати. Числова перевірка цього припущення представлена в другому розділі. Щоб перевірити його коректність додатково, нижче ми аналізуємо числові розв'язки, вважаючи, що це припущення є правильним.

Таблиця 1

Міри різниць між кінцевими положеннями фронтів нагнітань, які ми отримуємо, інтерполюючи вільну межу на кожному часовому шарі різними функціями, та відповідними положеннями, що отримані в роботі [12]

| i | ε_i (%) | $\delta_i^{(1,0)}$ (%) | $\delta_i^{(1,1)}$ (%) | $\delta_i(0.7)$ (%) | $\delta_i(0.002)$ (%) | $\tilde{\varepsilon}_i(0.002)$ (%) |
|-----|---------------------|------------------------|------------------------|---------------------|-----------------------|------------------------------------|
| 1 | 3.2 | 25.5 | 15.0 | 2.98 | 0.05 | 3.20 |
| 2 | 5.5 | 19.7 | 9.94 | 5.02 | 0.02 | 5.50 |
| 3 | 5.4 | 36.8 | 31.5 | 12.00 | 0.66 | 5.44 |
| 4 | 5.5 | 36.3 | 30.7 | 11.26 | 0.59 | 5.53 |
| 5 | 7.4 | 28.19 | 36.93 | 2.57 | 0.10 | 7.40 |
| 6 | 7.1 | 28.43 | 36.71 | 2.28 | 0.08 | 7.10 |
| 7 | 4.2 | 31.89 | 18.43 | 6.16 | 0.28 | 4.21 |
| 8 | 4.2 | 31.87 | 18.23 | 3.67 | 0.15 | 4.20 |
| 9 | 4.7 | 20.8 | 25.9 | 4.43 | 0.01 | 4.70 |
| 10 | 4.3 | 21.8 | 26.6 | 3.58 | 0.01 | 4.30 |

Оскільки за цього аналізу не виникає протиріч, то він є числовою перевіркою даного припущення. Метою цього аналізу є знаходження функції для інтерполювання фронту нагнітання на кожному часовому шарі не гіршої ніж $\tilde{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$. У якості кандидатів ми розглядаємо функції, використовуючи які, ми можемо отримувати кінцеві позиції фронту нагнітання у всіх десяти обчисленнях, що ми розглядаємо. Результати числових розрахунків вказують на те, що із десяти розрахунків, які визначені в роботі [12, с. 174–175], ми не можемо отримати кінцеві позиції фронту нагнітання в обчисленнях № 1 та № 2 [12, с. 174–175], інтерполюючи фронт нагнітання на кожному часовому шарі функцією

$\check{g}(y, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$, і щонайменше в п'яти з цих десяти розрахунків, ін-
 терполюючи вільну межу на кожному часовому шарі однією з таких фун-
 кцій: $\check{\varphi}(y, 2, 0, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$, $\check{\varphi}(b(t) - y, 2, 0, \tilde{Y}_0^{(n)}, \tilde{F}_0^{(n)})$, $\check{\varphi}(y, 3, 2, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$,
 $\check{g}(y, m, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$, де $m = \overline{2, 4}$. Таким чином результати числових роз-
 рахунків вказують на те, що функція $\check{g}(y, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ краще інтерпо-
 лює вільну межу на кожному часовому шарі, ніж кожна з функцій
 $\check{\varphi}(y, 2, 0, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$, $\check{\varphi}(b(t) - y, 2, 0, \tilde{Y}_0^{(n)}, \tilde{F}_0^{(n)})$, $\check{\varphi}(y, 3, 2, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$,
 $\check{g}(y, m, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$, де $m = \overline{2, 4}$. Оскільки сплайн $\varphi(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ є най-
 більш цікавим для практичних застосувань [14, с. 36], то ми у якості кан-
 дидатів на шукану функцію розглядаємо функції з такого одно парамет-
 ричного сімейства функцій $\alpha \cdot \check{g}(y, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) + (1 - \alpha) \check{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$,
 де $0 \leq \alpha \leq 1$. Якщо ми виконуємо розрахунок № i [12, с. 174–175] кінце-
 вих положень фронтів нагнітань, інтерполюючи вільні межі на кожному
 часовому шарі функціями $\check{\varphi}(y, 1, 0, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$, $\check{\varphi}(b(t) - y, 1, 0, \tilde{Y}_0^{(n)}, \tilde{F}_0^{(n)})$
 і $\alpha \cdot \check{g}(y, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) + (1 - \alpha) \cdot \check{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$, то міру різниці між
 кожною з цих позицій і відповідною позицією, яка отримана в роботі
 [12], ми відповідно позначаємо як $\delta_i^{(1,0)}$, $\delta_i^{(1,1)}$ та $\delta_i(\alpha)$, де $i = \overline{1, 10}$. У
 розрахунку № 1 [12, с. 174–175] ми не можемо отримати кінцеве поло-
 ження фронту нагнітання, інтерполюючи вільну межу на кожному часо-
 вому шарі функцією $0.8 \cdot \check{g}(y, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) + 0.2 \check{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$. Ми
 отримуємо значення $\delta_i^{(1,0)}$, $\delta_i^{(1,1)}$ та $\delta_i(0.7)$, де $i = \overline{1, 10}$, які представле-
 ні в таблиці 1. Оскільки $\delta_i(0.7) < \delta_i^{(1,1)}$ та $\delta_i(0.7) < \delta_i^{(1,0)}$, де $i = \overline{1, 10}$,
 ми можемо стверджувати, що функція $0.7 \cdot \check{g}(y, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) +$
 $+ 0.3 \cdot \check{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ краще підходить для інтерполяції вільної межі
 на кожному часовому шарі, ніж функції $\check{\varphi}(b(t) - y, 1, 0, \tilde{Y}_0^{(n)}, \tilde{F}_0^{(n)})$ і
 $\check{\varphi}(y, 1, 0, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$. З даних, які наведені в таблиці 1, слідує, що
 $\delta_3(0.7) \approx \delta_4(0.7)$, $\delta_3(0.7)/2 > \delta_i(0.7)$ і $\delta_4(0.7)/2 > \delta_i(0.7)$, де

$i = \overline{1, 2, 5, 10}$. Результуюча похибка методу числового розрахунку оцінюється як корінь квадратний суми квадратів похибок із різних джерел [16, с. 102]. Тому, щоб знайти необхідну функцію, ми знайдемо на відрізку $[0, 0.7]$ таке значення α , за якого $|\tilde{\varepsilon}_i(\alpha) - \varepsilon_i| < 0.1\%$, де $i = \overline{3, 4}$ та $\tilde{\varepsilon}_i(\alpha) = \sqrt{(\delta_i(\alpha))^2 + (\varepsilon_i)^2}$. У таблиці 2 представлені значення $\delta_i(\alpha)$ та $\tilde{\varepsilon}_i(\alpha)$, де $i = \overline{3, 4}$, за різних значень параметра α зі сегмента $[0, 0.7]$. З даних, які наведені в таблиці 2, можна зробити висновок, що функцію $\alpha \cdot \check{g}(y, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)}) + (1 - \alpha) \check{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ можна використовувати для інтерполювання вільної межі на кожному часовому шарі, тільки якщо $0 \leq \alpha \leq 0.002$. Оскільки $\delta_3(0.7)/2 > \delta_i(0.7)$ і $\delta_4(0.7)/2 > \delta_i(0.7)$, де $i = \overline{1, 2, 5, 10}$, слід очікувати, що $|\tilde{\varepsilon}_i(0.002) - \varepsilon_i| < 0.1\%$, де $\tilde{\varepsilon}_i(0.002) = \sqrt{(\delta_i(0.002))^2 + (\varepsilon_i)^2}$ та $i = \overline{1, 2, 5, 10}$. У таблиці 1 представлені значення $\delta_i(0.002)$ та $\tilde{\varepsilon}_i(0.002)$, де $i = \overline{1, 10}$. З даних, які наведені в табл. 1, слідує, що, як і передбачалось, $|\tilde{\varepsilon}_i(0.002) - \varepsilon_i| < 0.1\%$, де $i = \overline{1, 10}$. Таким чином оскільки ніяких неузгодженостей не виникає у даному аналізі числових розв'язків, то $\tilde{\varepsilon}_i(0.002)$ можна використовувати у якості оцінки похибки методу числового розрахунку № i , де $i = \overline{1, 10}$.

Таблиця 2

Визначення значення параметра α , за якого $\tilde{\varepsilon}_i(\alpha) \approx \varepsilon_i$, де $i = \overline{3, 4}$

| α | $\delta_i^{(1,0)}$ (%) | $\delta_i^{(1,1)}$ (%) | $\tilde{\varepsilon}_3(\alpha)$ (%) | $\tilde{\varepsilon}_4(\alpha)$ (%) |
|----------|------------------------|------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 0.5 | 14.17 | 13.44 | 15.16 | 14.52 |
| 0.3 | 14.77 | 14.06 | 15.73 | 15.10 |
| 0.03 | 6.36 | 5.87 | 8.34 | 8.04 |
| 0.01 | 2.83 | 2.56 | 6.10 | 6.07 |
| 0.007 | 2.09 | 1.88 | 5.79 | 5.81 |
| 0.005 | 1.55 | 1.39 | 5.62 | 5.67 |
| 0.002 | 0.66 | 0.59 | 5.44 | 5.53 |

Сплайн $\varphi(y, 2, 0, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ є сильно локальним в околі точки E (див. рис. 1 (а)), у той час як в загальному випадку сплайн $\varphi(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ не є сильно локальним у цьому околі (див. зауваження 2). За розміщення вузлів інтерполювання в порядку зростання їх

ординат функції $\check{\varphi}(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ і $\check{\varphi}(y, 2, 0, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ співпадають відповідно з функціями $\varphi(y, 2, 1, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$ і $\varphi(y, 2, 0, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$. Тому з гіпотези № 3 слідує, що вірогідним поясненням того, що ми не можемо отримати кінцеві позиції фронту нагнітання щонайменше в п'яти з десяти розрахунків, які визначені в роботі [12, с. 174–175], за інтерполювання фронту нагнітання на кожному часовому шарі функцією $\check{\varphi}(y, 2, 0, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$, є те, що функція, графік якої є вільною поверхнею, є спотвореною в околі точки E . Згідно зауваження 1 це спотворення є ознакою того, що на деяких часових шарах виникає хаотичне розміщення вузлів криволінійної сітки.

Висновок. У цій роботі ми виконуємо аналіз результатів числових розрахунків кінцевих положень фронтів нагнітань згідно моделей цементації з вільними рухомими межами, використовуючи припущення, що невизначеність в кінцевому положенні фронту нагнітання, яка обумовлена невизначеністю у виборі методу інтерполювання вільної межі на кожному часовому шарі, можна знехтувати, оцінюючи похибку методу кожного такого розрахунку. Оскільки за цього аналізу не виникло ніяких суперечностей, то цей аналіз є числовою перевіркою даного припущення. Ймовірним поясненням того, що ми не можемо отримати кінцеві позиції фронту нагнітання щонайменше в п'яти з десяти розрахунків, які визначені в роботі [12, с. 174–175], за інтерполювання вільної межі на кожному часовому шарі функцією $\check{\varphi}(y, 2, 0, Y_0^{(n)}, F_0^{(n)})$, є виникнення хаотичного розміщення вузлів криволінійної сітки на деяких часових шарах в околі точки E .

Модифікація числового моделювання [9], представлена в роботі [12], призводить тільки до зменшення часу нагнітання на 3.3%. Тобто кінцеві положення фронтів нагнітань і їх похибки методу розрахунку, отримані в роботі [12], співпадають із відповідними положеннями та похибками, отриманими в роботі [9]. Континуальний підхід є більш загальним поняттям, ніж тип континуальної моделі. Тому, щоб можна було б стверджувати, що модифікувати числове моделювання [12] з метою забезпечення правомірності застосування континуальних моделей із вільними рухомими межами в ньому не потрібно, важливо показати, що континуальні моделі нагнітання цементного розчину в сухий ґрунт, які основані на рівнянні конвективної дисперсії та відповідають різним постановкам, стають моделями фазового поля [10, с. 57] за достатньо великого часу нагнітання. Часткове заповнення цементним розчином пор сухого ґрунту за його нагнітання в цей ґрунт можна моделювати як його розчинення у фіктивній невагомій рідині нульової в'яз-

кості, що насичувала цей ґрунт перед нагнітанням [9, с. 123]. Поширення цементного розчину в сухому ґрунті або в ґрунті, насиченому водою, можна моделювати задачею з вільною рухомою межею, коли відношення ширини зони переходу від ґрунту з максимальним значенням концентрації цементу в рідкій фазі до ґрунту з нульовим значенням цієї концентрації до відстані, пройденої фронтом нагнітання, стає малою величиною [17, с. 235]. У роботі [9, с. 123] наведено аргументи на користь того, що якщо порівнювати нагнітання цементного розчину в сухий ґрунт із його нагнітанням в насичений водою ґрунт за інших рівних умов, то це відношення стає малою величиною у випадку сухого ґрунту раніше ніж у випадку ґрунту, насиченого водою. Ми перевірили чисельно, що у випадках різних постановок континуальної моделі [11, с. 48–50] нагнітання цементного розчину в насичене водою ґрунтове пористе середовище, яка основана на рівнянні конвективної дисперсії, дане відношення зменшується з плином часу.

Список використаних джерел:

1. Arsena-hotel.com. Химические и биохимические породы. Часть 5 [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://arsena-hotel.com/gruntovedinie/karakteristika_porod/khimicheskie5/
2. Moretrench. Grouting methods, 2010 [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://www.moretrench.com/services_article.php?Grouting-Methods-Compensation-Grouting-www.Moretrench.com-52.
3. Bouchelaghem F. Mathematical and numerical filtration-advection-dispersion model of miscible grout propagation in saturated porous media / F. Bouchelaghem, L. Vulliet // *Int. J. for Num. and Analytical Methods in Geomechanics*, 2001. — Vol. 25, № 12. — P. 1195–1227.
4. Sharma M. M. Transport of particulate suspensions in porous media: model formulation / M. M. Sharma, Y. C. Yortsos // *American Institute of Chemical Engineers Journal*. — 1987. — Vol. 33, № 10. — P. 1636–1643.
5. Chupin O. The effects of filtration on the injection of cement-based grouts in sand columns / O. Chupin, N. Saiyouri, P.-Y. Hicher // *Transport in porous media*. — 2008. — Vol. 72, № 2. — P. 227–240.
6. Bouchelaghem F. Two large-scale injection experiments and assessment of the advection-dispersion-filtration model / F. Bouchelaghem // *Géotechnique*, 2002. — Vol. 52, № 9. — P. 667–682.
7. Chupin O. Modeling of a semi-real injection test in sand / O. Chupin, N. Saiyouri, P.-Y. Hicher // *Computers and Geotechnics*, 2009. — Vol. 36, Issue 6. — P. 1039–1048.
8. Warren C. Geotechnical aspects of the Strood and Higham railway tunnel relining and refurbishment [Електронний ресурс]: (Proceedings of the 10th Congress of the International Association for Engineering Geology and the Environment — Engineering geology for tomorrow's cities. «IAEG2006») / C. Warren, I. Tromans. Електронні дані. — London : The Geological Society of London, 2006. — Режим доступу: <http://www.iaeg.info/iaeg2006/start.htm>

9. Демчук М. Б. Про моделі промислового циркулярного нагнітання цементного розчину в сухий ґрунт / М. Б. Демчук // Штучний інтелект. — 2011. — № 2. — С. 122–130.
10. Няшина Н. Д. О возможности применения модели фазового поля для описания структуры фронта кристаллизации расплава / Н. Д. Няшина, П. В. Трусов // Математическое моделирование систем и процессов. — 1999. — № 7. — С. 57–66.
11. Демчук М. Б. Узгоджена модель нагнітання цементного розчину в насичене пористе середовище / М. Б. Демчук // Наукові записки НАУКМА. Серія комп'ютерні науки. — 2011. — Т. 125. — С. 46–51.
12. Демчук М. Б. Застосування континуального підходу в моделях промислової цементації ґрунтів / М. Б. Демчук // Математичні машини та системи. — 2013. — № 3. — С. 170–177.
13. Годунов С. К. О расчётах конформных отображений и построении разностных сеток / С. К. Годунов, Г. П. Прокопов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1967. — Т. 7, № 5. — С. 1031–1059.
14. Рябенский В. С. Введение в вычислительную математику / В. С. Рябенский. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2000. — 294 с.
15. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 630 с.
16. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок / Дж. Тейлор. — М. : Мир, 1985. — 272 с.
17. Bear J. Introduction to modeling of transport phenomena in porous media / J. Bear, Y. Bachmat // Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, 1990. — 553 p.

It is checked numerically that the uncertainty in the final injection front position due to uncertainty in the choice of the method of the injection front interpolation on every time layer can be neglected in the estimation of the truncation error of the calculation of this position in the framework of the real scale grouting model. Results of numerical experiments indicate that the curvilinear grid this calculation is performed on has chaotic dispositions of its nodes in space on some time layers.

Key words: *ground cementation, numerical analysis, two-dimensional models, finite difference method, chaos.*

Отримано: 18.09.2014