УДК 591.21

**Я. І. Єлейко,** д-р фіз.-мат. наук,
**М. Р. Звізло,** аспірант,
**О. А. Лебедєв,** аспірант
Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

# КОЛЕКТИВНЕ ЕКСПЕРТНЕ ОЦІНЮВАННЯ У ВИПАДКОВОМУ СЕРЕДОВИЩІ

У статті розглянуто основні проблеми теорії та практики колективного експертного оцінювання у випадковому середовищі, включаючи проблеми пов'язані з типовими станами колективних експертних обчислень: порядок розгляду експертів, прийняття рішень на основі оцінювання, визначення рівня довіри експертів. У статті показано приклад модифікації правила Борда та побудови моделі колективного експертного оцінювання у випадковому середовищі, що дозволяє приймати рішення у випадку відсутності інформації про ситуацію.

**Ключові слова:** *колективне експертне оцінювання, правило Борда, напівмарковські процеси, ергодична теорема.*

**1. Вступ.** Математичні методи і моделі широко використовуються в управлінні. Але є багато завдань, які важко розв'язати математичними методами через їхню якісну новизну чи техніко-математичну складність, тому виникає необхідність у використанні колективних експертних оцінювань. Колективні експертні оцінки широко використовуються в соціально-політичних, науково-технічних, медичних, соціальних та економічних програмах. Використання експертних оцінювань потребує використання досвіду та навиків фахівців (спеціалістів) у відпорних сферах використання, знайомих з перспективами розвитку.

Деякі дані, що характеризують систему можуть бути виміряні чи обчислені, проте є фактори, які є суб'єктивними. Вивчення даних факторів потребує залучення експертів. Основним завдання при експертних оцінках є представлення обробка тверджень експертів , вчених, спеціалістів, які об'єднують різну суб'єктивну інформацію в ціле, та отримання кількісної оцінки для вибору обґрунтованих рішень.

Розглядається метод колективного експертного оцінювання зі зміною зовнішнього середовища, що використовує диференціювання експертів(визначення рівня довіри до експертів).

**2. Правило Борда та його модифікація.** Метод Борда достатньо простий, і тому часто використовується на практиці.

Розташування альтернатив у порядку зростання (спадання) якоїсь властивості називатимемо ранжуванням, а метод обробки таких анкет методом ранжування.

 

Узагальнена думка експертів за правилом Борда визначається наступним чином. Для кожної з альтернатив встановлюють суму рангів $S_j = \sum_{i=1}^{m} R_{ij}$, де $R_{ij}$ — ранг, присвоєний $j$-й альтернативі $i$-м експертом. Впорядкована послідовність рангів відображає узагальнену думку експертів, найкраща альтернатива матиме найменший (найбільший) ранг.

Для модифікації правила Борда пропонується ввести коефіцієнт надійності експертів. Даний коефіцієнт визначатимемо з рівня довіри до експерта та його самооцінки в питанні вирішення поставленого завдання. $PE_i = \frac{1}{2}\left((K_З^i + K_А^i)/2 + K_Д^i\right)$, де для $i$-го експерта, $K_З^i$ — коефіцієнт ступеня знайомства з проблемою, $K_А^i$ — коефіцієнт аргументованості думок, $K_Д^i$ — коефіцієнт довіри до прийнятих рішень. $0 \le K_З^i \le 1$; $0 \le K_А^i \le 1$; $0 \le K_Д^i \le 1$. Тому, справедливе наступне обмеження $0 \le PE_i \le 1$. Очевидно, що, якщо $PE_i = 0$ то $i$-го експерта виключають з експертної групи.

На практиці, для розрахунку коефіцієнтів довіри. проводять анкетування експертів.

Модифікована сума рангів матиме вигляд $S_j = \sum_{i=1}^{m} PE_i R_{ij}$, більше метод не піддаємо змінам. Для оцінки експертної групи в цілому обчислимо коефіцієнти середньої самооцінки та довіри, $\overline{K_C} = \frac{1}{2m}\sum_{i-1}^{m}(K_З^i + K_А^i)$, $\overline{K_Д} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} K_Д^i$, відповідно $\overline{PE} = \frac{1}{2}(\overline{K_C} + \overline{K_Д})$. При значеннях коефіцієнтів близьких до одиниці можна вважати що експертна група підібрана правильно.

Відомо, що довільна процедура побудови групового вибору повинна задовольняти умову Паретто

$$\bigcap_{i=1}^{m} RE_i \subseteq RE \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} RE_i ,$$

де $RE = F(RE_1, ..., F_m)$ — узгоджене групове ранжування, що є функцією індивідуальних експертних ранжувань.

Кеннетом Ерроу сформульовано п’ять аксіом для побудови ефективного та справедливого групового вибору (умова універсальності, умова монотонності, умова незалежності незв'язаних альтернатив, умова суверенності членів групи, умова відсутності диктатора ).

Також, Кеннетом Ерроу було сформульовано та доведено теорему «Про неможливість», в якій дані 5 аксіом є несумісними.

Модифіковане правило Борда задовольняє умови універсальності та суверенності членів експертної групи. Оцінку узгодженості групи можна провести використавши коефіцієнта конкордації.

**3. Методи побудови групових ранжувань у випадковому середовищі.** Переважно рішення експертної групи приймається не один раз і при різних умовах. Інколи потрібно приймати рішення коли не існує відомостей про ситуацію у за якої потрібно буде приймати рішення, або при їх недостатній кількості. Проте відомі чинники чи умови функціонування системи. Сукупність значень цих умов називатимемо «ситуацією».

Нехай $A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ — певна скінченна множина ситуацій, за якої вирішується проблема. Нехай с утворює повну групу подій.

Проведемо опис зміни ситуацій за допомогою ланцюгів Маркова. Тоді $A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ — множина станів ланцюга маркова.

Ланцюгом маркова в $A$ називатимемо функцію $x(t)$ із значеннями з $A$, які визначені для всіх $t \geq 0\,(t = 0,1,2,...)$, якщо для неї існує $p(x,t,y,s)$, $0 \leq t \leq s$, $x, y \in A$, що для $t_1 < t_2 < ... < t_n$ і довільних станів

$$A_1, A_2, ..., A_n \;\; P\left(\bigcap_{k=1)}^{n} \{x(t_k) = A_k\}\right) = P\{x(t_k) = A_k\}\prod_{k=1}^{n-1} p(A_k, t_k, A_{k+1}, t_{k+1}),$$

звідки випливає, що

$$P\{x(t_n) = A_n / x(t_1), ..., x(t_{n-1})\} = p(x(t_{n-1}), t_{n-1}, A_n, t_{nn}) = P\{x(t_n) = A_n / x(t_{n-1})\}.$$

Отже, розглядатимемо стаціонарний розподіл станів $A_1, A_2, ..., A_n$ ланцюга Маркова $\{q_x\}$. Кожен Експерт $E_i$, $i = 1,2,...,m$ будує свої індивідуальні ранжувальні альтернативи $a_1, a_2, ..., a_p$ для кожної ситуації $A_j$ – стану ланцюга Маркова.

Для кожної з альтернатив встановлюється сума рангів $\tilde{S}_j = \sum_{i=1}^{m} PE_i(j) R_{ij}$, де $R_{ij}$ — ранг, присвоєний $j$-й альтернативі $i$-м експертом. $PE_i(j)$ — коефіцієнт надійності $i$-го експерта в ситуації $A_j$. Зауважимо, що для кожного стану $A_j$ існує відповідний набір коефіцієнтів довіри до експертів $PE_1(j), PE_2(j), ..., PE_p(j)$.

Сформулюємо ергодичну теорему.

**Теорема**(про середньочасове значення) Нехай $A$ утворює один рекурентний додатній клас із стаціонарним розподілом $\{q_x\}$, а функція $f(x)$ на $A$ задовольняє умову $\sum_x q_x \mid f(x) \mid < \infty$, тоді з імовірністю 1

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-1} f(x(t)) = \sum_y q_y f(y).$$

Нехай $r_i^j$ — ранг $j$-ї альтернативи $a_j$ при груповому ранжуванні в ситуації $A_i$. $1 \le r_i^j \le p$ а $0 \le q_i \le 1$ так, як $\{q_x\}$ — стаціонарний розподіл станів ланцюга Маркова. Отже виконуються умови попередньої теореми тоді виконується рівність

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-1} r_{x(t)}^j = \sum_y q_y r_y^j.$$

Розглянемо значення $SR_j = \sum_i r_i^j q_i$ для всіх альтернатив $a_j$. Впорядкувавши альтернативи за значеннями $SR_j$ отримаємо ранжування. Побудоване впорядкування альтернатив називатимемо середньочасовим груповим ранжуванням. Альтернативу з значенням рангу рівним 1 в цьому середньочасовому ранжуванні, можна вважати найкращою для вирішення поставленої проблеми тоді, коли немає відомостей про ситуацію , за якої приймається рішення, чи їх недостатньої кількості для повного опису ситуації.

Нагадаємо вимоги до методів прогнозування та довготермінового планування:

- необхідність отримання чітких альтернатив,призначених для розгляду та прийняття рішення;
- можливість встановлення логічних відношень між етапами рівнями рішень альтернатив;
- можливість кількісної оцінки різних варіантів альтернатив для їх порівняння та вибору.

Отже, середньочасове групове ранжування задовольняє попередні вимоги, тому воно може бути використане при прогнозуванні та довготерміновому планування.

Недоліком є випадок коли $SR_h = RS_s, h \ne j$ і дане значення $SR_h$ найменше значення серед $SR_j, j = 1,2,...,p$. Виходить, що дві альтернативи претендують бути найкращими для вирішення проблеми. Прикладом вирішення проблеми може бупи пошук коефіцієнтів варіації для вибірок рангів $r^h, r^s$. $E(r^h) = SR_h$, $\sigma = \sqrt{E(r^h - E(r^h))^2}$ тоді $V(r^h) = \dfrac{\sigma(r^h)}{E(r^h)} \cdot 100\%$. Слід відмітити, що дисперсія не дає повної картини можливих значень випадкової величини від середнього. Природно вибрати альтернативу з меншим коефіцієнтом варіації.

Дане середньо часове ранжування можна зробити більш чутливим до індивідуальних ранжувань представивши у вигляді $SR_j = \sum_i \tilde{S}_j q_i$ .

Розглянемо випадок коли процес прийняття рішень будується на основі напівмарківського процесу. Даний процес реалістичніше описує зміну ситуацій так, як час перебування в ситуації може бути розподілений за довільним розподілом.

При побудові середньочасового групового ранжування використовуватимемо наступну ергодичну теорему.

**Теорема.** Нехай $x(t)$ — напівмарківський процес з неперервним часом для якого вкладений ланцюг Маркова є нерозкладним і існують моменти $M_i\tau < \infty$ . Тоді з імовірністю 1

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(u(t))du = \frac{\sum_i p_i f(i) M_i\tau}{\sum_i p_i M_i\tau}.$$

Аналогічно знаходимо суму рангів $\tilde{S}_j = \sum PE_i(x(t))R_{ij}(x(t))$ , де $R_{ij}$ — ранг присвоєний $j$ -й альтернативі $i$ -м експертом, $PE_i(x(t))$ — коефіцієнт довіри до $i$ -го експерта. На основі попередньої теореми будується середньочасове групове ранжування аналогічне як і у випадку з ланцюгом Маркова.

**4. Висновки.** В зв'язку з широким використанням колективних експертних оцінювань є необхідність у видозміненні та покращенні методів аналізу тверджень експертів для отримання розв'язку проблеми. Наступним важливим кроком є розгляд експертних оцінювань у випадковому середовищі, що дозволяє оцінювати більш складні моделі. Зміна зовнішніх факторів дозволяє оцінити ефективність моделі.

Важливим кроком в оцінюванні є вибір групи експертів і їхня диференціація так, як експерти володіють різними досвідом вирішенні поставленої задачі, інтуїцією, відчуттям перспективи проблеми.

Імовірнісний підхід а точніше підхід з використанням теорії випадкових процесів при колективних експертних оцінюваннях слабо вивчений, тому потребує детальнішого вивчення.

## Список використаних джерел:

1. Бешелев С. Д. Математико-статистические методы экспертных оценок / С. Д. Бешелев, Ф. Г. Гуревич. — М. : Статистика, 1980. — 263 с.

2. Бешелев С. Д. Экспертные оценки / С. Д. Бешелев, Ф. Г. Гуревич. — М. : Наука, 1973. — 163 с.
3. Гохман О. Г. Экспертное оценивание : учебное издание / О. Г. Гохман. — Воронеж : Издательство ВГУ, 1991. — 153 с.
4. Гихман И. И. Теория случайных процессов : в 3-х томах / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — М. : Наука, 1971. — Т. 1. — 666 с.; 1973. — Т. 2. — 630 с.; 1975. — Т. 3. — 496 с.
5. Єлейко Я. І. Колективне експертне оцінювання у випадковому середовищі / Я. І. Єлейко, М. Р. Звізло // Алгебра, аналіз, стохастика АТАС-2012.
6. Кололюк В. С. Полумарковские процессы и их приложения / В. С. Королюк, А. Ф.Турбин. — К. : Наукова думка, 1976. — 184 с.

The article deals with the main problems of the theory and practice of collective expert evaluations in a random environment including issues related to the typical stages of collective expert evaluations: the order of the survey of experts, decision making on the basis of the assessments, determining the level of trust to experts. In this article it is shown the example of Borda rule modification and the build of a model of collective expert evaluations in a random environment, which will allow make decisions in the absence of information about the situation.

**Key words:** *collective expert evaluations, Bord rule, semi-Markov process, ergodic theorem.*

Отримано: 11.09.2014

УДК 519.718;519.21

**А. М. Калинюк*,** канд. фіз.-мат. наук,
**Т. О. Лукашів**,** канд. фіз.-мат. наук

* Подільський державний аграрно-технічний університет, м. Кам’янець-Подільський,
** Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

## ПРО СТОХАСТИЧНУ СТІЙКІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ІТО З ЗАГАЮВАННЯМИ

Одержано достатні умови асимптотичної рівномірно-стохастичної стійкості тривіального розв’язку задачі Коші для стохастичного диференціально-різницевого рівняння Іто з багатьма сталими загаюваннями.

**Ключові слова:** *стохастичне диференціально-різницеве рівняння, рівномірно-стохастична стійкість.*

**Вступ.** Питання асимптотичної рівномірно-стохастичної стійкості вивчено у монографії Скорохода А. В., Гіхмана Й. І. [2]. Для стохастичних диференціально-функціональних рівнянь це питання ви-