УДК 519.21

А. М. Калинюк*, канд. фіз.-мат. наук,
Т. О. Лукашів,** канд. фіз.-мат. наук,
В. К. Ясинський,** д-р фіз.-мат. наук, професор

* Подільський державний аграрно-технічний університет,
м. Кам'янець-Подільський,
** Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

КРИТЕРІЙ АБСОЛЮТНОЇ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФУЗІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ З ЗОВНІШНІМИ ЗБУРЕННЯМИ

Одержано достатні умови абсолютної стійкості розв'язків стохастичних динамічних систем автоматичного регулювання із зовнішніми випадковими збуреннями, які мають довільні закони розподілу.

Ключові слова: *стохастична динамічна система автоматичного регулювання, зовнішні збурення, абсолютна стійкість.*

Вступ. У праці [1] досліджуються звичайні диференціальні рівняння на абсолютну стійкість, а саме: за допомогою другого методу Ляпунова одержано достатні умови абсолютної стійкості розв'язку звичайного диференціального рівняння. У монографії [3] розглянуто абсолютну стійкість у середньому квадратичному розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь (СДР) за допомогою стохастичних функцій Ляпунова у вигляді нерівності, яка містить коефіцієнти рівнянь, що розглядаються. Це дає можливість на практиці виділити клас СДР, які гарантують стійке функціонування реальних об'єктів, що описуються цими рівняннями з урахуванням внутрішніх вінерових процесів. Але у реальних ситуаціях на об'єкти діють ще зовнішні випадкові збурення іншої природи (випадкові величини із законами розподілу, відмінними від нормального). Дана праця якраз присвячена дослідженню такого класу СДР: одержано достатні умови абсолютної стійкості за О. М. Ляпуновим розв'язків стохастичних дифузійних диференціальних рівнянь, які перебувають під дією зовнішніх випадкових збурень.

Постановка задачі. На ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \ge t_0 \ge 0\}, T)$ випадковий процес $x(t) \equiv x(t,\omega)$: $[0,T] \times \Omega \to R^n$ є розв'язком нелінійного дифузійного стохастичного рівняння автоматичного регулювання (НДСРАР) [2]

$$dx(t) = [f_1(\xi_1(\omega))Ax(t) + g\varphi(\sigma)]dt + f_2(\xi_2(\omega))Bx(t)dw(t) \qquad (1)$$

за початковими умовами

$$x(t_0) = x_0 \in R^n. \qquad (2)$$

Тут $\sigma = l^T x(t)$, $t \geq 0$, $\varphi(\cdot)$ — нелінійна диференційовна функція за умови

$$(k\sigma - \varphi(\sigma))\varphi(\sigma) > 0, k > 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(\sigma) \geq 0, \qquad (3)$$

тобто $\varphi(\sigma)$ знаходяться між прямими

$$\varphi(\sigma) = 0;\ \varphi(\sigma) = k\sigma,$$

$$g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)^T \in R^n; \quad l = (l_1, l_2, \ldots, l_n)^T \in R^n; \qquad (4)$$

$\xi_i(\omega) \in \mathbb{R}^1$, i = 1, 2 — відомі випадкові величини з законами розподілу $F_{\xi_i}(x) \equiv \mathbb{P}\{\omega : \xi_i(\omega) < x, x \in \mathbb{R}^1\}$, $f_i(\cdot)$, i = 1, 2, — берівські неперервні функції; $A \equiv \{a_{ij}\} \subset \mathbb{R}^1$, $B \equiv \{b_{ij}\} \subset \mathbb{R}^1$ — сталі дійсні матриці розмірності $n \times n$.

Основний результат. Нехай «вихідна система» автоматичного регулювання [3]

$$dx(t) = [E\{f_1(\omega)\}Ax(t) + g\varphi(\sigma)]dt, \qquad (5)$$

має один стан рівноваги, причому A та $A + kgl^T$ — гурвіцеві матриці.

Розглянемо стохастичний функціонал Ляпунова-Красовського [3]

$$v(x) = x^T Hx + \int_0^{\sigma(x)} \varphi(y)dy, \qquad (6)$$

де H — симетрична додатно визначена матриця є розв'язком матричних рівнянь Сільвестра [1]

$$E\{f_1(\xi_1(\omega))\}(A^T H + HA) + E\{f_2^2(\xi_2(\omega))\}BHB = -I \qquad (7)$$

з одиничною матрицею I .

Для $v(x)$ вірна нерівність [1]

$$\lambda_{\min}(\tilde{H}) | x |^2 \leq v(x) \leq \lambda_{max}(\tilde{H}) | x |^2, \qquad (8)$$

де

$$\lambda_{\min}(\tilde{H}) = \begin{cases} \lambda_{\min}(H + 2^{-1}\chi ll^T) \text{ для } \chi \leq 0, \\ \lambda_{\min}(H) \text{ для } \chi > 0; \end{cases} \qquad (9)$$

$$\lambda_{\max}(\tilde{H}) = \begin{cases} \lambda_{\max}(H + 2^{-1}\chi ll^T) \text{ для } \chi > 0, \\ \lambda_{\max}(H) \text{ для } \chi \leq 0. \end{cases} \qquad (10)$$

За заміною Іто [2] стохастичний диференціал функціонала ($dv(x)$, див (5)) на розв'язках НДСРАР (1), (2) має вигляд

$$dv(x) = dx^T(t)Hx(t)dt + x^T(t)Hdx(t) + f_2^2(\xi_2(\omega))x^T(t)$$

$$B^T HBx(t)dt + \chi d\int_0^{\sigma(x)}\varphi(y)dy =$$

$$= x^T(t)[f_1(\xi_1(\omega))(A^T H + HA) + f_2(\xi_2(\omega))B^T HB]x(t) +$$

$$+\chi d\{\int_0^{\sigma(x)}\varphi(y)dy\} = x^T(t)[f_1(\xi_1(\omega))(A^T H + HA) + f_2^2(\xi_2(\omega))]x(t)dt +$$

$$+[\varphi(\sigma)g^T Hx(t) + x^T(t)Hg\varphi(\sigma)]dt + \chi[\varphi(\sigma)f_1(\xi_1(\sigma))l^T Ax(t) + \varphi(\sigma)l^T g\varphi(\sigma)]dt +$$

$$+\frac{1}{2}\chi\dot{\varphi}(\sigma)(f_2(\xi_2(\omega))l^T Bx(t))^2 dt + [x^T(t)f_2(\xi_2(\omega))(B^T H + HB)x(t) +$$

$$+\chi\dot{\varphi}(\sigma)f_2(\xi_2(\omega))l^T Bx(t)]dw(t). \qquad (11)$$

За означенням стохастичного диференціала рівність (11) слід розуміти як інтегральне перетворення, бо $\dfrac{dw(t,\omega)}{dt}$ не існує з ймовірністю 1 [2].

Надалі обчислимо математичне сподівання зліва і справа відповідної інтегральної рівності (11), врахувавши рівність нулю від інтеграла Вінера-Іто [2] для $\forall t \in [0,T]$:

$$E\left\{\int_0^t \Phi(t,\omega)dw(t,\omega)\right\} = 0 \cdot$$

В результаті одержимо для диференціала рівність

$$E\left\{\frac{dv}{dt}\bigg|_1\right\} = E\{x^T(t)[f_1(\xi_1(\omega))(A^T H + HA) + f_2^2(\xi_2(\omega))]x(t) +$$

$$+\varphi(\sigma)[g^T H + \chi f_1(\xi_1(\omega))l^T A]x(t) + \qquad (12)$$

$$+x^T(t)Hg\varphi(\sigma) + \frac{1}{2}\chi\dot{\varphi}(\sigma)f_2^2(\xi_2(\omega))x^T(t)B^T ll^T Bx(t)\}.$$

За умови (3) матимемо

$$l^T x(t)\varphi(\sigma) - \frac{\varphi^2(\sigma)}{k} > 0,$$

тоді рівність (12) перетвориться у нерівність

$$E\left\{\frac{dv}{dt}\bigg|_1\right\} \le E\left\{\frac{dv}{dt}\bigg|_1\right\} + E\left\{l^T x(t)\varphi(\sigma) - \frac{\varphi^2(\sigma)}{k}\right\} =$$

$$= E\{x^T(t)[f_1(\xi_1(\omega))(A^T H + HA) + f_2^2(\xi_2(\omega))B^T HB]x(t)\} +$$

$$+E\{\varphi^T(\sigma)[g^T H + \frac{1}{2}\chi f_1(\xi_1(\omega))l^T A + \frac{1}{2}l^T]x(t)\} +$$

$$+E\{\varphi(\sigma)[Hg+\frac{1}{2}\chi f_1(\xi_1(\omega))A^T l+\frac{1}{2}l]x^T(t)\}+$$

$$+E\{\varphi^T(\sigma)[\chi l^T g-\frac{1}{k}]\varphi(\sigma)+\frac{1}{2}\chi f_2^2(\xi_2(\omega))\dot{\varphi}(\sigma)x^T(t)B^T ll^T Bx(t)\}.$$

Останню нерівність можна записати у векторно-матричній формі [1], а саме

$$E\left\{\left.\frac{dv(x,\sigma)}{dt}\right|_1\right\}\le E\{\tilde{x}^T(t)\tilde{C}\tilde{x}(t)\}, \tag{13}$$

де $\tilde{x}^T(t)\equiv(x(t)\varphi,\sqrt{\dot{\varphi}}x^T(t))$,

$$\tilde{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12}^T & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \tag{14}$$

з відповідно визначеними елементами

$$c_{11}=f_1(\xi_1)[A^T H+HA]+f_2^2(\xi_2)B^T HB;$$

$$c_{21}=c_{12}^T=Hg+\frac{1}{2}\gamma f_1(\xi_1)A^T l+\frac{1}{2}l;$$

$$c_{13}=c_{31}=0,\quad c_{23}=c_{32}=0,$$

$$c_{22}=\frac{1}{k}-\chi l^T g,\ c_{33}=\frac{1}{2}\chi f_2^2(\xi_2)B^T ll^T B.$$

Математичне сподівання (13) від'ємне на розв'язках $x(t)\equiv x(t,\omega)$ системи (1) тоді і тільки тоді, коли симетрична матриця

$$E\{f_1(\xi_1(\omega))(A^T H+HA)\}+E\{f_2^2(\xi_2(\omega))\}B^T HB \tag{15}$$

від'ємно визначена, а блочна симетрична матриця $\tilde{C}$ недодатно визначена [1].

Позначатимемо надалі $\tilde{C}\le 0$.

Матриця (15) від'ємно визначена тоді і тільки тоді, коли матриця H є розв'язком матричного рівняння Сільвестра (7), у якому існують природньо математичні сподівання

$$0\le E\{f_1(\xi_1(\omega))\}\le K_1<\infty,\quad 0\le E\{f_2^2(\xi_2(\omega))\}\le K_2<\infty. \tag{16}$$

Матриця $\tilde{C}$ (14) недодатно визначена лише у випадку недодатної визначеності матриць-блоків, що стоять на її головній діагоналі, а саме: матриця $\frac{1}{2}\chi E\{f_2^2(\xi_2(\omega))\}(B^T ll^T B$ недодатно визначена тоді і тільки тоді, коли число $\chi<0$, число $\chi l^T g-\frac{1}{k}<0$, що еквівалентно умові

$$l^T g > 0. \qquad (17)$$

Отже, для недодатно визначеної блочної матриці $\tilde{C}$ (14) за умови $\chi < 0$, (7) та (17) вимагається також недодатна визначеність такої матриці

$$\tilde{C}_1 \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} -I & Hg + \frac{1}{2}\chi E\{f_1(\xi_1(\omega))\}A^T l + \frac{1}{2} l \\ (Hg + \frac{1}{2}\chi E\{f_1(\xi_1(\omega))\}A^T l + \frac{1}{2} l)^T & \chi l^T g - \frac{1}{k} \end{bmatrix} \le \qquad (18)$$

$$\le 0_{(n+1)\times(n+1)}.$$

Вимога (17) означає гурвіцевість матриці $E\{f_1(\xi_1(\omega))\}A + kgl^T$, що характеризує експоненціальну стійкість матриці А [1].

Запишемо умову додатної визначеності функціонала Ляпунова-Красовського (6) на лінійній характеристиці гурвіцевого кута $\varphi(\sigma) = k\sigma$:

$$v|_{\varphi(\varphi)=\sigma} = x^T Hx + \chi \int_0^{\sigma} kydy =$$
$$= x^T Hx + \frac{1}{2}\chi ky^2 |_{y=0}^{y=l^T x^2} = x^T (H + \frac{1}{2}\chi ll^T)x > 0. \qquad (19)$$

Звідси випливає додатна визначеність матриці

$$H + \frac{1}{2}\chi kll^T > 0_{(n+1)\times(n+1)}.$$

Домножимо цю нерівність зліва на l^T, а справа на l, одержимо еквівалентну нерівність

$$l^T Hl + \frac{1}{2}\chi k(l^T l)^2 > 0,$$

звідки

$$-\frac{2l^T Hl}{k(l^T l)^2} < \chi < 0. \qquad (20)$$

Отже, умова від'ємної визначеності математичного сподівання вимагає:

1) від'ємну визначеність матриці

$$E\{f_1(\xi_1(\omega))\}[A^T H + HA] + E\{f_2^2(\xi_2(\omega))\}B^T HB < 0$$

(умова (7)) та виконання нерівності

$$\det \tilde{C}_1 < 0.$$

Розкриємо цей визначник за останнім стовпчиком:

$$[Hq + \frac{1}{2}(\chi E\{f_1(\xi_1(\omega))\}A^T l + I)l]^T$$
$$[E\{f_1(\xi_1(\omega))\}(A^T H + HA) + E\{f_2^2(\xi_2(\omega))\}B^T HB]^{-1} \times \tag{21}$$
$$\times [Hq + \frac{1}{2}(\chi E\{f_1(\xi_1(\omega))\}l + I)l] < \chi l^T g - \frac{1}{k}.$$

Одержимо таке

Твердження. Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq t_0 \geq 0\}, \mathbb{P})$ задана НДСРАР (1), (2). Тоді положення рівноваги $x(t) \equiv x(t,\omega) = 0$ системи (1), (2) абсолютно стійке у середньому квадратичному, якщо виконуються умови:

1) матриця $\mathbb{E}\{f_1(\xi_1(\omega))\}A + \mathbb{E}\{f_1(\xi_1(\omega))\}kge^T$ гурвіцева; $l^T g > 0$;
2) існує додатно визначений розв'язок H матричного рівняння (7)
$$K_1 > \mathbb{E}\{f_1(\xi_1(\omega))\} > 0;$$
3) виконується матрична нерівність (18) з вибором $\chi < 0$ за умови (20);
4) виконується нерівність (21) з (16).

Зауваження 2. Відомий факт [3]. Нехай існує $v(x,t) \in C(\mathbb{D})$, де $\mathbb{D} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, t \geq t_0 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} |x_i| < M, M > 0 \right\}$, яка задовольняє умови

а)
$$F_1(|x|) \leq v(x,t) \leq F_2(|x|); \tag{22}$$

в)
$$\frac{dv(x,t)}{dt} \leq -F_3(|x|), \tag{23}$$

де

$$F_i(z) \in C([0,+\infty)),\ F_i(0) = 0,\ \lim_{z \to +\infty} F_i(z) = \infty,\ i = \overline{1,3}. \tag{24}$$

Тоді: I) тривіальний розв'язок системи (4) асимптотично стійкий за Ляпуновим.

II)
$$|x| \leq F_1^{-1}[S^{-1}((t-t_0), v(x(t_0), t_0))]. \tag{25}$$

Твердження (25) для НДСРАР (1), (2) набуде вигляду

$$|x(t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\tilde{H})}{\lambda_{\min}(\tilde{H})}}\, |x(t_0)|\, e^{-\frac{\lambda_{\max}(\tilde{H})}{\lambda_{\min}(\tilde{H})}(t-t_0)}.$$

У нерівності (25) S визначено таким чином [3]:

$$S(v, v_0) \equiv \int_{t_0}^{t} \frac{dv}{F_3[F_2^{-1}(v)]} \leq -(t-t_0).$$

Перевірка умов 1)–4) твердження ефективна при застосуванні сучасних комп'ютерних технологій.

Висновки. Одержано достатні умови абсолютної стійкості за довільними початковими умовами розв'язків систем дифузійних (рівнянь Іто) стохастичних динамічних рівнянь автоматичного регулювання з зовнішніми випадковими збуреннями з довільними законами розподілу. Перевірка цих умов ефективна при застосуванні сучасних комп'ютерних технологій.

Список використаних джерел:

1. Айзерман М. А. Абсолютная устойчивость регулируемых систем / М. А. Айзерман, Ф.Р. Гантмахер. — М. : Изд-во АН СССР, 1963. — 159 с.
2. Гихман Н. Н. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения / Н. Н. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наукова думка, 1982. — 612 с.
3. Ясинський В. К. Стабілізація у динамічних системах випадкової структури / В. К. Ясинський, Є. В. Ясинський, І. В. Юрченко. — Чернівці : Золоті литаври, 2011. — 738 с.

Obtain sufficient conditions for the absolute stability of solutions of stochastic dynamical systems of automatic control with external random disturbances that have random distribution laws.

Key words: *stochastic dynamic system automatic control, external disturbance, the absolute stand-bone.*

Отримано: 10.04.2015