УДК 517.97

С. М. Бак, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

ІСНУВАННЯ НАДЗВУКОВИХ ПЕРІОДИЧНИХ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ В СИСТЕМІ НЕЛІНІЙНО ЗВ'ЯЗАНИХ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Стаття присвячена вивченню нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь, яка описує нескінченну систему нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці. Одержано результат про існування надзвукових періодичних біжучих хвиль для таких систем.

Ключові слова: *нелінійні осцилятори, двовимірна ґратка, надзвукові періодичні біжучі хвилі, критичні точки, теорема про гірський перевал.*

Вступ. У цій статті вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній ґратці. Передбачається, що кожний осцилятор нелінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\begin{gathered}\ddot{q}_{n,\,m} = U'\left(q_{n+1,\,m} - q_{n,\,m}\right) - U'\left(q_{n,\,m} - q_{n-1,\,m}\right) + \\ + U'\left(q_{n,\,m+1} - q_{n,\,m}\right) - U'\left(q_{n,\,m} - q_{n,\,m-1}\right) - V'\left(q_{n,\,m}\right),\ \left(n,\,m\right) \in \mathbb{Z}^2,\end{gathered} \tag{1}$$

де $q_{n,\,m}(t)$ — узагальнена координата $(n,\,m)$-го осцилятора в момент часу t, потенціали $U,\,V \in C^1(\mathbb{R})$. Рівняння (1) представляє собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь, причому при $V(r) \equiv 0$ (1) є двовимірним аналогом системи Фермі-Пасти-Улама, а при $V(r) = K(1-\cos r)$ — дискретним рівнянням sin-Ґордона на двовимірній ґратці.

Серед розв'язків таких систем особливої уваги заслуговують біжучі хвилі. Досить детальні результати про біжучі хвилі в ланцюгах Фермі-Пасти-Улама можна знайти в працях О. Панкова, зокрема, в [11] найбільш повний огляд результатів. В статті [3] одержано умови існування періодичних біжучих хвиль в ланцюгах Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. В той же час для ланцюгів осциляторів відомі декілька праць, зокрема, [9], результати якої отримано методами теорії біфуркацій, а також [1; 6], в яких отримано умови існування періодичних та відокремлених біжучих хвиль за допомогою методу критичних точок. В статтях [2; 7; 8] вивчались біжучі хвилі для систем лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірних ґратках. Зокрема, в [7] розглядалась система із непарною 2π -періодичною нелінійністю. А в [8] взагалі розглядалися лінійні осцилятори. В статті [2] одержано умови існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль. В статті [4] одержано результат про існування періодичних біжучих хвиль для дискретного рівняння sin-Ґордона на двовимірній ґратці. А в статті [5] одержано результат про існування дозвукових періодичних біжучих хвиль для нескінченної системи нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці.

Метою статті є одержання умов існування надзвукових періодичних біжучих хвиль для нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь, яка описує нескінченну систему нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці.

Постановка задачі. Зазначимо, що біжуча хвиля у цьому випадку має вигляд $q_{n,\,m}\left(t\right)=u\left(n\cos\varphi+m\sin\varphi-ct\right)$ і для її профілю $u\left(s\right)$, де $s=n\cos\varphi+m\sin\varphi-ct$, рівняння (1) набуде вигляду

$$\begin{aligned} c^2u''(s)&=U'(u(s+\cos\varphi)-u(s))-U'(u(s)-u(s-\cos\varphi))+\\ &+U'(u(s+\sin\varphi)-u(s))-U'(u(s)-u(s-\sin\varphi))-V'\left(u\left(s\right)\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Нас цікавить випадок періодичних біжучих хвиль, профіль яких задовольняє умову

$$u\left(s+2k\right)=u\left(s\right),\ s\in\mathbb{R},\ k>0. \tag{3}$$

Всюди далі під розв'язком рівняння (2) розуміється функція $u(s)$ класу $C^2(\mathbb{R}),$ яка задовольняє рівняння (2) для всіх $s\in\mathbb{R}.$

Варіаційне формулювання задачі. Позначимо через E_k гільбертів простір $E_k=\left\{u\in H^1_{loc}\left(\mathbb{R}\right):u\left(s+2k\right)=u\left(s\right)\right\}$ зі скалярним добутком $\left(u,\,v\right)_k=\int\limits_{-k}^{k}\left(u\left(s\right)v\left(s\right)+u'\left(s\right)v'\left(s\right)\right)ds$.

На просторі E_k означимо оператори

$$\left(Au\right)\left(s\right):=u\left(s+\cos\varphi\right)-u\left(s\right)=\int\limits_{s}^{s+\cos\varphi}u'\left(\tau\right)d\tau,$$

$$\left(Bu\right)\left(s\right):=u\left(s+\sin\varphi\right)-u\left(s\right)=\int\limits_{s}^{s+\sin\varphi}u'\left(\tau\right)d\tau.$$

Тоді правильне таке твердження (див. [3, с. 77]).

Лема 1. Оператори A та B є обмеженими лінійними операторами, що задовольняють нерівності

$$\|Au\|_{L^2(-k,\,k)} \le |\cos\varphi| \cdot \|u'\|_{L^2(-k,\,k)}, \quad \|Bu\|_{L^2(-k,\,k)} \le |\sin\varphi| \cdot \|u'\|_{L^2(-k,\,k)}.$$

Всюди далі розглядаються потенціали $U(r)$ і $V(r)$ вигляду:

(i) $U(r) = \dfrac{c_0^2}{2} r^2 + f(r)$, $V(r) = -\dfrac{a^2}{2} r^2 + g(r)$, де $c_0 \ge 0$, $a > 0$.

Крім того, припускається, що неквадратична частина кожного з цих потенціалів $h \in \{f;\, g\}$ задовольняє умови:

(ii) $h(0) = h'(0) = 0$ і $h'(r) = o(r)$ при $r \to 0$;

(iii) існує $\mu > 2$ таке, що $0 \le \mu h(r) \le r h'(r)$.

Неважко переконатися в тому, що з цих умов випливає існування сталих $d > 0$ і $d_0 \ge 0$ таких, що

$$h(r) \ge d\,|r|^{\mu} - d_0. \tag{4}$$

Лема 2. В зроблених припущеннях існує така неперервна монотонно зростаюча функція $\sigma(r)$, $r \ge 0$, що $\sigma(0) = 0$, $\lim\limits_{r\to\infty} \sigma(r) = +\infty$ і

$$h'(r)\, r \le \sigma(|r|)\, r^2. \tag{5}$$

Доведення. Покладемо $\sigma(r) = \sup\limits_{|s|\le r} \left|\dfrac{h'(s)}{s}\right|$. Тоді нерівність (5), неперервність та монотонність $\sigma(r)$, а також рівність $\sigma(0) = 0$, очевидні. Із умови (iii) та нерівності (4) випливає, що $\sigma(r) \ge Const \cdot r^{\mu-2}$ при досить великих r. Оскільки $\mu > 2$, то $\lim\limits_{r\to\infty} \sigma(r) = +\infty$.

На просторі E_k розглянемо функціонал

$$J_k(u) := \int_{-k}^{k} \left\{ \frac{c^2}{2} |u'(s)|^2 - U(Au(s)) - U(Bu(s)) - V(u(s)) \right\} ds.$$

Безпосереднім обчисленням одержуються наступні два твердження.

Лема 3. J_k — функціонал класу C^1 на E_k, а його похідна для будь-яких $u, h \in E_k$ виражається формулою

$$\langle J_k'(u),\, h \rangle = \int_{-k}^{k} \left\{ c^2 u'(s) h'(s) - U'(Au(s))\, Ah(s) - \right.$$

$$-U'\left(Bu(s)\right)Bh(s)-V'\left(u(s)\right)h(s)\Big\}ds.$$

Лема 4. Критичні точки функціоналу J_k є C^2 — розв'язками рівняння (2), що задовольняють умову (3).

Лема 5. Нехай виконуються умови $(i)-(iii)$. Тоді існують такі $\varepsilon_0>0$ і $\gamma>0$, які не залежать від $k\ge 1$, що для нетривіальних критичних точок функціоналу J_k правильні нерівності

$$\varepsilon_0\le\|u\|_k^2\le\gamma J_k(u). \tag{6}$$

Доведення. Нехай $u\in E_k$ — критична точка функціоналу J_k. Тоді $J_k'(u)=0$ і

$$J_k(u)=J_k(u)-\frac{1}{\mu}\left\langle J_k'(u),\,u\right\rangle=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\int_{-k}^{k}\left\{c^2\left|u'(s)\right|^2-c_0^2\left|Au(s)\right|^2-c_0^2\left|Bu(s)\right|^2+a^2\left|u(s)\right|^2\right\}ds-$$

$$-\int_{-k}^{k}\left\{\left[f\left(Au(s)\right)-\frac{1}{\mu}f'\left(Au(s)\right)Au(s)\right]+\right.$$

$$\left.+\left[f\left(Bu(s)\right)-\frac{1}{\mu}f'\left(Bu(s)\right)Bu(s)\right]\right\}ds-$$

$$-\int_{-k}^{k}\left\{g\left(u(s)\right)-\frac{1}{\mu}g'\left(u(s)\right)u(s)\right\}ds\ge$$

$$\ge\frac{\mu-2}{2\mu}\int_{-k}^{k}\left\{c^2\left|u'(s)\right|^2-c_0^2\left|Au(s)\right|^2-c_0^2\left|Bu(s)\right|^2+a^2\left|u(s)\right|^2\right\}ds.$$

Використавши лему 1, отримаємо, що

$$J_k(u)\ge\frac{\mu-2}{2\mu}\left\{\alpha_0\int_{-k}^{k}\left|u'(s)\right|^2ds+a^2\int_{-k}^{k}\left|u(s)\right|^2ds\right\},$$

де $\alpha_0=c^2-c_0^2$. Тоді

$$J_k(u)\ge\frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_1\left\{\alpha_0\int_{-k}^{k}\left|u'(s)\right|^2ds+a^2\int_{-k}^{k}\left|u(s)\right|^2ds\right\}=\frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_1\|u\|_k^2,$$

де $\alpha_1=\min\{\alpha_0,\,a^2\}$. Звідси випливає друга з нерівностей (6).

Доведемо першу з нерівностей (6). Для критичної точки $u\in E_k$ маємо $\left\langle J_k'(u),\,u\right\rangle=0$, тобто

$$\int_{-k}^{k}\left\{c^2\left|u'(s)\right|^2-c_0^2\left|Au(s)\right|^2-c_0^2\left|Bu(s)\right|^2+a^2\left|u(s)\right|^2\right\}ds=$$

$$=\int_{-k}^{k}\left\{f'\big(u(s)\big)+g'\big(u(s)\big)\right\}ds.$$

Звідси, як і вище, маємо

$$\alpha_1 \| u \|_k^2 \le \int_{-k}^{k}\left\{f'\big(u(s)\big)+g'\big(u(s)\big)\right\}ds. \tag{7}$$

Тоді із (5) і (7) випливає, що $\alpha_1 \|u\|_k^2 \le \sigma\left(\|u\|_{C([-k,\,k])}\right)\int_{-k}^{k}\left|u(s)\right|^2 ds.$

За теоремою вкладення $\|u\|_{C([-k,\,k])} \le C\cdot\|u\|_k$, з константою C, що не залежить від k. Отже, $\alpha_1\|u\|_k^2 \le \sigma\left(C\|u\|_k\right)\|u\|_k^2$. Оскільки $u \ne 0$, то $\sigma\left(C\|u\|_k\right) \ge \alpha_1$, звідки випливає перша з нерівностей (6) з $\varepsilon_0^{\frac{1}{2}} = C^{-1}\cdot\sigma^{-1}(\alpha_1)$.

Основний результат. Для одержання основного результату статті знадобиться теорема про гірський перевал ([11; 12]).

Теорема 1 (про гірський перевал). Нехай I — функціонал класу C^1 на гільбертовому просторі H, що задовольняє умову Пале-Смейла:

(PS) якщо послідовність $u_n \in H$ така, що $I'(u_n)\to 0$ і $I(u_n)$ обмежена, то вона містить збіжну підпослідовність.

Припустимо, що існують такі $e \in H$ і $r > 0$, що $\| e \| > r$ і

$$\beta := \inf_{\|\upsilon\|=r} I(\upsilon) > 0 = I(0) \ge I(e).$$

Тоді існує така критична точка $u \in H$ функціоналу I, що $I(u) \ge \beta$. При цьому $I(u) \le \sup\limits_{\tau\ge 0} I(\tau e)$.

Наступна лема доводиться аналогічно до леми 6 з [3, с. 85].

Лема 6. Нехай виконуються умови $(i)-(iii)$, тоді функціонал J_k задовольняє умову Пале-Смейла.

Лема 7. Нехай виконуються умови $(i)-(iii)$. Тоді існують такі $r_0 > 0$ і $\alpha_0 > 0$, які не залежать від k, що $\inf\limits_{\|u\|_k=r_0} J_k(u) > \alpha_0$.

Доведення. Згідно умови (iii) та леми 2

$$f(r)+g(r)\le \mu^{-1}\left(f'(r)+g'(r)\right)r\le \mu^{-1}\sigma(|r|)r^2.$$

Звідси маємо

$$J_k(u):=\frac{1}{2}\int_{-k}^{k}\left\{c^2\left|u'(s)\right|^2-c_0^2\left|Au(s)\right|^2-c_0^2\left|Bu(s)\right|^2+a^2\left|u(s)\right|^2\right\}ds-$$

$$-\int_{-k}^{k}\left\{f\left(Au(s)\right)+f\left(Bu(s)\right)+g\left(u(s)\right)\right\}ds\ge\frac{\alpha_1}{2}\|u\|_k^2-$$

$$-\frac{1}{\mu}\int_{-k}^{k}\sigma\left(u(s)\right)\left|u(s)\right|^2ds\ge\frac{\alpha_1}{2}\|u\|_k^2-\frac{1}{\mu}\sigma\left(\|u\|_{C([-k,\,k])}\right)\|u\|_{L^2(-k,\,k)}^2\ge$$

$$\ge\frac{\alpha_1}{2}\|u\|_k^2-\frac{1}{\mu}\sigma\left(\|u\|_{C([-k,\,k])}\right)\|u\|_k^2.$$

Згідно теореми вкладення, $\|u\|_{C([-k,\,k])}\le C\|u\|_k$. Тому

$$J_k(u)\ge\left\{\frac{\alpha_1}{2}-\frac{1}{\mu}\sigma\left(C\|u\|_k\right)\right\}\|u\|_k^2.$$

Виберемо $r_0>0$ таким, що $\frac{1}{\mu}\sigma\left(Cr_0\right)=\frac{\alpha_1}{4}$. Це, очевидно, можливо, згідно властивостей функції $\sigma(r)$. Тоді при $\|u\|_k=r_0$ маємо $J_k(u)\ge\frac{\alpha_1 r_0^2}{4}$, що і доводить лему.

Лема 8. Нехай виконуються умови $(i)-(iii)$. Тоді існує таке $\tau_0>0$, яке не залежить від k, що $J_k\left(\tau\upsilon_k\right)=J_1\left(\tau\upsilon_1\right)\le 0$ для всіх $\tau\ge\tau_0$.

Ця лема доводиться аналогічно до леми 4.4 з [2, с. 165].

Наступна теорема є основним результатом цієї статті:

Теорема 2. Нехай виконуються умови $(i)-(iii)$. Тоді для будь-яких $k\ge 1$ і $c>c_0$ рівняння (2) має розв'язок $u\in E_k$. Тим самим існують дві періодичні біжучі хвилі з профілем u і швидкостями $\pm c$. Більше того, існують такі константи $\varepsilon_0>0$ і $C>0$, які не залежать від k, що $\varepsilon_0\le\| u\|_k^2\le C$, $\varepsilon_0\le J_k(u)\le C$.

Доведення. Леми 6–8 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про гірський перевал. Отже, J_k має ненульову критичну точку $u \in E_k$. За лемою 4, u – C^2 — розв'язок задачі (2), (3). Оцінки знизу для $\|u\|_k$ і $J_k(u)$ випливають із леми 5. Згідно леми 8,

$$J_k(u) \le \sup_{\tau \ge 0} J_k(\tau \upsilon_k) = \sup_{\tau \ge 0} J_1(\tau \upsilon_1) = C.$$

Оцінка зверху для $\|u\|_k$ випливає тепер із леми 5. Теорему доведено.

Висновки. У статті одержано результат про існування надзвукових періодичних біжучих хвиль для нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь, яка описує нескінченну систему нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці. Цей результат поширює результат статті [10].

Список використаних джерел:

1. Бак С. М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів / С. М. Бак // Математичні студії. — 2006. — Т. 26, №2. — С. 140–153.
2. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. — 2010. — Т. 7, №2. — С. 154–175.
3. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні студії. — 2012. — Т. 37, №1. — С. 76–88.
4. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні sin-Ґордона на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. — Вип. 9. — С. 5–10.
5. Бак С. М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвилі в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. — Вип. 10. — С. 17–23.
6. Bak S. M. Peridoc traveling waves in chains of oscillators / S. M. Bak // Communications in Mathematical Analysis. — 2007. — Vol. 3, № 1. — P. 19–26.
7. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. — 2007. — P. 319–341.
8. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. — 2003. — Vol. 3, №1 (February). — P. 105–114.
9. Ioos G. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators / G. Ioos, K. Kirchgassner // Commun. Math. Phys. — 2000. — Vol. 211. — P. 439–464.
10. Makita P. D. Periodic and homoclinic travelling waves in infinite lattices / P. D. Makita // Nonlinear Analysis. — 2011. — Vol. 74. — P. 2071–2086.
11. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices / A. Pankov. — London ; Singapore : Imperial College Press, 2005. — 196 p.

12. Willem M. Minimax theorems / M. Willem. — Boston : Birkhduser, 1996. — 162 p.

The article deals with infinite systems of differential equations that describe infinite system of nonlinear coupled nonlinear oscillators on 2D-lattice. It is obtained result on existence of supersonic periodic travelling waves.

Key words: *nonlinear oscillators, 2D-lattice, supersonic periodic travelling waves, critical points, mountain pass theorem.*

Отримано: 16.04.2015

УДК 519.6

А. Ю. Баранов, аспірант

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, м. Київ

АЛГОРИТМ ФАКТОРИЗАЦІЇ СТРІЧКОВИХ НЕСИМЕТРИЧНИХ МАТРИЦЬ НА КОМП'ЮТЕРАХ З ГРАФІЧНИМИ ПРИСКОРЮВАЧАМИ

Розроблено і досліджено алгоритм факторизації стрічкових несиметричних матриць на гібридних комп'ютерах. Розглянуто питання програмної реалізації алгоритму на комп'ютерах з графічними процесорами.

Ключові слова: *паралельні обчислення, CUDA, гібридний алгоритм, СЛАР, стрічкові матриці, метод Гауса.*

Вступ. При чисельному розв'язанні задач в багатьох випадках виникає необхідність розв'язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Наприклад, задачі лінійної алгебри виникають при дискретизації крайових задач чи задач на власні значення проекційно-різницевим методом (скінченних елементів, скінченних різниць). Також, при використанні ітераційних методів розв'язання нелінійних задач часто на кожній ітерації розв'язується лінеаризована задача — СЛАР.

Важливою особливістю задач лінійної алгебри, які виникають при дискретизації, являється те, що кількість ненульових елементів матриць таких задач складає kn, де $k << n$, а n — порядок матриці, тобто матриці є розрідженими [1]. Структура розрідженої матриці визначається нумерацією невідомих задачі і часто є стрічковою, блочно-діагональною з обрамленням, профільною і тому подібне. В даній статі розглядуються несиметричні матриці стрічкової структури.

Іншою важливою особливістю є великий порядок матриць СЛАР — до десятків мільйонів. Це зумовлюється бажанням використовувати більш точні дискретні моделі, що дає можливість отримувати наближені розв'язки більш близькі до розв'язків вихідних задач, враховувати локальні особливості даного процесу чи явища.

