УДК 517.19

І. В. Дорошенко, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет
імені Ю. Федьковича, м. Чернівці

СТІЙКІСТЬ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ДИСКРЕТНИМИ МАРКОВСЬКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ТА ЗОВНІШНІМИ ЗБУРЕННЯМИ

У статті досліджується стійкість розв'язків систем диференціально-функціональних рівнянь з дискретними марковськими параметрами та зовнішніми збуреннями. Встановлено достатні та необхідні умови експоненційної стійкості у середньому квадратичному систем лінійних диференціально-функціональних рівнянь з дискретними марковськими коефіцієнтами.

Ключові слова: *диференціально-функціональне рівняння, марковський процес, зовнішнє збурення.*

Вступ. Ця стаття є продовженням досліджень отриманих у праці [1], але тут вже розглянуто метод функціоналів Ляпунова-Красовського для диференціально-функціональних рівнянь з марковськими параметрами та зовнішніми збуреннями.

Постановка задачі. Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, P)$ задано диференціально-функціональне рівняння

$$dx(t) = f_1(\xi(\omega)) f(t, x_t, y(t)) dt, \tag{1}$$

з початковими умовами

$$x(t+\theta)\Big|_{t=0} = \varphi(\theta) \in C_n(-h, 0),\ \theta \in [-h, 0];\ h > 0;\ y(t)\Big|_{t=0} = y^0 \in Y, \tag{2}$$

де

$$x(t) \equiv x(t, \omega) \in R^n;\ x_t \equiv \{x(t+\theta), \theta \in [-h, 0]\};$$

$$f : R_+ \times C_n([-h, 0], R^n) \times Y \to R^n,$$

$f_1(\cdot)$ — берівська функція; задана випадкова величина $\xi(\omega) \in R^1$, яка не залежить від марковського процесу $y(t) \equiv y(t, \omega) \in R^1$.

Випадкові зміни дискретної структури $y(t) \in Y$ системи (1), (2) враховуємо одним із способів.

1. Функція $y(t) \in Y$ є чисто розривним скалярним марковським процесом, що допускає розклад [2; 4]

$$P\{y(t+\Delta t) \in [\beta, \beta + \Delta\beta) \mid y(t) = \alpha \neq \beta\} = p(t, \alpha, \beta)\Delta\beta\Delta t + o(\Delta t), \tag{3}$$

$$P\{y(\tau) \equiv \alpha, t < \tau < t + \Delta t \mid y(t) = \alpha\} = 1 - p(t, \alpha)\Delta t + o(\Delta t), \tag{4}$$

де $P\{\cdot|\cdot\}$ — умовна ймовірність, $o(\Delta t)$ — нескінченно мала величина вищого порядку малості відносно Δt.

2. Скалярний процес $y(t) \in Y$ є однорідним марковським ланцюгом зі скінченим числом станів $Y \equiv \{y_1, y_2, ..., y_k\}$, причому відомі параметри q_{ij}, $q_i \equiv \sum_{j \neq i} q_{ij}$

$$P\{y(t+\Delta t) = y_j \mid y(t) = y_i\} = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \tag{5}$$

$$P\{y(\tau) \equiv y_i, t \le \tau \le t + \Delta t \mid y(t) = y_i\} = 1 - q_i \Delta t + o(\Delta t). \tag{6}$$

3. Оператор зсуву $Y_t^s y \equiv y_t(s, \psi)$ марковського процесу $y(t) \in Y$, який є розв'язком стохастичного диференціально-функціонального рівняння Іто-Скорохода [4]

$$dy(t) = a(t, y_t)dt + b(t, y_t)dw(t) + \int_U c(t, y_t, z)\tilde{\nu}(dz, dt).$$

Зупинимося на другому випадку та на ситуації, що в моменти $\tau > 0$ стрибкоподібної зміни структури фазовий вектор $x(\tau)$ однозначно визначається станом, в якому знаходилася система безпосередньо перед зміною структури, що викликано переходом $y(\tau - 0) = y_i$ в $y(\tau) = y_j \neq y_i$. Це означатиме, що

$$x(\tau) = \varphi_{ij}(x(\tau - 0)), i \neq j, \tag{7}$$

де $\varphi_{ij}(x) \in C_n([-h, 0]$, причому $\varphi_{ij}(0) = 0$.

Особливу зацікавленість представляє випадок, коли $\varphi_{ij}(x)$ є лінійною функцією [3]. Тоді існують матриці K_{ij} розмірності $n \times n$ такі, що

$$x(\tau) = K_{ij} x(\tau - 0). \tag{8}$$

Якщо $K_{ij} = E$ (одинична матриця розмірності $n \times n$), то маємо неперервну зміну фазового вектора, тобто

$$x(\tau - 0) = x(\tau). \tag{9}$$

Згідно результатів [1], [3], [4] слабкий інфінітезимальний оператор (СІО) $\mathcal{L}v$ на функціоналі $v(t, x_t, y(t))$ у випадку $y(t) \in$ $\in Y \equiv \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ визначається за формулою

$$\mathcal{L}v(t, x_t, y(t)) = \frac{\partial v}{\partial t} + (\nabla v, f) + \sum_{j \neq i}^{k} [v(t, \varphi_{ij}(x), y_j) - v(t, x_t, y_i)] q_{ij}. \tag{10}$$

Якщо маємо випадок 1 чисто розривного скалярного марковського процесу [3], тобто $y(t) \in [\alpha_1, \alpha_2]$ такий, що допускає розклад (3), (4), причому в моменти стрибка $y(t)$ фазовий вектор $x(t)$ змінюється неперервно, тоді враховуючи результати [3] матимемо СІО вигляду

$$\mathcal{L} v(t, x_t, y(t)) = \frac{\partial v}{\partial t} + (\nabla v, f) + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [v(t, x_t, \beta) - v(t, x_t, \alpha)] p(t, \alpha, \beta) d\beta. \quad (11)$$

Експоненційна стійкість у середньому квадратичному систем лінійних диференціально-функціональних рівнянь з дискретними марковськими коефіцієнтами. Нехай на ймовірносному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, P)$ задано випадковий процес $\{x(t) \equiv x(t,\omega)\} \subset R^n$ стохастичним диференціально-функціональним рівнянням, як частинний випадок рівняння (1)

$$dx = f_1^*(\xi(\omega)) A(t, y(t)) x_t dt\ ,\ t \geq 0, \quad (12)$$

за початковими умовами

$$x(t+\theta)\big|_{t=0} = \varphi(\theta),\ \theta \in [-h, 0],\ h > 0\ , \quad (13)$$

де $\{x(t) \equiv x(t,\omega),\ t \geq 0\} \subset R^n$, $x_t \equiv \{x(t+\theta), -h \leq \theta \leq 0\}$, $\{y(t) \equiv y(t,\omega),$ $t \geq 0\} \subset Y$ — однорідний марковський процес зі скінченою кількістю станів $Y = \{y_1, ..., y_k\}$ та з матрицею перехідних ймовірностей [2]

$$P(\tau) = P\{y(t+\tau) = y_j \,|\, y(t) = y_i\} = e^{\pi\tau}\ , \quad (13)$$

де $\pi = [q_{ij}]$ і виконуються співвідношення

$$q_{ij} \geq 0, j \neq i, q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}\ ;$$

$f^* : R^1 \to R^1$; $A : R_+ \times Y \to M_n(R)$ ($M_n(R)$ — простір квадратних матриць розмірності $n \times n$ з дійсними елементами) — матриця, елементами якої є обмежені та неперервні по t функції для кожного $y \in Y$; $\|A\|$ — відповідна операторна норма матриці A.

Враховуючи що траєкторії марковського процесу $y(t)$ здійснюють лише скінчену кількість стрибків на довільному скінченому інтервалі часу, можна визначити траєкторії випадкового процесу $x(t)$, а саме, вимагаємо щоб у момент стрибка процесу $y(t)$ розв'язки рівняння (12), які побудовані на суміжних інтервалах між стрибками співпадали. Вибіркові функції побудованого таким чином процесу $x(t)$ будуть неперервні майже скрізь (з ймовірністю одиниця) [3].

Нехай для довільного $y \in Y$ маємо функціонал

$$v : R_+ \times C_n([-h, 0], R^n) \times Y \to R^1 .$$

Лема. Нехай виконуються вище згадані умови для коефіцієнта рівняння (12) з початковою умовою (13) та марковським процесом $y(t)$ зі зліченною кількістю станів $Y = \{y_1, ..., y_k\}$. Тоді СІО в силу системи (12) обчислюється за формулою

$$(\mathcal{L}v)(t, x_t, y_i) = \frac{\partial v}{\partial t} + (f^*(\xi(\omega))(A(t, y_i)x_t)^T, \frac{\partial v}{\partial x}(t, x_t, y_i)) + \\ + \sum_{j \neq i}^{k} q_{ij}[v(t, x_t, y_j) - v(t, x_t, y_i)]. \tag{14}$$

Доведення леми полягає в обчисленні СІО на розв'язках системи (12) за означеннями [2; 3].

Теорема 1 (пряма теорема Ляпунова). Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, P)$ задано диференціальне рівняння (1), (2) з марковськими параметрами та зовнішніми збуреннями, для кого виконуються:

1) задано випадкову величину з законом розподілу $F_\xi(x)$, причому $\xi(\omega)$ не залежить від марковського процесу;
2) $M\xi(\omega)^2 < \infty$; $M(f_1^*\xi(\omega))^2 < \infty$;
3) $f^*{}_1(\cdot)$ — берівська функція;
4) існує функціонал Ляпунова-Красовського $v(t, \varphi, y)$, для якого справедлива оцінка

$$c_1 |\varphi(0)|^2 \leq v(t, \varphi, y) \leq c_2 \|\varphi\|^2 \tag{15}$$

для $c_1, c_2 > 0$, $t \in R_+$, $y \in Y$, $\varphi \in C_n([-h, 0], R^n)$;

5) для деякої $c_3 > 0$ виконується нерівність

$$(Lv)(t, \varphi, y) \leq -c_3 |\varphi(0)|^2, \tag{16}$$

$\forall t \geq 0$, $y \in Y$ та $\forall \varphi \in C_n([-h, 0], R^n)$.

Тоді тривіальний розв'язок задачі (12), (13) є експоненційно стійким у середньому квадратичному.

Доведення. Спочатку необхідно відмітити, що існує математичне сподівання для функціоналу $v(t, \varphi, y)$ в силу розв'язків рівняння (12). Згідно з формулою (14) для обчислення СІО і внаслідок нерівностей (15), (16), легко одержати, що

$$Ev(t, x_t, y)e^{\frac{c_3}{c_2}t} \leq v(t, x_t, y) \leq c_2 \|x_t\|^2$$

для $\forall t \geq 0, x_t \in C_n([-h, 0], R^n), y \in Y$. Звідки за умови теореми 1

$$E\|x_t\|_0^2 \le \frac{1}{c_1} e^{-\frac{c_3}{c_2}t} Ev(t, x_t, y) e^{\frac{c_3}{c_2}t} \le \frac{c_2}{c_1} e^{-\frac{c_3}{c_2}t} \|x_t\|^2 \equiv$$

$$\equiv Me^{-\gamma(t-t_0)} \|x_t\|^p, \ M = \frac{c_2}{c_1}, \gamma = \frac{c_3}{c_2} > 0.$$

Тоді згідно означення 2 тривіальний розв’язок задачі (12), (13) є експоненційно стійким у середньому квадратичному. Теорема 1 доведена.

Теорема 2 (обернена теорема Ляпунова). Якщо тривіальний розв’язок задачі (12), (13) експоненційно стійкий у середньому квадратичному, то існує функціонал Ляпунова-Красовського $v(t, \varphi, y)$, для якого справедливі умови (15), (16).

Доведення. Покажемо, що функціонал

$$v(t, x_t, y) \equiv \int_t^{+\infty} E\|x_s(t, \varphi, y)\|^2 ds, \tag{17}$$

задовольняє всі умови теореми 2.

Насправді, в силу означення експоненційної стійкості у середньому квадратичному маємо

$$v(t, x_t, y) \le \int_t^{\infty} Me^{-\gamma(u-t)} \|x_t\|^2 du = c_2 \|x_t\|^2.$$

Оцінка знизу функціоналу $v(t, x_t, y)$ отримається за умови $\sup_{y \in R^m} \|A(y)\| \equiv a < \infty$.

Доведення нерівності (16) для СІО полягає в обчисленні його за формулою

$$\mathcal{L}v(t, x_t, y) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} [E\{v(t+\delta, x_{t+\delta}, y(t+\delta))\} - v(t, x_t, y)] =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} [\int_0^{\infty} E\{\|x_{t+s+\delta}\|^2\} ds - \int_0^{\infty} E\|x_{t+s}\|^2\} ds] = -\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} [\int_0^{\delta} E\{\|x_{t+s}\|^2\} ds = -\|x_t\|^2.$$

Теорема 2 доведена.

Висновки. Одержано достатні та необхідні умови експоненційної стійкості у середньому квадратичному систем лінійних диференціально-функціональних рівнянь з дискретними марковськими коефіцієнтами та зовнішніми збуреннями.

Список використаних джерел:

1. Дорошенко І. В. Стійкість динамічних систем з післядією випадкової структури з врахуванням марковських збурень : дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.05.01 / І. В. Дорошенко. — К., 2008. — 138 с.

2. Дынкин Е. Б. Марковские процессы / Е. Б. Дынкин. — М. : Физматгиз, 1969. — 859 с.
3. Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры / И. Я. Кац. — Екатеренбург : УГАПС, 1998. — 222 с.
4. Ясинський В. К. Стабілізація у динамічних системах випадкової структури / В. К. Ясинський, Є. В. Ясинський, І. В. Юрченко. — Чернівці : Золоті литаври, 2011. — 738 с.
5. Friedlin M. I. Markov Processes and Differential Equations: Asymptotic Problems, Lectures in Mathematics / M. I. Friedlin. — Zurich : Birkhauser, 1998. — 303 p.
6. Jacod J. Limit Theorems for Stochastic Processes / J. Jacod, A. N. Shiryaev. — Berlin : Springer-Verlag, 1987.

We study the stability of solutions of functional differential equations with discrete Markov parameters and external disturbances. Sufficient and necessary conditions for exponential stability in the mean square of linear functional differential equations with discrete Markov coefficients.

Key words: *functional differential equations, Markov process, external perturbation.*

Отримано: 23.04.2015

УДК 519.872

І. О. Дьогтєва, аспірантка

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

ПОБУДОВА ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ З ПРОГНОЗОВАНОЮ ПОВЕДІНКОЮ ІНТЕНСИВНОСТІ ВІДМОВ

У статті показано, як метод змішування розподілів можна використати для побудови функцій розподілу зі змінною інтенсивністю відмов.

Ключові слова: *функція розподілу, метод змішування, інтенсивність відмов.*

Вступ. Вивчення сумішей розподілів було розпочато Пірсоном у 1894 році, і тільки через півстоліття Робінс опублікував завершений фрагмент теорії сумісних розподілів.

Сутність процедури змішування у тому, що за сім'єю функцій $G(x,y)$, що задовольняє такі властивості: а) при кожному y $G(x,y)$ — функція розподілу, б) при кожному x $G(x,y)$ — вимірна по y, будується функція

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y)dH(y), \tag{1}$$