УДК 519.21

А. Я. Білинський, аспірант,
О. М. Кінаш, канд. фіз.-мат. наук
Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ПРО ОЦІНКУ ЙМОВІРНОСТІ БАНКРУТСТВА У ВИПАДКУ ВЕЛИКИХ ВИПЛАТ

Знайдено асимптотику ймовірності банкрутства у випадку великих виплат.

Ключові слова: *ймовірність банкрутства, «важкі хвости», субекспоненційні розподіли.*

Вступ. Роботу страхової компанії характеризують різні показники, одним з яких є її імовірність банкрутства. Можна говорити про те, що фінансовий ризик і пов'язана з ним небезпека банкрутства — характерні особливості роботи кожної страхової компанії. Відтак, важливим завдання є обчислення імовірності банкрутства та аналіз отриманих результатів. Особливий інтерес, у наш час, становить визначення ймовірності банкрутства у випадку великих виплат, що пов'язане, зокрема, зі стихійними лихами, терористичними актами і т.д. У цій статті ми розглянемо саме цей випадок, коли виплати великі. Зауважимо також, що великі виплати описуються розподілами з так званими «важкими хвостами».

При аналізі таких розподілів, а зокрема розподілу Парето, виникло питання, чи можливо отримати оцінку ймовірності банкрутства $\varphi(u)$.

Позитивну відповідь дали на це питання фон Бахр [1] для розподілу Парето та Торін і Вікстад [2] для лог-нормального розподілу.

Пізніше виникло питання, чи існує такий клас розподілів з «важкими хвостами», що допускає знаходження ймовірності банкрутства. Відповідь на це питання дали Ембрехтс та Веревербеке [3], що виявили фундаментальну роль для теорії ризику класу субекспоненційних розподілів *S*, до якого належать, зокрема, лог-нормальний розподіл, розподіл Парето, розподіл Барра, лог-гамма розподіл, зрізаний стійкий розподіл, розподіл Вейбулла, розподіли Бектандера типу I та типу II.

Постановка задачі. Отримати оцінку ймовірності банкрутства $\varphi(u)$ у випадку вимог про виплати, розподілених за законом Вейбулла.

Основна частина. Припустимо, що ми знаходимось в умовах класичної задачі знаходження ймовірності банкрутства [див. зокрема 4, с. 184–186; 5 с. 223–224].

Класичну модель колективного ризику характеризують:

1. Розміри виплат — $\{X_i, i \geq 1\}$ — невід'ємні незалежні однаково розподілені випадкові величини з функцією розподілу $F(x)$ та скінченним математичним сподіванням $\mu = EX_1$.
2. Моменти надходження вимог на виплати $\{T_i, i \geq 1\}$, що утворюють послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу $F(x)$.
3. Процес надходження вимог на виплати $N(t) = \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\}$, $t > 0$, тобто кількість вимог на інтервалі $[0, t]$, де, за визначенням, $\sup\{\varnothing\} = 0$.
4. Проміжки часу між надходженням вимог $Y_1 = T_1$, $Y_k = T_k - T_{k-1}$, $k \geq 2$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини зі скінченним математичним сподіванням $EY_1 = 1/\lambda$.
5. $u \geq 0$ — початковий (резервний) капітал.
6. $c > 0$ — швидкість (інтенсивність) надходження страхових внесків.

Нехай

1) $\varphi(u,T) = P\ \{U(t) < 0$ для деякого $0 < t \leq T\}$, $0 < t < \infty$, $u > 0$ – імовірність банкрутства на скінченному часовому інтервалі $[0, T]$, $U(t)$ — процес ризику;
2) $\varphi(u) = \varphi(u, \infty) = P\{U(t) < 0$ для деякого $t > 0\}$ — імовірність банкрутства на нескінченному інтервалі.

Для обчислення імовірності банкрутства нам зручно мати прості аналітичні формули для $\varphi(u)$ або $\varphi(u,T)$, які включають імовірнісні характеристики розмірів страхових виплат та процесу надходження вимог на виплати $N(t)$.

Застосовуватимемо наступні терміни та позначення: якщо $F(x)$ — функція розподілу, то через $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ позначаємо «хвіст» розподілу F, а через F^{n*} — n-кратну згортку F.

Отже, якщо F — функція розподілу розміру виплат, то $\overline{F}(x)$ — «хвіст» цього розподілу, а

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)dy, \quad x > 0,$$

називають проінтегрованим «хвостом» розподілу [4, с. 186].

Величину $\rho = \dfrac{c}{\lambda\mu} - 1$ називають відносною страховою надбавкою, а для базової умови $\rho > 0$ вживають термін «умова чистого прибутку».

Умова Крамера-Лундберга передбачає існування константи ν, яку називають налагоджувальним (регулюючим, коректуючим) коефіцієнтом або коефіцієнтом Лундберга, такої, що

$$\int_0^\infty e^{\nu x}(1 - F(x))dx = c / \lambda = (1+\rho)\mu. \tag{1}$$

Розподіли, що не задовольняють умову (1), будемо називати розподілами з «важкими хвостами» [4, с. 188]. До таких розподілів, як згадувалось вище, належать так звані субекспоненційні розподіли.

Для подальшої практичної реалізації підрахунку імовірності банкрутства використовуємо наступну теорему (див. зокрема [4, с. 197]).

Теорема. Розглянемо модель Крамера-Лундберга за умов $\rho > 0$ та $F_I(x) \in S.$ Тоді

$$\varphi(u) \sim \rho^{-1}\overline{F_I}(u), \quad u \to \infty. \tag{2}$$

Згідно з даною теоремою, у випадку виплат, які мають розподіли із субекспоненційними проінтегрованими «хвостами», імовірність банкрутства допускає просту апроксимацію, що задається формулою (2).

Зауважимо, що умова теореми сформульована в термінах проінтегрованих «хвостів», а не самої функції розподілу $F(x)$.

Підрахунок імовірності банкрутства у випадку великих виплат. Розглянемо задачу підрахунку імовірності банкрутства у випадку «важких хвостів», тобто, коли виплати є великими. Зауважимо, що в [4, с. 198–199] задача розв'язана у випадках виплат розподілених за законом Парето з функцією розподілу $F(x) = 1 - (k/x)^\alpha, \alpha > 1, x > k$ та лог-нормальним розподілом. В [6] розглянуто випадок розподілу Парето з функцією розподілу $F(x) = 1 - \left(\dfrac{k}{k+x}\right)^\alpha, \alpha > 1, k > 0, x > 0$ та виписано асимптотику ймовірності банкрутства для розподілу Бенктандера типу II.

З аналізу розподілу Парето видно, що це розподіл, у якого «правий хвіст» прямує до нуля як x^a, що приводить до розподілу з «хвостом» значно «важчим», ніж експоненційний. Розглянемо «праві хвости» цих розподілів:

- експоненційного: $P(X > x) = \exp(-\lambda x)$;
- Парето: $P(X > x) = (\lambda / (\lambda + x)^a)$.

Покладемо

$$P(X > x) = \exp(-cx^\gamma), \gamma > 0.$$

Тепер маємо два випадки. Якщо $\gamma < 1$, то виникає розподіл, який є, у певному розумінні, проміжним між розподілами Парето й експоненційним. У той же час при $\gamma > 1$ «правий хвіст» легший за експоненційний ($\gamma = 1$ відповідає експоненційному розподілу). Така поведінка «хвостів» визначає розподіл Вейбулла як дуже гнучкий і такий, що може бути використаний у задачах страхування для моделювання збитків (як правило, з $\gamma < 1$) [4, с. 17]. Для розподілу Вейбулла розглянемо наступне твердження.

Твердження. Нехай виплати розподілені за розподілом Вейбулла з параметром $0 < \gamma < 1,$ з функцією розподілу

$$F(x) = 1 - \exp\left(-c_1 x^{\gamma}\right), \quad c_1 > 0, x > 0, \tag{3}$$

тоді асимптотика ймовірності банкрутства $\varphi(u)$ задається співвідношенням

$$\varphi\left(u\right) \sim \frac{\lambda}{c \cdot c_1^{\frac{1}{\gamma}} - \lambda\Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)} \left[1 + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}; c_1 x^{\gamma}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\gamma}; 0\right)}{\gamma \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)}\right], \tag{4}$$

при $u \to \infty.$

Доведення. Щільність розподілу Вейбулла

$$f(x) = c_1 \gamma x^{\gamma - 1} \exp\left(-c_1 x^{\gamma}\right).$$

Для знаходження математичного сподівання

$$EX_1 = \int_0^{\infty} c_1 \gamma x^{\gamma} \exp\left(-c_1 x^{\gamma}\right) dx$$

зробимо наступну заміну змінних: $t = c_1 x^{\gamma}$, отримаємо

$$EX_1 = \int_0^{\infty} c_1 \gamma x^{\gamma} \exp\left(-c_1 x^{\gamma}\right) dx = \frac{\gamma}{c_1^{\frac{1}{\gamma}}} \int_0^{\infty} \frac{t \exp\left(-t\right) t^{\frac{1}{\gamma}}}{t\gamma} dt = \frac{1}{c_1^{\frac{1}{\gamma}}} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{\gamma}} \exp\left(-t\right) dt.$$

Нагадаємо, що $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} s^{z-1} \exp(-s) ds$, тоді $EX_1 = \frac{1}{c^{\frac{1}{\gamma}}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right).$

Відповідно $\mu = EX_1 = \frac{1}{c^{\frac{1}{\gamma}}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right).$ Відносна страхова надбавка

$$\rho = \frac{c_1}{\lambda\mu} - 1 = \frac{c_1 \cdot c^{\frac{1}{\gamma}}}{\lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)} - 1 = \frac{c_1 \cdot c^{\frac{1}{\gamma}} - \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}{\lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}.$$

Тоді $\rho^{-1} = \dfrac{\lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}{c \cdot c_1^{\frac{1}{\gamma}} - \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}.$

Проінтегрований хвіст розподілу

$$F_I\left(x\right) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)dy, \quad x > 0.$$

Зауважимо, що у класичному інтегральному визначенні гамма-функції межі інтегрування фіксовані. Розглядають також неповну гамма-функцію, яка визначається аналогічним інтегралом із змінною верхньою або нижньою межею інтегрування. Розрізняють верхню неповну гамма-функцію, часто позначається як гамма-функцію від двох аргументів:

$$\Gamma\left(a,z\right) = \int_z^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt.$$

Тоді маємо:

$$\int_0^x \overline{F}(y)dy = \int_0^x \exp\left(-c_1 y^{\gamma}\right)dy = \frac{c_1^{-\frac{1}{\gamma}}\left(\Gamma\left(\frac{1}{\gamma};c_1 x^{\gamma}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\gamma};0\right)\right)}{\gamma}.$$

Звідки легко видно, що для розподілу Вейбулла (3) виконується твердження (4).

Висновки. Отримано асимптотику ймовірності банкрутства у випадку, коли вимоги про виплату розподілені за законом Вейбулла. Результат є важливим, оскільки, як показує практика, розподіл Вейбулла відіграє важливу роль у теорії ризику.

Список використаних джерел:

1. Von Bahr B. Asymptotic ruin probabilities when exponential moments do not exist / B. Von Bahr // Scand. Actuarial J. — 1975. — № 1. — P. 6–10.
2. Thorin O. Calculation of ruin probabilities when the claim distribution is lognormal / O. Thorin, N. Wikstad // Astin Bulletin. — 1976. — Vol. 9. — P. 231–246.

3. Embrechts P. Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims / P. Embrechts, N. Veraverbeke // Insurance: Math. Econ. — 1982. — Vol. 1. — № 1. — P. 55–72.
4. Зінченко Н. М. Математичні методи в теорії ризику : навчальний посібник / Н. М. Зінченко. — К. : ВПЦ «Київський університет», 2008. — 224 с.
5. Леоненко М. М. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці / М. М. Леоненко, Ю. С. Мішура, В. М. Пархоменко, М. Й. Ядренко. — К. : Інформтехніка, 1995. — 380 с.
6. Білинський А. Я. Ймовірність банкрутства для випадку субекспоненційних роз-поділів витрат / А. Я. Білинський, О. М. Кінаш // Сборник научных трудов SWorld. — Иваново : Маркова А. Д., 2015. — Вип. 1 (38). — Т. 21. — С. 95–100.

The asymptotic behavior of the probability of bankruptcy for large payments.

Key words: *the probability of bankruptcy, «heavy tails», subexponential distributions.*

Отримано: 21.07.2016

УДК 519.21

О. В. Борисенко, канд. фіз.-мат. наук

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ДОСЛІДЖЕННЯ АСИМПТОТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ ПІД ДІЄЮ МАЛИХ ВИПАДКОВИХ НЕЛІНІЙНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ЗБУРЕНЬ

У роботі вивчається асимптотична поведінка неавтономної коливної системи, яка описується диференціальним рівнянням третього порядку з малими нелінійними періодичними зовнішніми збуреннями типу багатовимірного «білого» шуму, центрованого і нецентрованого Пуассонівських шумів. Розглянуто нерезонансний випадок.

Ключові слова: *асимптотична поведінка, неавтономна коливна система, стохастичне диференціальне рівняння, центрована і нецентрована Пуассонівські міри.*

Вступ. Вивчення коливних процесів є дуже важливим у різноманітних галузях механіки, фізики, техніки і економіки. Як приклади коливних систем можна розглядати вібрацію конструкцій і механізмів, електро-магнітні коливання у радіотехніці і оптиці, автоколивання у системах керування, звукові та ультразвукові коливання.

