УДК 519.213

А. Я. Довгунь, канд. фіз.-мат. наук,
Г. М. Перун, канд. фіз.-мат. наук,
В. К. Ясинський, д-р фіз.-мат. наук, професор

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ДОСТАТНІ УМОВИ СТІЙКОСТІ В СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФУЗІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ З ЗОВНІШНІМИ ЗБУРЕННЯМИ

Обґрунтовані достатні умови стійкості в l.i.m. тривіального розв'язку стохастичних динамічних систем автоматичного регулювання Вінера-Іто з зовнішніми випадковими збуреннями.

Ключові слова: *автоматичне регулювання, зовнішні збурення, стохастичне диференціальне рівняння, стійкість.*

Вступ. Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, R)$ випадковий процес $x(t) \equiv x(t,\omega) : [0,\infty) \times \Omega \to R^n$ є сильним розв'язком дифузійного рівняння автоматичного регулювання під дією зовнішніх випадкових збурень

$$dx(t) = \left[f_1(t,\xi_1) Ax(t) + g\varphi(\sigma) \right] dt + f_2(t,\xi_2) Bx(t) dw(t) \qquad (1)$$

за умови

$$x(t)\,|_{t=0} = \varphi(t) \in R^n, \ \forall t \in \left[-\tau, 0\right], \qquad (2)$$

де $f_l(t,\cdot) \in R^1$, $l = 1,2$, — берівські функції при кожному $t \in [0,\infty)$; $\xi_j \equiv \xi_j(\omega) : \Omega \to R^n$ — випадкові величини зі своїм законом розподілу, $j = 1,2$; $A \equiv \left\{a_{ij}\right\}$; $B \equiv \left\{b_{ij}\right\}$, $i,j = \overline{1,n}$, — дійсні матриці; $\sigma \equiv l^T x(t)$, $t \geq 0$; $\varphi(\circ)$ — нелінійна диференційована функція за умови:

$$\left[k\sigma - \varphi(\sigma)\right]\varphi(\sigma) > 0, \ k > 0; \ \varphi(0) = 0; \ \dot{\varphi}(\sigma) \geq 0. \qquad (3)$$

Це означає, що $\varphi(\sigma)$ лежить між прямими

$$\varphi(\sigma) = 0; \ \varphi(\sigma) = k\sigma; \qquad (4)$$

$$g \equiv \left(g_1, g_2, ..., g_n\right)^T \in R^n; \ l \equiv \left(l_1, l_2, \ldots, l_n\right)^T \in R^n.$$

Необхідно знайти достатні умови стійкості в середньому квадратичному розв'язків дифузійних рівнянь автоматичного регулювання (1) за умов (2)–(4).

Дослідження стійкості в середньому квадратичному розв'язків динамічних систем автоматичного регулювання із зовнішніми збуреннями.

Нехай вихідна система автоматичного регулювання [4]

$$dy(t) = \left[E\left\{ f_1\left(t, \xi_1\right)\right\} Ay(t) + g\varphi(\sigma)\right] dt \tag{5}$$

має один стан рівноваги, причому A та $A + kgl^T$ є гурвіцеві матриці [1], де $E\{\circ\}$ — операція математичного сподівання [2].

Розглянемо стохастичний функціонал Ляпунова-Красовського [6]

$$v(x) = x^T Hx + \int\limits_0^{\sigma(x)} \varphi(y)dy, \tag{6}$$

де симетрична додатно визначена матриця H є розв'язком матричного рівняння

$$E\left\{ f_1\left(t, \xi_1\right)\right\}\left(A^T H + HA\right) + E\left\{ f_2^2\left(t, \xi_2\right)\right\} B^T HB = -\overset{\circ}{I} \tag{7}$$

з одиничною матрицею $\overset{\circ}{I}$.

Для $v(x)$ правильна нерівність [1; 5]

$$\lambda_{\min}\left(\tilde{H}\right)|x|^2 \le v(x) \le \lambda_{\max}\left(\tilde{H}\right)|x|^2, \tag{8}$$

тут

$$\lambda_{\min}\left(\tilde{H}\right) \equiv \begin{cases} \lambda_{\min}\left(H + \dfrac{1}{2} Xkll^T\right) \text{ для } X \le 0, \\ \lambda_{\min}\left(H\right) \text{ для } X > 0; \end{cases} \tag{9}$$

$$\lambda_{\max}\left(\tilde{H}\right) \equiv \begin{cases} \lambda_{\max}\left(H + \dfrac{1}{2} Xkll^T\right) \text{ для } X > 0, \\ \lambda_{\max}\left(H\right) \text{ для } X \le 0. \end{cases} \tag{10}$$

За допомогою заміни Іто [2] стохастичний диференціал $dv(x)$ на розв'язках системи (1) має вигляд

$$dv(x) = dx^T(t)Hx(t)dt + x^T(t)Hdx(t) + f_2^2\left(t, \xi_2\right)x^T(t)B^T HBx(t)dt +$$

$$+Xd\int\limits_0^{\sigma(x)} \varphi(y)dy = x^T(t)\left[f_1\left(t, \xi_1\right)\left(A^T H + HA\right) + f_2^2\left(t, \xi_2\right)B^T HB\right] x(t) +$$

$$+Xd\left\{ \int\limits_0^{\sigma(x)} \varphi(y)dy\right\} = x^T(t)\left[f_1\left(t, \xi_1\right)\left(A^T H + HA\right) + \right.$$

$$
\begin{gathered}
+f_2^2\left(t,\xi_2\right)x^T(t)\Big]x(t)dt+ \\
+f_2^2\left(t,\xi_2\right)x^T(t)\Big]x(t)dt+\Big[\varphi(\sigma)g^T Hx(t)+x^T(t)Hg\varphi(\sigma)\Big]dt+ \\
X\Big[\varphi(\sigma)f_1\left(t,\xi_1\right)l^T Ax(t)+\varphi(\sigma)l^T g\varphi(\sigma)\Big]dt+\frac{1}{2}X\varphi(\sigma)\times \\
\times\Big[f_2^2\left(t,\xi_2\right)l^T Bx(t)\Big]^2 dt+\Big[x^T(t)f_2\left(t,\xi_2\right)\Big[B^T H+HB\Big]x(t)+ \\
+X\varphi(\sigma)f_2\left(t,\xi_2\right)l^T Bx(t)\Big]dw(t)\,.
\end{gathered}
\tag{11}
$$

За означенням стохастичного диференціала рівність (11) варто розуміти як інтегральне рівняння, оскільки $\dfrac{dw(t,\omega)}{dt}$ не існує з ймовірністю 1 [2].

Надалі обчислимо математичне сподівання зліва і справа відповідної інтегральної рівності (11), врахувавши рівність нулю від інтеграла Вінера-Іто [2] для $\forall t\in\left[0,t\right]$:

$$
E\left\{\int_0^t \Phi\left(t,\omega\right)tw\left(t,\omega\right)\right\}=0.
$$

У результаті отримаємо

$$
\begin{gathered}
E\left\{\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}\right\}=E\Big\{x^T(t)\Big[f_1\left(t,\xi_1\left(\omega\right)\right)\left(A^T H+HA\right)+f_2^2\left(t,\xi_2\left(\omega\right)\right)\Big]x\left(t\right)+ \\
+\varphi(\sigma)\Big[g^T H+Xf_1\left(t,\xi_1\left(\omega\right)\right)l^T A\Big]x(t)+x^T(t)Hg\varphi(\sigma)+ \\
+\frac{1}{2}X\varphi(\sigma)f_2^2\left(t,\xi_2\left(\omega\right)\right)x^T(t)B^T ll^T Bx(t)\Big\}.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

За умови (3) матимемо

$$
l^T x(t)\varphi(\sigma)-\frac{\varphi^2(\sigma)}{k}>0,
$$

тоді рівність (12) перетвориться у нерівність

$$
\begin{gathered}
E\left\{\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}\right\}\le E\left\{\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}\right\}+E\left\{l^T x(t)\varphi(\sigma)-\frac{\varphi^2(\sigma)}{k}\right\}= \\
=E\Big\{x^T(t)\Big[f_1\left(t,\xi_1\left(\omega\right)\right)\left(A^T H+HA\right)+f_2^2\left(t,\xi_2\left(\omega\right)\right)B^T HB\Big]x\left(t\right)\Big\}+ \\
+E\left\{\varphi^T(\sigma)\left[g^T H+\frac{1}{2}Xf_1\left(t,\xi_1\left(\omega\right)\right)l^T A+\frac{1}{2}l^T\right]x(t)\right\}+
\end{gathered}
$$

$$+E\left\{\varphi(\sigma)\left[Hg+\frac{1}{2}Xf_1\left(t,\xi_1(\omega)\right)A^T l+\frac{1}{2}l\right]x^T(t)\right\}+$$

$$+E\left\{\varphi^T(\sigma)\left[Xl^T g-\frac{1}{k}\right]\varphi(\sigma)+\frac{1}{2}Xf_2^2(t,\xi)\overset{\circ}{\varphi}(\sigma)x^T(t)B^T ll^T Bx(t)\right\}.$$

Останню нерівність запишемо у векторно-матричній формі

$$E\left\{\left.\frac{dv(x,\sigma)}{dt}\right|_{(1)}\right\}\le E\left\{\tilde{x}^T(t)\tilde{C}\tilde{x}(t)\right\}, \tag{13}$$

де $\tilde{x}^T(t)\equiv\left(x(t)\varphi,\sqrt{\overset{\circ}{\varphi}}x^T(t)\right)$,

$$\tilde{C}\equiv\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix} \tag{14}$$

з відповідно визначеними елементами

$$c_{11}\equiv f_1(t,\xi_1)\left[A^T H+HA\right]+f_2^2(t,\xi_2)B^T HB;$$

$$c_{21}=c_{12}^T=Hg+\frac{1}{2}Xf_1(t,\xi_1)A^T l+\frac{1}{2}l;$$

$$c_{13}=c_{31}=0;\ c_{23}=c_{32}=0;$$

$$c_{22}=\frac{1}{k}-Xl^T g;\ c_{33}=\frac{1}{2}Xf_2^2(t,\xi_2)B^T ll^T B.$$

Математичне сподівання (13) від'ємне на розв'язках $x(t)\equiv x(t,\omega)$ системи (1) тоді і тільки тоді, коли симетрична матриця

$$E\left\{f_1(t,\xi_1)\right\}\left(A^T H+HA\right)+E\left\{f_2^2(t,\xi_2)\right\}B^T HB \tag{15}$$

від'ємно визначена, а блочна симетрична матриця $\tilde{C}$ недодатно визначена [1] і позначатимемо надалі $\tilde{C}\le 0$, а матриця

$$E\left\{f_1(t,\xi_1)\right\}\left[A^T H+HA\right]+E\left\{f_2^2(t,\xi_2)\right\}B^T HB$$

від'ємно визначена тоді і тільки тоді, коли матриця H є розв'язком матричного рівняння Сільвестра (7), у якому існують природно математичні сподівання

$$\begin{aligned} &0<E\left\{f_1\left(t,\xi_1(\omega)\right)\right\}\le K_1<\infty,\\ &0<E\left\{f_2^2\left(t,\xi_2(\omega)\right)\right\}\le K_2<\infty.\end{aligned} \tag{16}$$

Матриця $\tilde{C}$ (14) недодатно визначена лише у випадку недодатної визначеності матриць-блоків, що стоять на її головній діагоналі, а саме:

матриця $\frac{1}{2}XE\left\{f_2^2\left(t,\xi_2\left(\omega\right)\right)\right\}B^T ll^T B$ недодатно визначена тоді і тільки тоді, коли число $X<0$, число $Xl^T g-\frac{1}{k}<0$, що еквівалентно умові

$$l^T g>0. \tag{17}$$

Таким чином, для недодатної визначеності блочної матриці $\tilde{C}$ (14) за умови $X<0$, (7) та (17) вимагається також недодатна визначеність такої матриці

$$\tilde{C}_1 \equiv$$

$$\equiv\begin{bmatrix} -\overset{\circ}{I} & Hg+\frac{1}{2}XE\left\{f_1\left(t,\xi_1\left(\omega\right)\right)\right\}A^T l+\frac{1}{2}l \\ \left(Hg+\frac{1}{2}XE\left\{f_1\left(t,\xi_1\left(\omega\right)\right)\right\}A^T l+\frac{1}{2}l\right)^T & Xl^T g-\frac{1}{k}\end{bmatrix}\le \tag{18}$$

$$\le 0_{(n+1)\times(n+1)}.$$

Вимога (17) означає гурвіцевість матриці $E\left\{f_1\left(t,\xi_1\left(\omega\right)\right)\right\}A+kgl^T$, що характеризує експоненціальну стійкість матриці A [2, 3, 5].

Запишемо умову додатної визначеності функції Ляпунова (6) на лінійній характеристиці гурвіцевого кута $\varphi\left(\sigma\right)=k\sigma$, а саме

$$\begin{aligned} v\big|_{\varphi(\sigma)=\sigma} &= x^T Hx+X\int_0^\sigma kydy=x^T Hx+\frac{1}{2}Xky^2\Big|_{y=0}^{y=l^T x^2}= \\ &=x^T\left(H+\frac{1}{2}Xkll^T\right)x>0. \end{aligned} \tag{19}$$

Звідки випливає додатна визначеність матриці

$$H+\frac{1}{2}Xkll^T>0_{(n+1)\times(n+1)}.$$

Домножимо цю нерівність зліва на l^T, а справа на l, одержимо еквівалентну нерівність

$$l^T Hl+\frac{1}{2}Xk\left(l^T l\right)^2>0,$$

звідки

$$-\frac{2l^T Hl}{k\left(l^T l\right)^2}<X<0. \tag{20}$$

Таким чином, умова від'ємної визначеності математичного сподівання: $E\left\{\frac{dv(x,\sigma)}{dt}\right\}$ вимагає:

1) від'ємну визначеність матриці
$$E\left\{f_1\left(t,\xi_1(\omega)\right)\right\}\left[A^T H + HA\right] + E\left\{f_2^2\left(t,\xi_2(\omega)\right)\right\}B^T HB$$

(умова (7)) та виконання нерівності
$$\det \tilde{C}_1 < 0.$$

Розкриваючи цей визначник за останнім стовпчиком, будемо мати
$$\left[Hg + \frac{1}{2}\left(XE\left\{f_1\left(t,\xi_1\right)\right\}A^T l + \overset{\circ}{I}\right)l\right]^T \times$$
$$\times\left[E\left\{f_1\left(t,\xi_1\right)\right\}\left(A^T H + HA\right) + E\left\{f_2^2\left(t,\xi_2\right)\right\}B^T HB\right]^{-1} \times \qquad (21)$$
$$\times\left[Hg + \frac{1}{2}\left(XE\left\{f_1\left(t,\xi_1\right)\right\}l + \overset{\circ}{I}\right)l\right] < Xl^T g - \frac{1}{k}\overset{\circ}{I}.$$

Результати дослідження сформулюємо теоремами.

Теорема 1. Нехай на ймовірносному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, R)$ задана система (1). Якщо виконуються умови:

1) матриця $E\{f_1(t,\xi_1)\}A + E\{f_1(t,\xi_1)\}kgl^T$ гурвіцева, де $l^T g > 0$;
2) існує додатно визначений розв'язок H матричного рівняння (7) і існує $E\{f_1(t,\xi_1)\} < \infty$ (16);
3) виконується матрична нерівність (18) з вибором $X < 0$ за умови (20);
4) виконується нерівність (21).

Тоді положення рівноваги $x(t) \equiv 0$ системи (1), (2) абсолютно стійке в середньому квадратичному.

Теорема 2 [5]. Нехай існує функція $v(x,t) \in C(D)$, де
$$D \equiv \left\{x \in R^n, t \geq t_0 \geq 0, \left|\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right| < \mu, \mu > 0\right\},$$

яка задовольняє умови

a) $$F_1(|x|) \leq v(x,t) \leq F_2(|x|); \qquad (22)$$

b) похідна $v(x,t)$ по t в силу системи (1)
$$\frac{dv(x,\sigma)}{dt} \leq F_3(|x|), \qquad (23)$$

де $F_i(r) \in C([0,+\infty])$, $F_i(0)=0$, причому

$$\lim F_i(r)=\infty,\ i=\overline{1,3}. \tag{24}$$

Тоді: I) тривіальний розв'язок $x(t)\equiv 0$ системи (5) асимптотично стійкий за Ляпуновим;

II) $$|x| \le F_1^{-1}\left[S^{-1}\left(\left(t-t_0\right), v\left(x\left(t_0\right), t_0\right)\right)\right]. \tag{25}$$

Умова (25) для системи (1), (2) набуде вигляду

$$\left|x(t)\right| \le \sqrt{\frac{\lambda_{\max}\left(\tilde{H}\right)}{\lambda_{\min}\left(\tilde{H}\right)}}\left|x\left(t_0\right)\right| \exp\left(-\frac{\lambda_{\min}\left(\tilde{H}\right)}{2\lambda_{\max}\left(\tilde{H}\right)}\left(t-t_0\right)\right).$$

У нерівності (25) S визначена так

$$S\left(v, v_0\right)=\int_{t_0}^{t} \frac{dv}{F_3\left[F_2^{-1}(v)\right]} \le -\left(t-t_0\right),$$

Висновок. Результати, одержані в теоремах 1, 2 носять алгебраїчний характер, можуть бути застосовані для дослідження стійкості розв'язків наведених рівнянь з використанням сучасних комп'ютерів та є узагальненням уже відомих результатів праць [6; 7].

Список використаних джерел:

1. Айзерман М. А. Абсолютная устойчивость регулируемых систем / М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер. — М. : Изд-во АН СССР, 1963. — 159 с.
2. Гихман Н. Н. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение / Н. Н. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наукова думка, 1982. — 612 с.
3. Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры / И. Я. Кац — Екатеринбург : Изд-во Урал. акад. путей сообщ., 1998. — 222 с.
4. Пугачев В. С. Стохастические дифференциальные системы / В. С. Пугачев, И. Н. Синицын. — М. : Наука, 1985. — 560 с.
5. Хусаинов Д. Я. Линейные динамические системы с последействием / Д. Я. Хусаинов, Й. Диблик, М. Ружичкова. — К. : Госуд. предпр. «Информационное аналитическое агентство», 2015. — 252 с.
6. Царьков Е. Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений / Е. Ф. Царьков. — Рига : ЗИНАТНЕ, 1989. — 421 с.
7. Ясинський В. К. Стабілізація у динамічних системах випадкової структури / В. К. Ясинський, Е. В. Ясинський, І. В. Юрченко. — Чернівці : Золоті литаври, 2011. — 738 с.

The sufficient conditions of firmness in mean square was justified for trivial solution of stochastic dynamic system of automatic regulation Viener-Ito with external random perturbations.

Key words: *the automatic regulation, the external perturbations, the stochastic differential equations, the firmness.*

Отримано: 19.07.2016