4. Коломис О. М., Луц Л. В. Алгоритм обчислення оцінок спектральної щільності. *Питання оптимізації обчислень (ПОО-XLII)* : праці міжнар. наук. школи-семінару, присвяченої 85-річчю від дня народження академіка В. С. Михалевича (21-25 вересня 2015 р.). Київ: Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, 2015. С. 45–46.
5. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных чисел. М.: Наука, 1970. 564 с.

The estimation of the rounding error of the algorithm for calculating the primary estimate of the spectral density are developed. are obtained.

Key words: *the primary estimate of the spectral density, rounding error, fast Fourier Transform.*

Одержано 17.02.2017

УДК 519.685.3

Г. І. Кудін, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

ОПТИМІЗАЦІЯ ЛІНІЙНОЇ КЛАСИФІКАЦІЇ СИГНАЛІВ ЗАСОБАМИ ЗБУРЕННЯ ПСЕВДООБЕРНЕНИХ МАТРИЦЬ

З використанням засобів збурення псевдообернених матриць запропонована схема оптимізації лінійної класифікації сигналів. Алгоритми оптимального перетворення окремих компонент векторів простору ознак у ряді випадків дозволяють розв'язувати задачу класифікації залишаючись у рамках лінійної моделі. При невдачі такого підходу приводиться алгоритм кусково лінійної класифікації.

Ключові слова: *синтез систем класифікації, псевдо обернені та проекційні матриці.*

Вступ. Протягом останніх двадцяти років в України за участю наукових співробітників Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України розв'язано ряд вагомих як теоретичних, так і прикладних проблем з використанням засобів псевдообернення. У значній мірі це визначається теретичними результатами стосовно обчислень псевдообернених матриць при різнотипних збуреннях вихідних матриць. З використанням властивостей псевдообернених матриць були запропоновані [1, 2] ефективні алгоритми для розв'язування задач лінійної класифікації та кластеризації — в аналітичному вигляді були подані умови лінійної роздільності скінчених множин в евклідовому просторі, віддалі відповідності елементів скінчених множин до відповідних гіперплощин — лінійних кластерів. За умов великої розмірності просторів ознак, значних об'ємів навчальних множин лінійна класифікація може виявитись найбільш прийнятною, тому доцільно шукати в рамках інформації про об'єкти дослідження можливості зменшувати розмірності матриць, які використовуються в процесі необхідних обчислень. У різних областях потреб класифікації ці питання не залишаються поза увагою математиків, досягається прогрес, як правило, за рахунок нелінійних деформацій простору ознак або ігноруванням деяких елементів виборок. Водночас постановка задачі може вимагати оцінку впливу тієї чи іншої компоненти вектора ознак або конкретного елемента виборки на результат (або не результат) процесу класифікації. Далі пропонується оптимізувати лінійну роздільність множин лінійною комбінацією лінійно незалежних компонент векторів ознак навчальної виборки, яка при потребі доповнюється елементами схеми кусково лінійної класифікації.

1. Математичний апарат псевдообернених матриць. Вводяться представлення матриці $A \in R^{m\times n}$ з елементами a_{ij} :

$$A = \left(a(1)\vdots\ldots\vdots a(n)\right) \equiv \left(a_{(1)}\vdots\ldots\vdots a_{(m)}\right)^T \in R^{m\times n},$$

де $a(j) \in R^m$ — вектори стовпчиків, а $a_{(i)} \in R^n$ — вектори рядків матриці A, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Для матриці $A \in R^{m\times n}$ псевдообернену матрицю $A^+ \in R^{n\times m}$ можна визначити згідно умови:

$$\forall b \in R^m,\ A^+ b = \arg\min_{x\in\Omega_A(b)} \|x\|^2,$$

де $\Omega_A(b) = Arg \min\limits_{x \in R^n} \|Ax - b\|^2$.

В практиці застосування псевдообернення важливими є матриці, які визначаються з використанням матриць A и A^+ : проекційна матриця $Z(A) = I_n - A^+ A$, а також матриця $R(A) = A^+ (A^+)^T$.

1.1. Залежність псевдообернених матриць від приєднання довільних вектор-рядків до вихідної матриці [3]**.** Якщо передбачити, що до матриці A добавляється новий рядок $a^T \in R^n$ після $(i-1)$-го рядка ($i = \overline{2,\ m+1}$), тобто утворюється матриця

$$A_{i,a} = (a_{(1)}\vdots\ldots\vdots a_{(i-1)}\vdots a\vdots a_{(i)}\vdots\ldots\vdots a_{(m)})^T \in R^{(m+1)n},$$

то при відомій псевдооберненій матриці $A^+ \in R^{n\times m}$ для рекурентного обчислення псевдооберненої матриці $A^+_{i,a} \in R^{n\times(m+1)}$ мають місце співвідношення — прямі формули Гревіля – Кириченка.

1.2. Залежність псевдообернених матриць від видалення довільних вектор-рядків з вихідної матриці [3]. Якщо передбачити, що для матриці $A_{i,a} \in R^{(m+1)\times n}$ (після $(i-1)$-го рядка ($i=\overline{2,\ m+1}$) матриці A стоїть вектор-рядок a^T), відома псевдообернена матриця $A_{i,a}^{+} \in R^{n\times(m+1)}$, то для обчислення псевдооберненої матриці $A^{+} \in R^{n\times m}$ (рядок a^T з матриці $A_{i,a}$ видаляється) мають місце обернені формули Гревіля – Кириченка.

2. Алгоритм лінійної класифікації сигналів [1, 2]. Нехай для точок $x(j) \in R^m$, $j=\overline{1,n}$ (додаткова компонента $x_m(j)=1$) відомо, що точки $x(i_k) \in R^m$, $k=\overline{1,\ n_1}$ знаходяться в першому класі Ω_{x1}, $\Omega_{x1}=\{x:\ x=x(i_1),...,x(i_{n_1-1}),x(i_{n_1})\}$, точки $x(i_s)= \in R^m$, $s=\overline{1,\ n_2}$ — в другому, тобто $x(j_s) \in \Omega_{x2}$.

Необхідна і достатня умова лінійної роздільності цих класів така:

$$\min_{y\in\Omega_y} y^T Z\begin{pmatrix} X^T & \cdots & J_n \end{pmatrix}^T y = y_*^T Z\begin{pmatrix} X^T & \cdots & J_n \end{pmatrix}^T y_* = 0,$$

де $X=\left(x(1)\vdots\ldots\vdots x(n)\right)\in R^{m\times n}$, $\Omega_y=\{y:\ y=(y(1),...,y(n))^T$, $y(i_k)\geq 1$, $k=\overline{1,\ n_1}$, $y(j_s)\leq -1$, $s=\overline{1,\ n_2}\}$, $J_n=(1,1,\ ...\ ,1)^T \in R^n$, а сам вектор $a \in R^{m+1}$, який задовольняє умові приймає значення

$$a=\begin{pmatrix} X^T & \cdots & J_n \end{pmatrix}^{+} y_*.$$

Відстань між гіперплощинами визначається виразом

$$h=2(\|a\|^2-a_{m+1}^2)^{-1/2},\ e(m+1)=(0,0,...,0,1)^T \in R^{m+1}.$$

3. Оптимізація простору векторів ознак. Якщо умова лінійної роздільності не виконується, тобто розділяючих гіперплощин між множинами $x(i_k)\in R^m$, $k=\overline{1,\ n_1}$ та $x(j_s)\in R^m$, $s=\overline{1,\ n_2}$ не виявлено, то подальший пошук розділяючих гіперплощин доцільно здійснювати за допомогою засобів збурення псевдообернених і проекційних матриць. У роботі [2] введено поняття найменш інформативної координати x_{i^*} з простору ознак, яка визначається згідно умови

$$y_*^T Z(X_{i^*}^T)y_* = \min_{i=\overline{1,n}} y_*^T Z(X_i^T)y_*,$$

$$X_i=\begin{pmatrix} x_{(1)} & \cdots & x_{(i-1)} & x_{(i+1)} & \cdots & x_{(m)} \end{pmatrix}.$$

Отже, можна чекати, що заміна найменш інформативної (чи взагалі неінформативної) компоненти x_{i^*} у векторі ознак $x=(x_1,\dots,x_m)^T$

деякою новою лінійно незалежною компонентою x_0, тобто утворення і розгляд нового вектора ознак $\left(x_1, \ldots, x_{i^*-1}, x_0, x_{i^*+1}, \ldots, x_m\right)^T$, дозволить поліпшити умову роздільності множин.

З наведеного вище, варіантом дій з поліпшенням умови лінійної роздільності множин є здійснення таких кроків:

1) серед рядків матриці X визначається найменш інформативний;
2) з усіх або частини лінійно незалежних рядків матриці X формується лінійна оболонка: P_x, $x_{(0)}^T \in P_x$, $x_{(0)}^T = \sum_{\kappa \in Q} \alpha_\kappa x_{(\kappa)}^T$,

де Q — множина індексів лінійно незалежних рядків вихідної матриці X, α_κ — невизначені коефіцієнти;

3) в матриці $\begin{pmatrix} X^T & \cdots & J_n \end{pmatrix}^T$ найменш інформативний рядок заміняється рядком з оболонки P_x;
4) невизначені коефіцієнти α_κ, вектор y_* визначаються згідно наступної умови оптимальності — розширеної умову роздільності множин

$$y_*^T Z(X_{(i^*, x_{(0)})}) y_* \to \min_{x_0 \in P_x, y \in \Omega_y}.$$

При негативному результаті описаних вище дій залишається можливість побудови кусково-лінійної полоси роздільності.

4. Фільтрація роздільних підмножин до властивості кусково-лінійної класифікації сигналів [3]**.** Суть технології полягає у послідовному видаленні з навчальної вибірки таких елементів, які обумовлюють найбільше зменшення величини

$$y_*^T Z\begin{pmatrix} X^T & \cdots & J_n \end{pmatrix}^T y_*.$$

Якщо лінійна роздільність відфільтрованої підмножини Ω_x виникає за рахунок послідовного вилучення з вихідної множини декількох її членів, тобто підмножина $\Omega_x \setminus \Omega_x(1)$, де $\Omega_x(1) = \Omega_{x1}(1) \cup \Omega_{x2}(1)$, — лінійно роздільна підмножина (для неї встановлюється своя полоса роздільності), то відносно підмножини $\Omega_x(1)$ проводяться дії з забезпечення її роздільності. Процес у подальшому може здійснюватись в рамках s-кусково-лінійно роздільної множин [3]. Якщо множина Ω_x є s-кусково-лінійно роздільною, тоді підмножини $\Omega_x \setminus \Omega_x(1)$,..., $\Omega_x(s-2) \setminus \Omega_x(s-1)$, $\Omega_x(s-1)$ кусково-лінійно роздільні, будуть визначені вектори $a(1)$, ... , $a(s)$ — вектори-нормалі відповідних їм розділяючих гіперплощин, а також величини h_i, $i = \overline{1, s}$ — відстані між знайденими гіперплощинами. Для покращення якості кусково-лінійно розділення множини Ω_x є можливість збільшити міру s-кусково-лінійної роздільності $h = \min_{i=\overline{1,\,s}} \{h_i\}$.

Висновки. Методи псевдообернення, теорія збурення псевдообернених і проекційних матриць, дозволяють побудувати конструктивні схеми засобів виділення у скінченому просторі дискретних точок роздільних підмножин, дозволяють оптимізувати такі процеси, використовуючи аналітичні вирази умов лінійної роздільності множин, визначити оцінки інформативності компонент векторів простору ознак, при потребі організувати перебір елементів підмножин у процесі кусково-лінійної класифікації.

Список використаних джерел:

1. Кириченко Н. Ф., Кривонос Ю. Г., Лепеха Н. П. Оптимизация синтеза гиперплоскостных кластеров и нейрофункциональных преобразований в системах классификации сигналов. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. № 6. С. 107–124.
2. Кириченко Н. Ф., Кривонос Ю. Г., Лепеха Н. П. Синтез систем нейрофункциональных преобразователей в решении задач классификации. *Кибернетика и системный анализ*. 2007. № 3. С. 47–57.
3. Кириченко Н. Ф., Кудин Г. И. Анализ и синтез систем классификации сигналов средствами возмущений псевдообратных и проекционных операций. *Кибернетика и системный анализ*. 2009. № 3. С. 47–57.

With the use of facilities of indignation pseudoinverse matrices the offered chart of optimization of linear classification of signals. Thealgorithms of optimal transformation of separatecomponents of vectors of space of signs in a number of cases allow to decide the task of classification, remaining within the framework of linear model. At the failure of such approach an algorithm over is brought cobbed linear classification.

Key words: *synthesis of the systems of the classification, pseudoreverse and projection matrixes.*

Одержано 06.03.2017