УДК 519.14

Н. К. Тимофієва, д-р. техн. наук, с. н. с.
Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем НАН та МОН України, м. Київ

ПРО ФРАКТАЛЬНУ СТРУКТУРУ ЗНАКОВИХ КОМБІНАТОРНИХ ПРОСТОРІВ

Описано утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій, які є точками знакових комбінаторних просторів. Із утворених комбінаторних множин випливає, що ці простори існують в двох станах: згорнутому (спокої) та розгорнутому (динаміці). Вони одночасно є скінченними та нескінченними і для них властива самоподібність, що характерно фрактальним структурам.

Ключові слова: *знакові комбінаторні простори, фрактали, самоподібність, комбінаторна конфігурація, комбінаторна множина.*

Вступ. У статті розглядаються утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій, відповідно і знакових комбінаторних просторів, які існують в двох станах: згорнутому (спокої) та розгорнутому (динаміці). Вони розгортаються з елементів базових множин за заданими правилами. Згорнутий задається знаком, який містить властивості розгорнутих просторів. Точкою розгорнутого простору є комбінаторні конфігурації певного типу. Розгорнуті простори мають різноманітне впорядкування, як хаотичне, так і строге. Вони впорядковуються за рекурентними правилами та мають фрактальну структуру.

Досліджені в літературі комбінаторні простори, як правило, зводять до метричних, наприклад [1, 2]. Деякі автори вважають, що точками комбінаторного простору є рекурсивні функції [3]. В літературі також описано евклідові комбінаторні простори. На практиці при розв'язанні задач комбінаторної оптимізації використовують упорядковані множини комбінаторних конфігурацій, для яких проводиться їхня нумерація. Тому метричні комбінаторні простори розглядаються і як простори впорядкувань.

Але характерною особливістю комбінаторних просторів є не просто існування заданої множини точок комбінаторного характеру, між якими уведено віддаль, а утворення їх із елементів однієї або кількох базових множин з використанням певної системи правил. Для задання комбінаторного простору достатньо увести одну або кілька базових множин, із елементів яких формуються його точки, тип комбінаторної конфігурації та систему правил, за допомогою яких він розгортається.

Далі розглянемо утворення та впорядкування комбінаторних множин, комбінаторні конфігурації яких є точками знакових комбінаторних просторів, покажемо, що комбінаторні множини, відповідно і ці простори мають фрактальну структуру. Спочатку наведемо деякі властивості фракталів.

Фрактали. Точного означення фракталів ще не сформульовано, тому наведемо їхнє емпіричне означення. Фрактали — це фігури, які є результатом математичних процесів, що повторюються, володіють самоподібністю в будь-якому вимірі та мають фрактальну розмірність [4].

Фрактали розділяють на такі типи: самоповторні, лінійні, самоподібні, квазісамоподібні, статистично самоподібні. Самоподібні фрактали містять зменшені копії фігури всуціль, які змінені з допомогою нелінійних функцій (множина Жюліа). Квазісамоподібні — ідентичні в різних вимірі. Вони містять зменшені та деформовані копії усієї фігури всуціль та утворені за допомогою рекурсивних процедур (множина Мандельброта, фрактал Ляпунова) [4].

Згідно з цією класифікацією, комбінаторні множини, відповідно і знакові комбінаторні простори можна віднести як до самоподібних так і квазісамоподібних фракталів. Вони утворюються рекурсивними процедурами, характеризуються самоподібністю, одночасно скінченні та нескінченні, містять інші фрактали всередині себе (множина Мандельброта). При їхньому впорядкуванні у множині можна виділити внутрішні (закриті) точки і зовнішні, орбіта яких виходить в безкінечність (множина Жюліа).

Базові множини та комбінаторні конфігурації. Оскільки точками знакових комбінаторних просторів є комбінаторні конфігурації певного типу, розглянемо, як вони утворюються та за якими правилами впорядковуються.

Комбінаторною конфігурацією назвемо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів заданої множини $A = \{a_1, ..., a_n\}$ [5]. Позначимо її впорядкованою множиною $w^k = (w_1^k, ..., w_\eta^k)$. Під символом $w_j^k \in A$ розуміємо як окремі елементи, так і підмножини (блоки), $\eta \in \{1, ..., n\}$ — кількість елементів у w^k, $W = \{w^k\}_1^q$ — множина комбінаторних конфігурацій. Верхній індекс k ($k \in \{1, ..., q\}$) у w^k позначає порядковий номер w^k у W, q — кількість w^k у W.

Комбінаторні конфігурації будь-якого типу формуються з елементів заданої множини характерною для кожного з них операцією. Одні з цих операцій змінюють порядок розміщення в них елементів, інші змінюють їхній склад.

Означення 1. Множину $A = \{a_1, ..., a_n\}$, з елементів якої утворюються комбінаторні конфігурації, назвемо базовою.

Означення 2. Рекурентним комбінаторним оператором назвемо сукупність правил, за допомогою яких з елементів базової множини A утворюється комбінаторна конфігурація w^k.

Різноманітні типи комбінаторних конфігурацій утворюються за допомогою трьох рекурентних комбінаторних операторів: вибирання, транспозиція, арифметичний.

Справедливість цього твердження випливає з аналізу комбінаторних конфігурацій.

Ураховуючи вищевикладене, узагальнимо способи утворення комбінаторних конфігурацій.

Комбінаторні конфігурації w^k з елементів базової множини A утворюються рекурентним комбінаторним оператором вибирання. Комбінаторна конфігурація w^k у множині W утворюється з $w^i \in W$, $k < i$, рекурентним комбінаторним оператором транспозиції або арифметичним. Перша w^1 утворюється з елементів множини A операцією вибирання.

Дійсно, якщо w^k — перестановка, то вона містить усі елементи з базової множини A. Тому наступна w^k утворюється оператором транспозиції з будь-якого попереднього w^i. Якщо w^k — розбиття числа, то сума його компонент є число n і наступне w^k утворюється арифметичною операцією з будь-якого попереднього w^i. Бінарна послідовність w^k утворюється з w^i арифметичною операцією.

Якщо w^k — вибірка і відрізняється від попередніх хоча б одним елементом a_j, який вибирається лише з базової множини A, то w^k неможливо утворити з будь-якої попередньої w^i операцією вибирання, тобто рекурентним комбінаторним оператором вибирання w^k утворюється з будь-якої w^i, $i < k$, якщо w^i містить усі елементи, необхідні для формування w^k.

Оскільки базова множина A містить усі елементи, необхідні для формування $w^k \in W$, то перша $w^1 \in W$ для усіх типів комбінаторних конфігурацій утворюється з A оператором вибирання.

Отже, тип комбінаторної конфігурації $w^k \in W$ визначається рекурентним комбінаторним оператором, за допомогою якого він утворюється з елементів базової множини A або з попередньої $w^{k-1} \in W$.

Упорядкування комбінаторних конфігурацій. У природі існує скінченне число множин комбінаторних конфігурацій одного і того ж типу, кожна з яких може бути впорядкована різними способами. Як показав аналіз цих множин, вони можуть упорядковуватися одними і тими самими процедурами, тобто існують закономірності їхнього генерування. Однією з таких властивостей є властивість періодичності, яка випливає з рекурентного способу утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій.

Генерування комбінаторних конфігурацій включає:

а) правила, за якими формуються комбінаторні конфігурації, тобто визначаються рекурентні комбінаторні оператори;
б) правила, за якими упорядковуються комбінаторні об'єкти. Ці правила визначаються на основі аналізу структури певної множини.

Упорядкуємо множину W комбінаторних конфігурацій w^k, $k \in \{1,...,q\}$ так, що наступна комбінаторна конфігурація w^{k+1} формується з попередньої w^k або з базової множини A характерним для заданого їхнього типу рекурентним комбінаторним оператором (транспозицією, вибиранням або арифметичним оператором).

Оскільки в упорядкованій множині комбінаторних конфігурацій w^k розміщені в певному порядку, то при розробці процедур їхнього генерування множину A, з елементів якої оператором вибирання утворюються w^k, розглянемо як упорядковану і позначимо її $A = (a_1 ,..., a_n)$. Комбінаторну конфігурацію $w^k = (w_1^k ,..., w_\eta^k) \in W$ також вважаємо впорядкованою.

У будь-якій впорядкованій множині комбінаторних конфігурацій виділимо інтервал $L_{b,c}\,(b < c)$ — підмножину впорядкованих w^k з початковим номером b і кінцевим c. Його довжиною назвемо кількість комбінаторних конфігурацій, які містяться в цьому інтервалі включаючи b і c.

У множині комбінаторних конфігурацій виділимо найменшу підмножину, комбінаторні конфігурації в якій утворюються за одним і тим же правилом. Наприклад у множині перестановок наступна перестановка формується з попередньої однією транспозицією двох сусідніх (першого і другого, або другого і третього) елементів. Назвемо цю аідмножину інтервалом нульового рангу. Певна кількість інтервалів нульового рангу утворює інтервал першого рангу, останні утворюють інтервал другого рангу і т. д. З інтервалів $(\sigma - 1)$-го рангу утворюється інтервал σ-го рангу.

Отже, множина W будь-якого типу комбінаторних конфігурацій впорядковується інтервалами нульового рангу і процес їхнього впорядкування є періодичний. Інтервал σ-го рангу впорядкованої множини всіляких комбінаторних конфігурацій складається з інтервалів $(\sigma-1)$-го рангу. Звідси випливає така властивість.

Властивість періодичності впорядкування комбінаторних множин випливає з рекурентного способу утворення комбінаторних конфігурацій і полягає в тому, що ці множини впорядковані інтервалами, в кожному з яких комбінаторні конфігурації утворюються за одними і тими самими правилами.

Для генерування множин комбінаторних конфігурацій з урахуванням властивості періодичності необхідно сформулювати три правила, за якими утворюються: а) інтервал нульового рангу, б) обмежувальна комбінаторна конфігурація (перша в інтервалі нульового рангу), в) інтервал σ-го рангу.

Фрактальні властивості комбінаторних множин. Отже, певне впорядкування комбінаторних конфігурацій з використанням властивості періодичності утворює комбінаторну множину, яка має фрактальну природу. Вважаємо, що комбінаторні множини *самоподібні*, якщо їхні елементи утворюються одним і тим же рекурентним комбінаторним оператором, а їхнє впорядкування проводиться за одними і тими ж правилами.

Згідно з властивістю самоподібності інтервал σ-го рангу упорядкованої множини W складається з інтервалів $(\sigma-1)$-го рангу. Оскільки число n може набувати довільних значень, то W одночасно — скінченна та нескінченна, Підмножина W_η розміщень з повтореннями (або сполучень з повтореннями, розбиття n-елементної множини на підмножини) — скінченна, а множина W цих же комбінаторних конфігурацій для того ж самого n — нескінченна. Такі властивості характерні для фракталів. Тобто, комбінаторні множини мають фрактальну природу.

Оскільки інтервал σ-го рангу складається з інтервалів $(\sigma-1)$-го рангу, а інтервал 1-го рангу — з інтервалів нульового рангу, нескладно, знаючи правила їхнього впорядкувння, визначати кількість комбінаторних конфігурацій у їхній множині. За певними правилами, які різні для різних типів комбінаторних конфігурацій, утворюємо скінченну послідовність, кожне значення якої задає кількість w в інтервалах σ-го рангу. Формулу комбінаторного числа (кількість w у множині W) подамо σ-значною сумою $\sum_{j_\sigma=1}^{H_\sigma}(\sum_{j_{\sigma-1}=1}^{H_{\sigma-1}}(\ldots(\sum_{j_2=1}^{H_2}(\sum_{j_1=1}^{H_1}(h)))\ldots))$, де H_t — кількість інтервалів σ-го рангу, $t \in \{1,\ldots,\sigma\}$, $\sigma \in \{2,\ldots,n\}$, h — кількість комбінаторних конфігурацій в інтервалі нульового рангу. Цей вираз наглядно показує, що комбінаторна множина має фрактальну структуру.

Аксіоми знакових комбінаторних просторів. Виходячи з утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій, сформулюємо аксіоми знакових комбінаторних просторів.

1. Знакові комбінаторні простори існують в двох станах: спокої (згорнутий) та динаміці (розгорнутий).
2. Згорнутий простір задається інформаційним знаком $\Re = < A,\ T, \Im, \Xi >$, який містить властивості розгорнутого простору певного типу, де A — одна або кілька базових множин, з елементів $a_{l_j} \in A_l \subset A$, яких утворюються розгорнуті комбінаторні простори, $j \in \{1,...,n\}$, $\boldsymbol{l} \in \{1,...,\tilde{q}\}$, $\tilde{q}$ — кількість базових множин; T — тип знакового комбінаторного простору; $\Im$ — правила його розгортання; Ξ — правила згортання знакового комбінаторного простору.
3. Утворення із згорнутого розгорнутих комбінаторних просторів проводиться за рекурентними правилами. Точкою розгорнутого простору є комбінаторна конфігурація певного типу. Розгортанню комбінаторного простору характерна властивість періодичності, яка випливає з рекурентного способу утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій.
4. Згортання знакового комбінаторного простору певного типу проводиться з точок як одного так і кількох просторів. Згорнутий простір має властивості просторів, з яких він згорнувся.

Якщо правила розгортання ґрунтуються на строгих законах, то знаковий розгорнутий комбінаторний простір — структуризований. Якщо правила розгортання цього простору не підпорядковані строгим законам, то розгорнутий простір утворюється безладно. Розгортанню комбінаторного простору характерна властивість періодичності, яка випливає з рекурентного способу утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій. Метричні, евклідові, рекурсивні простори — це розгорнуті знакові комбінаторні простори. Оскільки комбінаторні множини мають фрактальну структуру, то і знаковим комбінаторним просторам також характерна ця властивість.

Висновки. Вивчення та дослідження знакових комбінаторних просторів дозволяє використовувати їх при розв'язанні деяких задач із штучного інтелекту (розпізнавання мовленнєвих сигналів) або пояснювати деякі природні явища, пов'язані з фрактальною структурою, особливо у живій природі.

Список використаних джерел:

1. Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. К.: Наук. думка, 1981. 281 с.
2. Бурдюк В. Я. Дискретное метрическое пространство. Днепропетровск. ДГУ, 1982. 99 с.
3. Skordev D. Recursion theory on iterative combinatory spaces. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér Sci. Math. Astronom. Phys*. 1976. 24**,** N 1. P. 23–31.
4. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет. 2000. 352 с.
5. Тимофієва Н.К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації. Автореф. дис... докт. техн. наук. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Київ. 2007. 32 с.

Formation and regulation of combinatorial configurations which are the points of significant combinatorial space is described. From formation combinatorial sets follows that these spaces exist in two states: convolute (tranquility) and unfolding (dynamics). They simultaneously are eventual and endless and for them peculiar selfsimilarity, that characteristically to the structures of fractals.

Key words: *significant combinatorial space, fractals, selfsimilarity, combinatorial configurations, combinatorial set.*

Одержано 07.02.2017

УДК 519.6

І. С. Томанова, аспірантка

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

ПРО ВИКОРИСТАННЯ СПЛАЙНІВ П'ЯТОГО СТЕПЕНЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ЗГИН ЖОРСТКО ЗАЩЕМЛЕНОЇ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ

В роботі розглянуто використання сплайнів 5-го степеня на трикутній сітці вузлів для розв'язання задачі про згин для жорстко защемленої круглої пластини з рівномірним навантаженням.

Ключові слова: *сплайни 5-го степеня, бігармонічна задача, кругла пластина, рівномірно розподілене навантаження, R-функції.*

Вступ. Використання сплайнів 5-го степеня на практиці не досліджувалося у зв'язку з відсутністю явних формул для базисних поліномів 5-го степеня інтерполяції таких сплайнів на трикутній сітці вузлів. В роботі [1] запропоновані явні формули для сплайнів 5-го степеня на довільній сітці трикутників.

