5. Аралова А. А., Дейнека В. С. Оптимальное управление термо-напряженным состоянием полого цилиндра. *Доповіді національної академії наук України.* 2012. № 5. С. 38–42.
6. Аралова А. А. Численное решение обратных задач термо-упругости для составного цилиндра. Кибернетика и системный анализ. 2014. № 5. С. 164–172.
7. Коваленко А. Д. Термоупругость. Киев: Наук. думка, 1975. 216 с.
8. Мотовилевец И. А., Козлов В. И. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 1. Термоупругость. Киев: Наук. думка, 1987. 264 с.

The consideration of algorithm of the identification, based on optimal control theory, for thermal resistance for thermoelastic deformation of long cylindrical composite shell was made.

Key words: *thermoelastic state, gradient methods, cylindrical body.*

Одержано 23.03.2017

УДК 519.85

Т. М. Барболіна, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Полтавський національний педагогічний університет
імені В. Г. Короленка, м. Полтава

КОМБІНАТОРНА ОПТИМІЗАЦІЯ НА РОЗМІЩЕННЯХ: ОГЛЯД ОСТАННІХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Наведений огляд останніх результатів щодо розв'язування задач комбінаторної оптимізації на розміщеннях. Висвітлено розв'язування задач як в умовах визначеності, так і зі стохастичною невизначеністю, а також моделювання детермінованими і стохастичними задачами комбінаторної оптимізації на розміщеннях.

Ключові слова: *комбінаторна оптимізація, стохастична оптимізація, оптимізаційні задачі на розміщеннях.*

Вступ. Серед оптимізаційних задач з обмеженнями комбінаторного характеру, які привертають увагу багатьох дослідників (див., наприклад, [1–23]), важливий клас становлять задачі на евклідових комбінаторних множинах, зокрема, задачі на розміщеннях. Ряд результатів щодо властивостей таких задач, зокрема, достатню умову екстремалі в лінійній безумовній задачі на розміщеннях, отримано в [4, 5] незвідну систему обмежень опуклої оболонки загальної множини розміщень, у роботах [6–8] та інших запропоновано методи розв'язування лінійних і деяких класів нелінійних задач. Низка досліджень, зокрема [3, 9, 10], присвячені дослідженню задач комбінаторної оптимізації з різними видами невизначеності (інтервальною, нечіткою).

Мета даної статті — це огляд деяких нових результатів щодо розв'язування оптимізаційних задач на розміщеннях, у тому числі, з імовірнісною невизначеністю.

Для безумовних задач комбінаторної оптимізації на розміщеннях в [11] отримано нові результати. Зокрема, отримано необхідну умову екстремалі в лінійній безумовній задачі оптимізації на розміщеннях, що разом із відомою раніше достатньою умовою формує критерій екстремалі. Встановлено, що всі екстремалі в лінійній задачі оптимізації на розміщеннях є елементами деякої множини поліррозміщень. На основі критерію екстремалі лінійної функції на множині розміщень доведено критерій екстремалі в дробово-лінійній безумовній задачі комбінаторної оптимізації на розміщеннях.

Новий метод розв'язування задачі мінімізації дробово-лінійної функції на множині розміщень запропоновано в [12]. На відміну від аналітичного методу, запропонованого раніше в [7], цей метод передбачає зведення розв'язування дробово-лінійної задачі до розв'язування скінченної послідовності лінійних задач оптимізації на розміщеннях. При знаходженні мінімалей лінійної функції використовується достатня умова мінімалі, що дозволяє розробити ефективні алгоритми. Показано, що запропоновані алгоритми розв'язування задачі є поліноміальними, а отже, більш ефективними, ніж відомі раніше алгоритми розв'язування таких задач.

Як відомо, один із підходів до розв'язування лінійних та дробово-лінійних задач оптимізації на розміщеннях полягає у розбитті багатогранної множини на класи еквівалентності та наступному напрямленому переборі цих класів. Такий підхід (метод побудови лексикографічної еквівалентності) був раніше обґрунтований для розв'язування повністю комбінаторних задач [6]. Обґрунтування методу побудови лексикографічної еквівалентності для частково комбінаторних задач здійснено в [13]. Уведено в розгляд відношення лексикографічної еквівалентності точок відносно розміщень для випадку, коли кількість елементів у вибірці менше вимірності простору. Встановлено властивості класів еквівалентності, на які багатогранна множина розбивається введеним відношенням, запропоновано й обґрунтовано алгоритми розв'язування лінійних частково комбінаторних задач оптимізації на розміщеннях на основі напрямленого перебору таких класів еквівалентності.

У роботі [14] поширено застосування методу побудови лексикографічної еквівалентності на розв'язування частково комбінаторних задач оптимізації дробово-лінійної функції на розміщеннях. Показано, що розв'язування задачі лексикографічної оптимізації дробово-лінійної функції може бути здійснене в два етапи: на першому розв'язується задача лінійного програмування, а на другому — задача лексикографічної оптимізації лінійної функції. Серед запропонованих алгоритмів розв'язування задач лексикографічної комбінаторної оптимізації на розміщеннях з лінійною та дробово-лінійною цільовими функціями є як точні, так і наближений. Останній дозволяє отримувати значення цільової функції, що відрізняється від оптимуму не більше, ніж на задану величину.

Дослідженню задач комбінаторної оптимізації з імовірнісною невизначеністю присвячено роботи [15–25]. Запропоновано новий підхід до формулювання оптимізаційних задач з імовірнісною невизначеністю [15, 16], який ідейно близький до постановок задач з інтервальною та нечіткою невизначеністю [9, 10]. Підхід ґрунтується на введенні відношення лінійного порядку на скінченній множині випадкових величин. Також запропоновано постановки оптимізаційних задач на основі введення лінійного порядку на фактор-множині, яка утворюється в результаті розбиття множини дискретних випадкових величин на класи еквівалентності на основі порівняння їх числових характеристик (наприклад, моментів). Розглянуті деякі властивості запропонованих відношень порядку, зокрема, збереження упорядкування випадкових величин при додаванні до лівої і правої частини співвідношення однієї й тієї самої випадкової величини. Згадані порядки передбачають послідовне порівняння числових характеристик випадкових величин, що дає можливість більш повно враховувати специфіку задачі у порівнянні із переходом від стохастичної задачі до детермінованої шляхом заміни випадкових величин однією з їх числових характеристик (математичне сподівання, дисперсія тощо).

Властивості стохастичних задач комбінаторної оптимізації на розміщеннях у розглянутих постановках досліджено в [17–21]. Встановлено властивості розв'язку задач лінійної безумовної задачі стохастичної оптимізації на розміщеннях, у яких мінімум визначається згідно з лінійним порядком, введеним на множині дискретних випадкових величин: використовуючи критерій екстремалі в лінійній безумовній (детермінованій) задачі, обґрунтовано умову, що може бути покладена в основу пошуку розв'язку, та способи побудови розв'язку [17, 19]. Ґрунтуючись на властивостях розв'язку безумовної задачі з детермінованими коефіцієнтами цільової функції, доведено властивості розв'язку для задачі, у якій коефіцієнти цільової функції є випадковими величинами; запропоновано схему методу гілок і меж для розв'язування лінійних задач оптимізації на розміщеннях з імовірнісною невизначеністю, у якій також запропоновано правила галуження та відсікання множин [20].

Для задач, у яких мінімум визначається на фактор-множині, встановлено зв'язок зі спеціально побудованими детермінованими задачами, запропоновано редукційний метод розв'язування лінійної безумовної задачі комбінаторної стохастичної оптимізації на розміщеннях [21].

Незважаючи на значну кількість публікацій, присвячених моделюванню евклідовими задачами комбінаторної оптимізації, актуальним залишається подальше дослідження цієї проблеми.

Ряд нових математичних моделей прикладних задач як оптимізаційних задач на комбінаторних множинах розміщень та перестановок представлено в [19, 22]. Розглядаються задачі з різними цільовими функціями (лінійними та дробово-лінійними), задачі без додаткових (некомбінаторних) обмежень та з лінійними обмеженнями, як детерміновані, так і стохастичні. Врахування комбінаторного характеру обмежень та імовірнісної невизначеності вхідних даних дозволяє будувати більш точні моделі.

Також запропоновано різні підходи до формулювання задачі упакування прямокутників зі стохастичними параметрами у напівнескінченну смугу: формалізація взаємного розташування прямокутників на основі відношення порядку на множині випадкових величин [23]; модель, яка враховує ймовірність накладання прямокутників у смузі [24]; «жорстка» постановка, яка передбачає, що прямокутники не перетинаються при жодних можливих значеннях дискретних випадкових величин [25]. Задачі упакування прямокутників в умовах імовірнісної невизначеності раніше не розглядалися, а тому є новими.

Висновки. Розглянуто ряд результатів щодо розв'язування евклідових задач комбінаторної оптимізації на розміщеннях, отриманих за останні роки. Як випливає з наведеного огляду, напрямами подальших досліджень може бути продовження вивчення властивостей задач стохастичної комбінаторної оптимізації на розміщеннях, розробка й обґрунтування алгоритмів їх розв'язування.

Список використаних джерел:

1. Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. К.: Наук. думка, 1981. 288 с.
2. Сергиенко И. В., Гуляницкий Л. Ф., Сиренко С. И. Классификация прикладных методов комбинаторной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ*. 2009. № 5. С. 71–83.
3. Стоян Ю. Г. Романова Т. Е., Сысоева Ю. А. Оптимизационная задача размещения правильних интервальных многоугольников. *Докл. НАН Украины*. 1998. № 9. С. 114–120.
4. Стоян Ю. Г., Ємець О. О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. К.: Інститут системних досліджень освіти, 1993. 188 с. Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487.
5. Ємець О. О., Роскладка О. В., Недобачій С. С. Незвідна система обмежень для загального многогранника розміщень. *Укр. матем. журнал*. 2003. 55, № 1. С.3–11.
6. Емец О. А., Барболина Т. Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. К.: Наукова думка, 2008. 159 с. Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/-handle/123456789/473.
7. Емец О. А., Черненко О. А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях. К. : Наукова думка, 2011. 154 с. Режим доступа: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/467.
8. Емец О. А., Барболина Т. Н., Черненко О. А. Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными ограничениями. *Кибернетика и системный анализ*. 2006. № 5. С. 79–85.

9. Ємець О. О., Ємець Ол-ра О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах. Полтава: ПУЕТ, 2011. 239 с. Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352.
10. Сергиенко И. В., Емец О. А., Емец А. О. Задачи оптимизации с интервальной неопределенностью: метод ветвей и границ. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. № 5. С. 38–50.
11. Емец О. А., Барболина Т. Н. Свойства комбинаторных оптимизационных безусловных задач на размещениях с линейной и дробно-линейной целевыми функциями. *Проблемы управления и информатики*. 2016. № 6. С. 46–57.
12. Ємець О. О., Барболіна Т. М. Властивості екстремалі дробово-лінійної функції на загальній множині розміщень. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: збірник наукових праць.* Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка, 2016. С. 79–82.
13. Барболина Т. Н. Решение частично комбинаторных задач оптимизации на размещениях методом построения лексикографической эквивалентности. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. № 6. С. 137–149.
14. Емец О. А., Барболина Т. Н. Лексикографическая эквивалентность в частично комбинаторной оптимизации дробно-линейных функций на размещениях. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. № 2. С. 94–106.
15. Емец О. А., Барболина Т. Н. Об оптимизационных задачах с вероятностной неопределенностью. *Доповіді Національної академії наук України*. 2014. № 11. С. 40–45.
16. Барболина Т. Н. О подходе к оптимизации с вероятностной неопределенностью с использованием упорядочивания случайных величин. *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки.* 2016. № 1. С. 11–20.
17. Емец О. А., Барболина Т. Н. О свойствах линейной безусловной задачи комбинаторной оптимизации на размещениях с вероятностной неопределенностью. *Кибернетика и системный анализ.* 2016. № 2. С. 127–139.
18. Ємець О. О., Барболіна Т. М. Властивості лінійних безумовних задач оптимізації на розміщеннях з імовірнісною невизначеністю. *Доповіді НАН України*. 2016. № 2. С. 31–37.
19. Ємець О. О., Барболіна Т. М. Побудова і дослідження математичної моделі задачі директора зі стохастичними параметрами. *Вісник Черкаського університету. Серія Прикладна математика. Інформатика.* 2014. № 18 (311). С. 3–11.
20. Ємець О. О., Барболіна Т. М. Лінійні оптимізаційні задачі на разміщеннях з імовірнісною невизначеністю: властивості і розв’язання. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2016. № 1. С. 107–119.
21. Емец О. А., Барболина Т. Н. Решение линейных безусловных задач комбинаторной оптимизации на размещениях со стохастической неопределенностью. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. № 3. С. 141–153.
22. Ємець О. О., Барболіна Т. М. Моделювання детермінованими і стохастичними задачами комбінаторної оптимізації. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2016. Вип. 14. С. 70–80.
23. Емец О. А., Барболина Т. Н. Комбинаторная оптимизационная модель упаковки прямоугольников со стохастическими параметрами. *Кибернетика и системный анализ*. 2015. № 4. С. 99–111.

24. Ємець О. О., Барболіна Т. М. Комбінаторна оптимізаційна модель упакування прямокутників з імовірнісними обмеженнями. *Наукові записки НаУКМА*. 2015. Т. 177: Комп'ютерні науки. С. 58–62.
25. Емец О. А., Барболина Т. Н. О задачах оптимизации взаимного расположения прямоугольников в условиях стохастической, интервальной или нечеткой неопределенностию. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2015. Вип. 12. С. 83–100.

The review of last results concerning solving of combinatorial optimization problems on arrangements is presented. The author consider solving of problems both under certainty and under probabilistic uncertainty. Also modeling by deterministic and stochastic problems of combinatorial optimization on arrangements.

Key words: *combinatorial optimization, stochastic optimization, optimization problems on arrangements.*

Одержано 15.02.2017

УДК 519.8

О. А. Березовский, канд. физ.-мат. наук

Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины, г. Киев

НУЛЕВОЙ РАЗРЫВ ДВОЙСТВЕННОСТИ В КВАДРАТИЧНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

В работе рассматривается двойственная оценка (лагранжева релаксация) для квадратичной экстремальной задачи общего вида. Сформулированы условия, при выполнении которых значение глобального экстремума квадратичной экстремальной задачи и значение ее двойственной оценки совпадают.

Ключевые слова: *квадратичная экстремальная задача, двойственная оценка, лагранжева релаксация, неотрицательно определенная матрица, точная оценка (нулевой разрыв двойственности).*

Введение. Многие задачи оптимального управления, планирования, проектирования, моделирования, анализа сетевых структур и т.д., допускают представление в виде квадратичных экстремальных задач, т.е. задач оптимизации, целевая функция и все функции ограничений которых квадратичные (англ. quadratically constrained quadratic programming):

$$f^* = f_0(x^*) = \inf_{x \in T \subseteq R^n} f_0(x), \tag{1}$$

где $T = \{x : f_i(x) \le 0, i \in I^{LQ}, f_i(x) = 0, i \in I^{EQ}; x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in R^n\}$ — допустимое множество решений задачи (далее будем считать, что оно

