УДК 519.6

М. В. Білоус, канд. фіз.-мат. наук
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, м. Київ

ОБ’ЄКТНА МОДЕЛЬ СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТУ В РОЗВ’ЯЗУВАЧІ NADRA-3D

Розглянуто об’єктну модель скінченного елемента та її взаємодію з підсистемами породження систем лінійних алгебраїчних рівнянь програмного каркаса Nadra-3D.

Ключові слова: *метод скінченних елементів, об’єктна модель, програмний каркас.*

Вступ. Метод скінченних елементів (МСЕ) [1–3] чисельного розв’язання систем диференціальних рівнянь у частинних похідних полягає в апроксимації суцільного середовища вихідної області з нескінченною кількістю ступенів свободи скінченною кількістю підобластей (елементів). В кожному елементі вибирається вигляд апроксимуючої функції, значення якої у вузлах елемента збігаються із значенням розв’язку вихідної системи рівнянь. Розв’язання вихідної системи диференціальних рівнянь зводиться до розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), побудованої за певною розрахунковою схемою. Отриманий вектор містить наближені значення шуканого розв’язку у вузлах розрахункової сітки.

У роботі [3] приведено наступне визначення скінченного елемента: скінченний елемент це трійка (ω, P, Φ), що складається з таких об’єктів:

1) ω — замкнена підмножина з ліпшицевою границею та непустою множиною внутрішніх точок;
2) P — N-мірний простір функцій, визначених на ω; зазвичай P — це простір поліномів;
3) Φ — набір лінійно незалежних лінійних функціоналів , $i = \overline{1, N}$.

Підмножина ω називається коміркою. В двовимірному випадку це трикутник (2-симплекс) або чотирикутник, в тривимірному — тетраедр (3-симплекс) або прямокутний паралелепіпед.

Лінійні функціонали φ_i називають ступенями свободи скінченного елемента, а набір функцій $p_i \in P, i = \overline{1, N}$: $\varphi_j\left(p_i\right) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = \overline{1, N}$ — базисними функціями скінченного елемента.

Точність знайденого розв’язку вихідної системи рівнянь залежить, зокрема, від характеристик скінченних елементів: максимального розміру сторони, значень кутів між сторонами елемента, порядку поліномів базисних функцій.

Програмна реалізація обчислювальних схем МСЕ складається з перебору усіх елементів розрахункової сітки, обчислення для кожного елемента доданків матриці та вектора правої частини СЛАР МСЕ, збірки СЛАР і знаходження її розв'язку. Далі розглядається побудова ієрархії класів опису скінченних елементів при програмній реалізації таких обчислювальних схем.

Об'єктна модель скінченного елемента. В Інституті кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України розроблено програмний каркас Nadra-3D — написаний мовою C++ набір класів та функцій для програмної реалізації обчислювальних схем МСЕ для різних класів задач. На базі цього програмного каркасу побудовано скінченно-елементний розв'язувач Nadra-3D [4] — програмний пакет для моделювання процесів фільтрації води, теплопровідності, зміни напружено-деформованого стану багатокомпонентних середовищ.

В програмному каркасі Nadra-3D запропонована наступна об'єктна модель скінченного елемента у вигляді «чорної скриньки», яка підтримує обов'язкові методи вхідного та вихідного інтерфейсів (рис. 1). Взаємодія модулів програмного каркасу з такими об'єктами (їх створення, ініціалізація, розрахунок елементарних матриць та векторів) виконується виключно за допомогою цих методів.

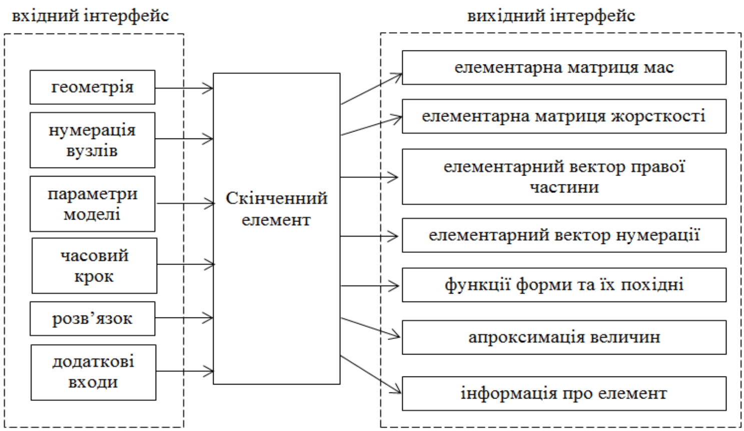

Рис. 1. *Об'єктна модель скінченного елемента*

Таким чином система може однотипно опрацьовувати скінченні елементи для різних класів задач, з різною геометрією та базисними функціями. При цьому вся логіка роботи об'єкта (реалізація математичних співвідношень для розрахунків елементарних матриць та векторів для конкретної задачі) повністю прихована всередині класу, що реалізує цей скінченний елемент. Додавання в систему нового класу скінченного елемента виконується шляхом його наслідування від одного з базових класів та наступною реєстрацією в системі породження скінченних елементів.

Методи вхідного інтерфейсу виконують наступні операції: завантаження просторових координат вузлів елементу; завантаження нумерації вузлів елемента; завантаження параметрів математичної моделі; завантаження координати часової дискретизації; завантаження значень розв’язку у вузлах елемента; завантаження інших вхідних значень (наприклад, значень температури для задач термопружності, або значень п’єзометричних напорів при моделюванні впливу фільтрації на зміну напружено-деформованого стану).

Методи вихідного інтерфейсу можна розділити на наступні групи.

1. Методи отримання інформації про скінченний елемент (тип геометрії та код скінченного елемента, тип базисних функцій, тип інтегрування, кількість ступенів свободи, здатність елемента генерувати елементарні матриці, вектори, обчислювати еталонні значення або значення на основі розрахованих розв’язків).
2. Методи виділення оперативної пам’яті для елементарних матриць та векторів. Оскільки розмір елементарних матриць залежить від кількості вузлів скінченного елемента та кількості ступенів свободи на вузол (що визначається типом розв’язуваної задачі), виділення оперативної пам’яті для них покладено на клас скінченного елемента. Система тільки відправляє запит на виділення пам’яті та отримує покажчики на відповідні структури даних.
3. Методи породження елементарних матриць та векторів (матриці мас; матриці жорсткості; векторів правої частини, точних значень розв’язку (для задач тестування); величин, розрахованих на основі вектору розв’язків).
4. Методи обчислення значень базисних функцій, їх перших та других похідних за просторовими змінними.

Ієрархія класів опису скінченних елементів в програмному каркасі Nadra-3D складається з чотирьох рівнів (рис. 2).

Базовий клас (клас нульового рівня) містить оголошення програмного інтерфейсу у вигляді чистих віртуальних функцій. Ці методи мають бути реалізовані у всіх класах опису скінченних елементів, створених для роботи з каркасом. Наслідування цьому класу забезпечує інтеграцію з усіма підсистемами програмного каркасу.

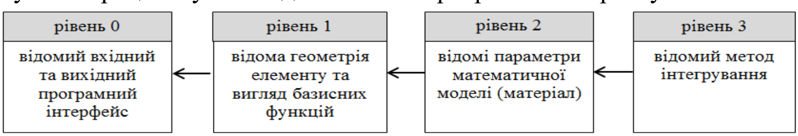

Рис. 2. *Рівні ієрархії класів опису скінченних елементів*

Класи першого рівня — нащадки базового класу. У них реалізовано методи завантаження координат та нумерації вузлів елемента, методи обчислення значень базисних функцій та їх частинних похідних за просторовими змінними. Також класи цього рівня містять статичні методи відображення довільного скінченного елемента на канонічний елемент того ж типу та навпаки. На цьому рівні, зокрема, реалізовано базові двовимірні симплекс-елементи з лінійними (рис. 3, а) та квадратичними (рис. 3, б) базисними функціями, базові тривимірні симплекс-елементи з лінійними (рис. 3, в) та квадратичними (рис. 3, г) базисними функціями, елементи з подвійною нумерацією вузлів (для врахування умов спряження) з лінійними (рис. 3, д) та квадратичними (рис. 3, є) базисними функціями.

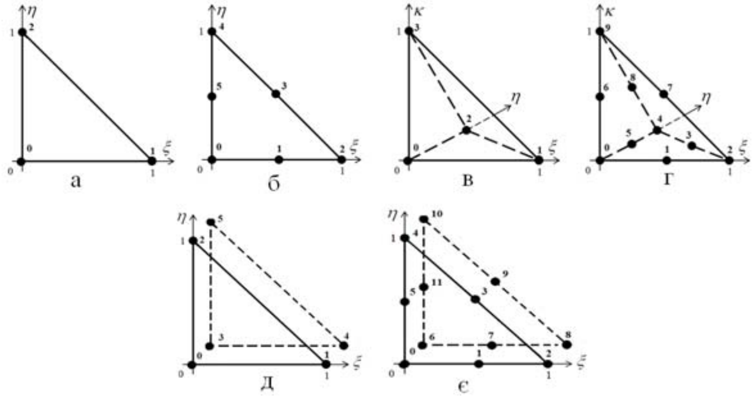

Рис. 3. *Геометрія скінченних елементів класів першого рівня*

Класи другого рівня є нащадками класів першого рівня та відповідають скінченним елементам для прикладних задач. В них реалізуються методи завантаження параметрів математичної моделі, а також визначаються характеристики скінченного елемента (кількість ступенів свободи, код елемента тощо). На цьому рівні в програмному каркасі Nadra-3D реалізовано класи опису тривимірних симплекс-елементів з лінійними та квадратичними базисними функціями для задач теорії пружності (для розв'язання систем рівнянь тривимірної лінійної теорії пружності та термопружності в декартовій системі координат); тривимірних симплекс-елементів з лінійними та квадратичними базисними функціями для задач фільтрації (постановки в декартовій системі координат).

В класах третього рівня крім визначеної в батьківських класах математичної моделі задається метод інтегрування для обчислення елементарних матриць та векторів та реалізуються методи їх розрахунку.

При використанні в цих методах чисельного інтегрування інтеграли по скінченним елементам апроксимуються скінченними сумами

$$\int\limits_{\omega} \varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \varphi(x_k),$$

де α_k — вагові коефіцієнти, x_k — вузли інтегрування, що належать скінченному елементу ω, K — кількість вузлів інтегрування. Це призводить до того, що замість розв'язку вихідної задачі, шукається розв'язок задачі з апроксимованими функціоналом та білінійною формою. При цьому [3] для збереження порядку точності розв'язку кубатурна формула для прямолінійних скінченних елементів на симплексах має допускати точне інтегрування багаточленів степені $2(k-m)$, де k — степінь базисних функцій скінченного елемента, m — порядок розв'язуваних диференціальних рівнянь. За цих умов похибка апроксимації чисельного інтегрування порівняна з похибкою МСЕ.

Набір класів програмного каркасу Nadra-3D містить опис скінченних елементів для розв'язання рівнянь другого порядку ($m=1$), тому кубатурні формули мають забезпечувати точне інтегрування багаточленів степені 0 для лінійних базисних функцій, та багаточленів степені 2 для квадратичних. Об'єкти, що описують скінченні елементи, параметризуються наборами вузлів інтегрування та вагових коефіцієнтів, які вони використовують при реалізації методів побудови елементарних матриць та векторів. Таким чином, для зміни використовуваної кубатурної формули достатньо завантажити до об'єкта інший набір параметрів.

Взаємодія з підсистемами програмного каркаса. Взаємодія підсистем програмного каркасу з об'єктами опису скінченних елементів відбувається за схемою, показаною на рис. 4.

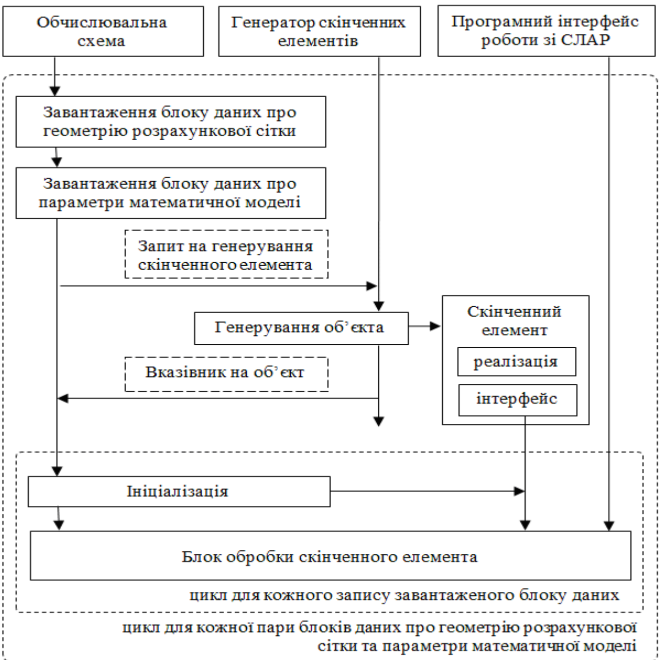

Рис. 4. *Схема роботи зі скінченними елементами*

У схемі слід відмітити розділення роботи зі збірки СЛАР між трьома підсистемами. Генератор скінченних елементів за запитом обчислювальної схеми створює об'єкт скінченного елемента та повертає вказівник на нього як вказівник на клас нульового рівня (див. рис. 2).

Об'єкт, який реалізує обчислювальну схему, відповідає за завантаження вхідних даних, ініціалізацію скінченного елемента та обробку породжених ним елементарних матриць та векторів. Наприклад, для обчислювальних схем розв'язання рівнянь параболічного типу з використанням схеми Кранка-Ніколсона для дискретизації за часом (з кроком τ) доданки розраховуються у вигляді $A = M + \frac{\tau}{2} K$, $B = \left(M - \frac{\tau}{2} K \right) \alpha^j + \frac{\tau}{2} (F^{j+1} + F^j)$, де K, M — обчислені скінченним елементом елементарні матриці жорсткості та мас, F — елементарний вектор правої частини, j — номер кроку.

Розміщення розрахованих доданків у матриці та векторі СЛАР виконується за допомогою методів програмного інтерфейсу роботи зі СЛАР, який стандартизує доступ підсистем програмного каркасу до усіх підтримуваних ним схем зберігання СЛАР в оперативній пам'яті та алгоритмів знаходження їх розв'язків.

Висновки. З використанням запропонованої об'єктної моделі скінченного елемента в програмному каркасі стало можливим реалізовувати за допомогою одного фрагмента коду обчислювальні схеми для різних типів задач. Наприклад, для стаціонарних задач лінійної фільтрації, лінійної теорії пружності у двовимірних та тривимірних постановках, з використанням лінійних або квадратичних базисних функцій обчислювальна схема збірки та розв'язання СЛАР МСЕ має однаковий вигляд. Це забезпечує, зокрема, логічне розширення програмного каркаса класами опису скінченних елементів для задач у сферичній або циліндричній системі координат з максимальним використанням вже відлагоджених модулів збірки та розв'язання СЛАР.

Список використаних джерел:

1. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
2. Дейнека В. С., Сергиенко И. В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. К.: Наук. думка., 2001. 606 с.
3. Шайдуров В. В. Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 288 с.
4. Белоус М.В. Конечно-элементный решатель Надра-3D. *Материалы II-й международной конференции «Кластерные вычисления»*, Львов, 3-5 июня 2013. С. 40–47.

An object model of finite element and its interaction with subsystems of software framework Nadra-3D for generating of systems of linear equations are considered.

Key words: *finite element method, object model, software framework.*

Одержано 24.02.2017

УДК 517.9:519.6

А. В. Гладкий*, д-р. фіз.-мат. наук, професор,
Ю. А. Гладка,** канд. фіз.-мат. наук, доцент

*Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, м. Київ,
**Київський національний торговельно-економічний університет, м. Київ

ПРО МОДЕЛЮВАННЯ ТА ФОРМУВАННЯ АКУСТИЧНИХ ПОЛІВ НА ОСНОВІ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ШРЕДІНГЕРА

Досліджуються питання чисельного моделювання та формування акустичних полів на основі параболічного хвильового рівняння в неоднорідному хвилеводі з урахуванням тонких включень. Сформульовано критерій оптимальності, досліджено диференціальні властивості функціонала якості, запропоновано чисельний метод для моделювання та оптимізації акустичних полів.

Ключові слова: *акустичне поле, рівняння типу Шредінгера, екстремальна задача, різницева схема, стійкість.*

Вступ. На сьогодні підвищений інтерес до досліджень акустичних полів в океані значною мірою обумовлений розширенням освоєння водних акваторій Світового океану, потребами дистанційного зондування та акустичного моніторингу, оскільки звукові хвилі є практично єдиними хвилями, здатними поширюватися на значні відстані [1–3].

У роботі на основі параболічних апроксимацій хвильового рівняння Гельмгольца досліджуються питання чисельного моделювання процесів поширення акустичних хвиль у неоднорідному осесиметричному хвилеводі $G=\left\{\ r_0<r<\infty, 0<z<L, r_0>0\ \right\}$, де (r,z) — циліндричні координати, і вісь z направлена вертикально вниз.

Постановка задачі. Для визначеності будемо припускати, що хвилевод двошаровий з горизонтальною межею поділу середовищ $z=\xi$, на якій виконуються умови неідеального контакту, а кусково-неперервна швидкість звука $c(r,z)$ і кусково-стала густина $\rho(z)$ мають розрив першого роду. Верхній шар G_1 заповнений середовищем зі сталою гус-

