References:

1. Sharpe W. Portfolio theory and capital markets / W. Sharpe. — New York : McGraw-Hill, 1970.
2. Sharpe W. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk / W. Sharpe // J. of Finance. — 1964. — Vol. 19, N 3. — P. 425–442.
3. Yeleiko Ya. I. On rate of convergence of expected return and risk / Ya. I. Yeleiko, A. Yu. Borotyuk // Mat. Met. Fiz.-Mech. Polya. — 1999. — Vol. 42, N 3. — P. 95–98 (in Ukrainian).
4. Yeleiko Ya. I. The speed of the convergence perturbed profit, perturbed risk and the scale of infinitesimals / Ya. I. Yeleiko, A. Yu. Borotyuk // Visnyk of the Lviv Univ. Ser. Mech.-Math. — 1999. — Issue 53. — P. 133–137 (in Ukrainian).

Розглянуто збурення ε випадкового середовища Ω. Доведено, що при $\varepsilon \to 0$ збурений третій і четвертий моменти прибутку на акцію досить мало відрізняються від відповідних незбурених моментів. Досліджено швидкість збіжності цих збурених моментів до незбурених.

Ключові слова: *прибуток на акцію, ризик, третій і четвертий моменти, збурення середовища, швидкість збіжності.*

Отримано: 13.02.2017

УДК 517.977.56

С. Ш. Кадырова[*], докторант,
К. Б. Мансимов[*,],** д-р физ.-мат. наук, профессор

[*] Институт Систем Управления НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан,
[**] Бакинский Государственный Университет, г. Баку, Азербайджан

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ В СМЫСЛЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА УПРАВЛЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ТИПА РОССЕРА

Рассмотрена одна задача оптимального управления дискретными системами типа Россера, при помощи граничных управлений. Установлены необходимые условия оптимальности особых, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений.

Ключевые слова: *система типа Россера, принцип максимума Понтрягина, особые управления, формула приращения критерия качества.*

Введение. Многие процессы из техники и др. описываются различными системами Россера (см. напр. [1–6]).

Поэтому в последние годы интенсивно разрабатывается качественная теория оптимального управления системами типа Россера. В работах [7; 8] и др. выведен ряд необходимых условий оптимальности, исследован квазиособый случай [9] и при предположении открытости области управления выведены необходимые условия оптимальности второго порядка задачах управления, описываемых системами типа Россера и управляемых при помощи граничного управления.

В предлагаемой работе также рассматривается задача оптимального управления системами типа Россера управляема044F посредством выбора граничного условия.

Установлены необходимые условия оптимальности особых, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений.

Постановка задачи. Предположим, что управляемый дискретный процесс описывается системой нелинейных разностных уравнений

$$z(t+1,x)=f\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big),\ t=t_0,t_0+1,...,t_1-1;\ x=x_0,x_0+1,...,x_1\,, \quad (1)$$

$$y(t,x+1)=g\big(t,x,z(t,x),y(t,x)\big),\ t=t_0,t_0+1,...,t_1\,;$$

$$x=x_0,x_0+1,...,x_1-1,$$

с краевыми условиями

$$\begin{gathered} z(t_0,x)=a(x), \quad x=x_0,x_0+1,...,x_1\,, \\ y(t,x_0)=b(t),\ t=t_0,t_0+1,...,t_1. \end{gathered} \quad (2)$$

Здесь $f(t,x,z,y)$, $\big(g(t,x,z,y)\big)$ — заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,y) до второго порядка включительно, t_0, t_1, x_0, x_1 — заданы, причем разности t_1-t_0, x_1-x_0 — есть натуральные числа, $b(t)$ — заданная m-мерная дискретная вектор-функция, $a(x)$ — n-мерная вектор-функция, являющаяся решением обыкновенного нелинейного разностного уравнения

$$a(x+1)=F\big(x,a(x),u(x)\big), \quad x=x_0,x_0+1,...,x_1-1,\ a(x_0)=a_0, \quad (3)$$

где $F(x,a,u)$ — заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по a до второго порядка включительно, a_0 — заданный постоянный вектор, $u(x)$ — r-мерный дискретный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U\subset R^r$, т.е.

$$u(x)\in U\subset R^r\,,\ x\in X=\{x_0,x_0+1,...,x_1-1\}\,. \quad (4)$$

Управляющие функции $u(x)$ удовлетворяющие вышеприведенным ограничениям назовем допустимыми управлениями, а соответствующие процессы $\left(u(x), a(x), z(t,x), y(t,x)\right)$ — допустимыми процессами.

Предполагается, что при каждом заданном допустимом управлении $u(x)$ система уравнений (1)–(3) имеет единственное решение $\left(a(x), z(t,x), y(t,x)\right)$.

Теперь на решениях задачи (1)–(3) порожденных всевозможными допустимыми управлениями определим функционал

$$S(u) = \varphi_1\left(a(x_1)\right) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} G_1\left(x, z(t_1, x)\right) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} G_2\left(t, y(t, x_1)\right). \qquad (5)$$

Здесь $\varphi_1(a)$, $G_1(x,z)$, $G_2(t,y)$ — заданные скалярные функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными $\frac{\partial \varphi_1(a)}{\partial a}$, $\frac{\partial^2 \varphi_1(a)}{\partial a^2}$, $\frac{\partial G_1(x,z)}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 G_1(x,z)}{\partial z^2}$, $\frac{\partial G_2(t,y)}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 G_2(t,y)}{\partial y^2}$.

Изучим задачу о минимуме функционала (5) при ограничениях (1)–(4).

Допустимое управление $u(x)$, доставляющее минимум функционалу (5), при ограничениях (1)–(4) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $\left(u(x), a(x), z(t,x), y(t,x)\right)$ — оптимальным процессом.

Построение формулы второго порядка для приращения критерия качества. Допустим, что $\left(u(x), a(x), z(t,x), y(t,x)\right)$ — фиксированный допустимый процесс и множество

$$F\left(x, a(x), U\right) = \left\{\alpha : \alpha = F\left(x, a(x), U\right),\ u \in U\right\} \qquad (6)$$

выпуклое при всех $x \in X$.

Через $u(x;\varepsilon)$ обозначим произвольное допустимое управление такое, что соответствующее ему состояние $a(x;\varepsilon)$ процесса удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} a(x+1;\ \varepsilon) = F\left(x, a(x;\ \varepsilon), u(x;\ \varepsilon)\right) \equiv F\left(x, a(x;\ \varepsilon), u(x)\right) + \\ +\varepsilon\left[F\left(x, a(x;\ \varepsilon), v(x)\right) - F\left(x, a(x;\ \varepsilon), u(x)\right)\right], \end{aligned} \qquad (7)$$

$$a\left(x_0;\varepsilon\right)=a_0, \tag{8}$$

где $\varepsilon\in[0,1]$ произвольное число, а $v(x)\in U$, $x\in X$ произвольное допустимое управление соответствующее $u(x;\varepsilon)$.

Это возможно в силу выпуклости множества (6).

Ясно, что $\left(z(t,x;\,\varepsilon),y(t,x;\,\varepsilon)\right)$ будет при этом решением задачи

$$z\left(t+1,x;\,\varepsilon\right)=f\left(t,x,z\left(t,x;\,\varepsilon\right),y\left(t,x;\,\varepsilon\right)\right), \tag{9}$$

$$y\left(t,x+1;\,\varepsilon\right)=g\left(t,x,z\left(t,x;\,\varepsilon\right),y\left(t,x;\,\varepsilon\right)\right),$$

$$\begin{gathered} z\left(t_0,x;\,\varepsilon\right)=a\left(x;\,\varepsilon\right),\\ y\left(t,x_0;\,\varepsilon\right)=b(t). \end{gathered} \tag{10}$$

Пусть по определению

$$\ell(t,x)=\left.\frac{\partial z(t,x;\,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0};\quad m(t,x)=\left.\frac{\partial y(t,x;\,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0};\quad \alpha(x)=\left.\frac{\partial a(x;\,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}; \tag{11}$$

$$Z(t,x)=\left.\frac{\partial^2 z(t,x;\,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0};\quad Y(t,x)=\left.\frac{\partial^2 y(t,x;\,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0};\quad A(x)=\left.\frac{\partial^2 a(x;\,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}; \tag{12}$$

$$\Delta_{v(x)}F\left(x\right)\equiv F\left(x,a\left(x\right),v\left(x\right)\right)-F\left(x,a\left(x\right),u\left(x\right)\right).$$

Используя гладкость вектор-функций $f\left(t,x,z,y\right)$, $g\left(t,x,z,y\right)$, $F(x,a,u)$ при помощи (7), (9), (10) доказывается, что вектор-функции $\ell(t,x)$, $m(t,x)$, $\alpha(x)$, $Z(t,x)$, $Y(t,x)$, $A(x)$ определяемые соотношениями (11), (12) являются решениями задач

$$\ell(t+1,x)=f_z\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)\ell(t,x)+f_y\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)m(t,x),$$

$$m(t,x+1)=g_z\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)\ell(t,x)+g_y\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)m(t,x),$$

$$\ell\left(t_0,x\right)=\alpha\left(x\right),$$

$$m\left(t,x_0\right)=0,$$

$$\alpha\left(x+1\right)=F_a\left(x,a\left(x\right),u\left(x\right)\right)\alpha\left(x\right)+\Delta_{v(x)}F\left(x\right),$$

$$\alpha\left(x_0\right)=0,$$

$$Z\left(t+1,x\right)=\frac{\partial f\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)}{\partial z}Z\left(t,x\right)+\frac{\partial f\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)}{\partial y}Y\left(t,x\right)+$$

$$+\ell'(t,x)f_{zz}\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)\ell(t,x)+\ell'(t,x)f_{zy}\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)m(t,x)+$$

$$+m'(t,x)f_{yz}\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)\ell(t,x)+m'(t,x)f_{yy}\left(t,x,z(t,x),y(t,x)\right)m(t,x),$$

$$Y(t,x+1)=g_z(t,x,z(t,x),y(t,x))Z(t,x)+g_y(t,x,z(t,x),y(t,x))Y(t,x)+$$
$$+\ell'(t,x)g_{zz}(t,x,z(t,x),y(t,x))\ell(t,x)+\ell'(t,x)g_{zy}(t,x,z(t,x),y(t,x))m(t,x)+$$
$$+m'(t,x)g_{yz}(t,x,z(t,x),y(t,x))\ell(t,x)+m'(t,x)g_{yy}(t,x,z(t,x),y(t,x))m(t,x),$$
$$Z(t_0,x)=A(x),$$
$$Y(t,x_0)=0,$$
$$A(x+1)=F_a(x,a(x),u(x))A(x)+$$
$$+2\Delta_{v(x)}F(x)\alpha(x)+\alpha'(x)F_{aa}(x,a(x),u(x))\alpha(x),$$
$$\alpha(x_0)=0.$$

При этом специальное приращение функционала качества (5), отвечающее допустимым управлениям $u(x;\varepsilon)$ и $u(x)$, при помощи формулы Тейлора представляется в виде

$$\Delta S_\varepsilon(u)=S(u(x;\varepsilon))-S(u(x))=\varepsilon\frac{\partial\varphi'(a(x_1))}{\partial a}\alpha(x_1)+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\alpha'(x_1)\frac{\partial^2\varphi(a(x_1))}{\partial a^2}\alpha(x_1)+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial\varphi'(a(x_1))}{\partial a}A(x_1)+\varepsilon\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\frac{\partial G_1(x,z(t_1,x))}{\partial z}\ell(t_1,x)+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\ell'(t_1,x)\frac{\partial^2 G_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}\ell(t_1,x)+ \tag{13}$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\frac{\partial^2 G_1(x,z(t_1,x))}{\partial z^2}Z(t_1,x)+\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\frac{\partial G_2(t,y(t,x_1))}{\partial y}m(t,x_1)+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}m'(t,x_1)\frac{\partial^2 G_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}m(t,x_1)+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\frac{\partial G_2'(t,y(t,x_1))}{\partial y}Y(t,x_1)+o(\varepsilon^2).$$

Введем аналоги функции Гамильтона-Понтрягина

$$H(t,x,z,y,p,q)=p'f(t,x,z,y)+q'g(t,x,z,y),$$
$$M(x,a,u,\psi)=\psi'F(x,a,u).$$

Здесь $\left(\psi(x), p(t,x), y(t,x)\right)$ — является решением сопряженной системы

$$p(t-1,x) = H_x\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right),$$

$$q(t,x-1) = H_y\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right),$$

$$\psi(x-1) = M_a\left(x,a(x),u(x),\psi(x)\right) + p(t_0,x), \tag{14}$$

$$p(t_1-1,x) = -\frac{\partial G_1\left(x,z(t_1,x)\right)}{\partial z},$$

$$q(t,x_1-1) = -\frac{\partial G_2\left(t,y(t,x_1)\right)}{\partial y},$$

$$\psi(x_1-1) = -\frac{\partial \varphi\left(a(x_1)\right)}{\partial a}. \tag{15}$$

Учитывая введенные обозначения и уравнения (14)–(15), специальное приращение (13) критерия качества записывается в виде

$$\begin{aligned}
\Delta S_\varepsilon(u) &= \varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M_a\left(x,a(x),u(x),\psi(x)\right) + \\
&+\frac{\varepsilon^2}{2}\Bigg\{\alpha'(x_1)\frac{\partial^2\varphi\left(a(x_1)\right)}{\partial a^2}\alpha(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1}\ell'(t_1,x)\frac{\partial^2 G_1\left(x,z(t_1,x)\right)}{\partial z^2}\ell(t_1,x) + \\
&+\sum_{t=t_0}^{t_1-1} m'(t,x_1)\frac{\partial^2 G_2\left(t,y(t,x_1)\right)}{\partial y^2}m(t,x_1) - \\
&-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big[\alpha'(x_1)M_{aa}\left(x,a(x),u(x),\psi(x)\right)\alpha(x_1) + \\
&+2\Delta_{v(x)}M'_a\left(x,a(x),u(x),\psi(x)\right)\Big] - \\
&-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big[\ell'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)\ell(t,x) + \\
&+\ell'(t,x)H_{zy}\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)m(t,x) + \\
&+m'(t,x)H_{yz}\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)\ell(t,x) + \\
&+m'(t,x)H_{yy}\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)m(t,x)\Big] + o\left(\varepsilon^2\right).
\end{aligned} \tag{16}$$

Необходимые условия оптимальности. Специальная формула приращения (16) критерия качества (5) позволяет получить необходимое условие оптимальности первого порядка в форме дискретного условия максимума, а также неявное необходимое условие оптимальности особых, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений. Приведем соответствующие результаты.

Из разложения (16) сразу следует

Теорема 1. Если множество (6) выпуклое, то для оптимальности допустимого управления $u(x)$ в задаче (1)–(5) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M_a\left(x, a(x), u(x), \psi(x)\right) \le 0 \tag{17}$$

выполнялось для всех $v(x) \in U$, $x \in X$.

Неравенство (17) представляет собой аналог дискретного условия максимума Понтрягина (см. напр. [10–12]) и является необходимым условием оптимальности первого порядка. Поэтому нередко условие оптимальности (17) вырождается (см. напр. [12, 13]). Такие случаи называются особыми случаями.

Приведем точное определение особого управления.

Определение 1. Если для всех допустимых управлений $v(x) \in U$, $x \in X$ выполняется соотношение

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M_a\left(x, a(x), u(x), \psi(x)\right) = 0 ,$$

то управление $u(x)$ назовем особым, в смысле принципа максимума Понтрягина управлением.

Из этого определения ясно, что если $u(x)$ особое, в смысле принципа максимума Понтрягина, оптимальное управление, то из разложения (16) сразу следует, что вдоль процесса $\left(u(x), a(x), z(t,x), y(t,x)\right)$

$$\begin{gathered}
\alpha'(x_1)\frac{\partial^2 \varphi\left(a(x_1)\right)}{\partial a^2}\alpha(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \ell'(t_1,x)\frac{\partial^2 G_1\left(x, z(t_1,x)\right)}{\partial z^2}\ell(t_1,x) + \\
+\sum_{t=t_0}^{t_1-1} m'(t,x_1)\frac{\partial^2 G_2\left(t, y(t,x_1)\right)}{\partial y^2} m(t,x_1) - \\
-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big[\alpha'(x_1) M_{aa}\left(x, a(x), u(x), \psi(x)\right)\alpha(x_1) + \\
+2\Delta_{v(x)} M'_a\left(x, a(x), u(x), \psi(x)\right)\Big] - \\
-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big[\ell'(t,x) H_{zz}\left(t, x, z(t,x), y(t,x), p(t,x), q(t,x)\right)\ell(t,x) +
\end{gathered} \tag{18}$$

$$+\ell'(t,x)H_{zy}\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)m(t,x)+$$

$$+m'(t,x)H_{yz}\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)\ell(t,x)+$$

$$+m'(t,x)H_{yy}\left(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\right)m(t,x)\Big]\geq 0$$

для всех $v(x)\in U$, $x\in X$.

Неравенство (18) является неявным необходимым условием оптимальности и носит скорее теоретический характер чем практический. Но оно позволяет получить необходимые условия оптимальности явно выраженные через параметры рассматриваемой задачи.

Пусть матричные функции $\Phi(x,s)$, $V_{ij}(t,x;\,\tau,s)$, $i,j=1,2$ являются решениями следующих задач

$$\Phi(x,s-1)=\Phi(x,s)F_a\left(s,a(s),u(s)\right), \tag{19}$$

$$\Phi(x,x-1)=E\,, \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
V_{11}(t,x;\,\tau-1,s)&=V_{11}(t,x;\,\tau,s)f_z\left(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s)\right)+\\
&+V_{12}(t,x;\,\tau,s)g_z\left(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s)\right),\\
V_{12}(t,x;\,\tau,s-1)&=V_{11}(t,x;\,\tau,s)f_z\left(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s)\right)+\\
&+V_{12}(t,x;\,\tau,s)g_z\left(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s)\right),\\
V_{21}(t,x;\,\tau-1,s)&=V_{21}(t,x;\,\tau,s)f_z\left(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s)\right)+\\
&+V_{22}(t,x;\,\tau,s)g_z\left(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s)\right),\\
V_{22}(t,x;\,\tau,s-1)&=V_{21}(t,x;\,\tau,s)f_z\left(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s)\right)+\\
&+V_{22}(t,x;\,\tau,s)g_z\left(\tau,s,z(\tau,s),y(\tau,s)\right),
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{gathered}
V_{11}(t,x;\,t-1,x-1)=E_1,\; V_{22}(t,x;\,t-1,x-1)=E_2,\\
V_{11}(t,x;\,t-1,s)=0,\; x_0\leq s\leq x-2,\; V_{12}(t,x;\,\tau,x-1)=0,\; t_0\leq\tau\leq t-1,\\
V_{21}(t,x;\,t-1,s)=0,\; x_0\leq s\leq x-1,\; V_{22}(t,x;\,\tau,x-1)=0, t_0\leq\tau\leq t-2,
\end{gathered} \tag{22}$$

где $E_i, i=1,2$ — единичные матрицы соответствующих размерностей.

Как видно уравнения (19), (21) являются линейными неоднородными разностными уравнениями.

Решение задачи (19)–(20), (21)–(22) допускает (см. напр. [14; 15]) представление

$$\alpha(x)=\sum_{s=x_0}^{x-1}\Phi(x,s)\Delta_{v(s)}F\left(s,a(s),u(s)\right), \tag{23}$$

$$\ell\left(t,x\right)=V_{11}\left(t,x+1;\;t_0-1,x\right)\alpha\left(x\right)+\sum_{s=x_0}^{x-1}V_{11}\left(t,x+1;\;t_0-1,s\right)\alpha\left(s\right),\tag{24}$$

$$m\left(t,x\right)=\sum_{s=x_0}^{x-1}V_{21}\left(t+1,x;\;t_0-1,s\right)\alpha\left(x\right).\tag{25}$$

Положим

$$Q_1\left(t,x,s\right)=\sum_{\tau=s+1}^{x-1}V_{11}\left(t,x+1;\;t_0-1,\tau\right)\Phi\left(\tau,s\right)+V_{11}\left(t,x+1;\;t_0-1,x\right)\Phi\left(x,s\right),$$

$$Q_2\left(t,x,s\right)=\sum_{\tau=s+1}^{x-1}V_{21}\left(t+1,x;\;t_0-1,\tau\right)\Phi\left(x,s\right).$$

Тогда при помощи представления (23) формулы (24), (25) записываются в виде:

$$\ell\left(t,x\right)=\sum_{s=x_0}^{x-1}Q_1\left(t,x,s\right)\Delta_{v(s)}F\left(s,a\left(s\right),u\left(s\right)\right),\tag{26}$$

$$m\left(t,x\right)=\sum_{s=x_0}^{x-1}Q_2\left(t,x,s\right)\Delta_{v(s)}F\left(s,a\left(s\right),u\left(s\right)\right).\tag{27}$$

При помощи представлений (23), (26), (27) займемся преобразованием отдельных слагаемых неравенства (18).

Ясно, что

$$\begin{aligned}\alpha'\left(x_1\right)\frac{\partial^2\varphi\left(a\left(x_1\right)\right)}{\partial a^2}\alpha\left(x_1\right)=\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(\tau)}F'\left(\tau,a\left(\tau\right),u\left(\tau\right)\right)\Phi'\left(x,\tau\right)\times\\ \times\frac{\partial^2\varphi\left(a\left(x_1\right)\right)}{\partial a^2}\Phi\left(x,s\right)\Delta_{v(s)}F\left(s,a\left(s\right),u\left(s\right)\right)\end{aligned}\tag{28}$$

$$\begin{aligned}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\ell'\left(t_1,x\right)\frac{\partial^2G_1\left(x,z\left(t_1,x\right)\right)}{\partial z^2}\ell\left(t_1,x\right)=\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(s)}F'\left(s,a\left(s\right),u\left(s\right)\right)\times\\ \times\left\{\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}Q'\left(t_1,x,s\right)\frac{\partial^2G_1\left(x,z\left(t_1,x\right)\right)}{\partial z^2}Q\left(t_1,x,\tau\right)\right\}\Delta_{v(\tau)}F\left(\tau,a\left(\tau\right),u\left(\tau\right)\right)\end{aligned}\tag{29}$$

$$\begin{aligned}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}m'\left(t,x_1\right)\frac{\partial^2G_2\left(t,y\left(t,x_1\right)\right)}{\partial y^2}m\left(t,x_1\right)=\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(s)}F'\left(s,a\left(s\right),u\left(s\right)\right)\times\\ \times\left\{\sum_{t=t_0}^{t_1-1}Q_2'\left(t,x_1,s\right)\frac{\partial^2G_2\left(t,y\left(t,x_1\right)\right)}{\partial y^2}Q_2\left(t,x_1,\tau\right)\right\}\Delta_{v(\tau)}F\left(\tau,a\left(\tau\right),u\left(\tau\right)\right),\end{aligned}\tag{30}$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big[\ell'(t,x)H_{zz}\big(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\big)\ell(t,x)+ \\ +\ell'(t,x)H_{zy}\big(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\big)m(t,x)+ \\ +m'(t,x)H_{yz}\big(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\big)\ell(t,x)+ \\ +m'(t,x)H_{yy}\big(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\big)m(t,x)\Big]= \\ =\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(s)}F'\big(s,a(s),u(s)\big)\times \\ \times\left\{\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1}\Big[Q_1'(t,x,s)H_{zz}\big(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\big)\times\right. \\ \times Q_1(t,x,\tau)+Q_1'(t,x,s)H_{zy}\big(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\big)\times \\ \times Q_2(t,x,\tau)+Q_2'(t,x,s)H_{yz}\big(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\big)\times \\ \times Q_1(t,x,\tau)+Q_2'(t,x,\tau)\times \\ \left.\times H_{yy}\big(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)\big)Q_2(t,x,s)\Big]\right\}\Delta_{v(\tau)}F\big(\tau,a(\tau),u(\tau)\big). \tag{31}$$

Далее при помощи (23) имеем

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\alpha'(x)M_{aa}\big(x,a(x),u(x),\psi(x)\big)\alpha(x)=\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(s)}F'\big(s,a(s),u(s)\big)\times \\ \times\left\{\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}\Phi'(x,s)M_{aa}\big(x,a(x),u(x),\psi(x)\big)\Phi(x,\tau)\right\}\Delta_{v(\tau)}F\big(\tau,a(\tau),u(\tau)\big) \tag{32}$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(x)}M_a'\big(x,a(x),u(x),\psi(x)\big)\alpha(x)= \\ =\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\sum_{s=x+1}^{x_1-1}\Delta_{v(s)}M_a'\big(x,a(s),u(s),\psi(s)\big)\Phi(s,x)\right]\Delta_{v(x)}F\big(x,a(x),u(x)\big). \tag{33}$$

Введем в рассмотрение матричную функцию

$$K(\tau,s)=-\Phi'(x_1,s)\frac{\partial^2\varphi\big(a(x_1)\big)}{\partial a^2}\Phi(x,\tau)- \\ -\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1}Q_1'(t_1,x,s)\frac{\partial^2 G_1\big(x,z(t_1,x)\big)}{\partial z^2}Q_1(t_1,x,\tau)- \tag{34}$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1} Q_2'(t,x_1,s)\frac{\partial^2 G_2(t,y(t,x_1))}{\partial y^2}Q_2(t,x_1,\tau)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1}\Big[Q_1'(t,x,s)H_{zz}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))Q_1(t,x,\tau)+$$

$$+Q_1'(t,x,s)H_{zy}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))Q_2(t,x,\tau)+$$

$$+Q_2'(t,x,s)H_{yz}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))\,Q_1(t,x,\tau)+$$

$$+Q_2'(t,x,\tau)H_{yy}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))Q_2(t,x,s)\Big].$$

С учетом обозначения (34), используя тождества (28)–(33) неравенство (18) представляется в виде

$$\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(s)}F'(s,a(s),u(s))K(\tau,s)\Delta_{v(\tau)}F(\tau,a(\tau),u(\tau))+$$
$$+2\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\sum_{s=x+1}^{x_1-1}\Delta_{v(s)}M_a'(s,a(s),u(s),\psi(s))\right]\Delta_{v(x)}F(x,a(x),u(x))\le 0. \tag{35}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. Если множество (6) выпуклое, то для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $u(x)$ необходимо, чтобы неравенство (35) выполнялось для всех $v(x)\in U$, $x\in X$.

Неравенство (35) является «интегральным» необходимым условием оптимальности особых, в смысле принципа максимума, управлений.

Из него можно получить ряд легко проверяемых условий оптимальности.

Теорема 3. Если множество (6) выпуклое, то для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $u(x)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\Delta_w F'(\xi,a(\xi),u(\xi),\psi(\xi))K(\theta,\xi)\Delta_w F(\xi,a(\xi),u(\xi),\psi(\xi))\le 0 \tag{36}$$

выполнялось для всех $\xi\in X$ и $w\in U$.

Неравенство (36) есть аналог необходимого условия оптимальности Габасова-Кирилловой из [18]. Заметим, что необходимое условие оптимальности (36) слабее чем (35).

Выводы. В работе изучается задача оптимального управления дискретными двухпараметрическими 2-D системами типа Россера. Установлен аналог дискретного условия максимума Понтрягина. Отдельно изучен случай вырождения дискретного условия максимума. При помощи модификации метода приращений доказано необходимое условие оптимальности особых управлений.

Список использованной литературы:

1. Барышев В. Г. К управлению системами с многомерными параметрами / В. Г. Барышев, С. Л. Блюмин // Автоматика и телемеханика. — 1977. — № 4. — С. 34–42.
2. Блюмин С. П. Линейные клеточные машины: подход пространства состояний / С. П. Блюмин, Р. Г. Фараджев // Автоматика и телемеханика. — 1982. — № 2. — С. 125–163.
3. Гайшун И. В. Многопараметрические системы управления / И. В. Гайшун. — Минск : Наука и техника, 1996. — 199 с.
4. Roesser R. P. A discrete state-space model for linear image processing / R. P. Roesser // IEEE Trans. Automat. Control. — 1975. — Vol. AC-20. — № 2. — P. 1–10.
5. Kaczorek T. Two-dimensional linear systems / T. Kaczorek. — Berlin : Springer-Verlag. — 398 p.
6. Дымков М. П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления / М. П. Дымков. — Минск : Изд-во БГЭУ, 2005. — 363 с.
7. Кадырова С. Ш. Об одной задаче оптимального управления дискретными системами Россера / С. Ш. Кадырова, К. Б. Мансимов // Изв. НАН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат.наук. — 2014. — № 3. — С. 105–113.
8. Кадырова С. Ш. Об оптимальности квазиособых управлений в задачах оптимального управления дискретными системами Россера / С. Ш. Кадырова, К. Б. Мансимов // Вестник БГУ. Сер. физ.-мат. наук. — 2014. — № 3. — С. 19–28.
9. Габасов Р. Особые оптимальные управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова — М. : Наука, 1973. — 256 с.
10. Габасов Р. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова — Минск : Изд-во Бел. гос. университета, 1981. — 400 с.
11. Ащепков Л. Т. Оптимальное управление разрывными системами / Л. Т. Ащепков. — Новосибирск : Наука, 1987. — 226 с.
12. Мансимов К. Б. Дискретные системы / К. Б. Мансимов. — Баку : Изд-во БГУ, 2013. — 151 с.
13. Габасов Р. Необходимые условия оптимальности высокого порядка / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, К. Б. Мансимов. — Минск, 1982. — 48 с. — (Препринт ИМ АН БССР. — № 301 (55)).
14. Габасов Р. Оптимизация линейных систем / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. — Минск : Изд-во БГУ. — 256 с.
15. Кадырова С. Ш. Об одном представлении решения линейных разностных уравнений типа Россера / С. Ш. Кадырова, К. Б. Мансимов, Р. О. Масталиев // Изв. НАН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук. — 2013. — № 3. — С. 12–17.
16. Мансимов К. Б. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу / К. Б. Мансимов, М. Дж. Марданов — Баку : Изд-во ЭЛМ, 2010. — 363 с.

17. Мансимов К. Б. Особые управления в системах с запаздыванием / К. Б. Мансимов. — Баку : ЭЛМ, 1999. — 176 с.
18. Габасов Р. К теории необходимых условий оптимальности для дискретных систем / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова // Автоматика и телемеханика. — 1969. — № 12. — С. 31–47.

In this paper consider the one optimal control problem described from Roesser type discrete system. Proof the necessary optimality conditions singular of the Pontryagin since control.

Key words: *Roesser type systems, Pontryagins maxitum principle, singular control, increment formula.*

Отримано: 02.06.2016

УДК 517.958

В. А. Клименко, старший викладач,
Д. О. Білоус, студент

Сумський державний університет, м. Суми

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ ПЛАСТИНИ ПІД ВПЛИВОМ РУХОМОГО ДЖЕРЕЛА ТЕПЛА

Запропонована математична модель описує тепловий стан поверхні пластини в результаті дії рухомого джерела тепла із заданою, залежною від часу, інтенсивністю випромінювання. При побудові математичної моделі такого процесу розглядалась нелінійна задача теплопровідності. Розподіл поля температур знаходиться методом розділення змінних у рівнянні параболічного типу. Модель враховує перерозподіл температурного поля при виході теплового джерела за межі поверхні пластини.

Ключові слова: *розподіл температурного поля, рухоме теплове джерело, нелінійна задача теплопровідності.*

Вступ. Швидкий розвиток сучасних новітніх технологій вимагає від науковців та дослідників приділяти значну увагу розробці і виготовленню елементів технічних систем та конструкцій з врахуванням високих вимог до підвищеної надійності та довголіття, стійкості до навантажень різного типу. Особливий інтерес виникає до теплового впливу на поверхню деталі джерел тепла [1–4]. Він, як правило, відбувається при механічній, електродуговій, іонно-променевій обробці деталі і може призвести до небажаних структурних та фазових перетворень матеріалу [5–7].

Отже, на сьогодні, існує значна кількість публікацій про дослідження температурного стану поверхонь. Так питання впливу теплоти, що виділяється при механічній обробці поверхні деталі розглядається в роботі [8]. В ній автори запропонували метод дослідження