7. Семчишин Л. М. Узагальнені динамічні міжгалузеві моделі / Л. М. Семчишин, М. О. Недашковський // Вісник Тернопільського національного економічного університету. — Тернопіль : Економічна думка, 2009. — Вип. 1. — С. 169–187
8. Солодовников А. С. Математика в экономике / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов. — М., 2000.
9. Цегелик Г. Г. Чисельні методи / Г. Г. Цегелик. — Л. : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. — 408 с.
10. Cabay S. Systems f Linear Equations with Dense Univariate Polynomial Coefficients. Journal of the Associaation for Computing Machinery. / S. Cabay, B. Domzy. — 2007. — Vol. 34, №3. — P. 646–660.

The generalized dynamic models of productive close system are offered in the article. Inter-branch models and their place are considered among the models of economic dynamics. The numeral calculations of model are conducted. A method over of erection of the systems is brought with matrices to the systems of linear equalizations of algebra. The stages of decision of model are analysed in accordance with the theory of differential equalizations. Complication of algorithm is described and his efficiency is shown from the point of view of computer algebra.

Key words: *dynamic mathematical models, system of linear equalizations of algebra, matrix polynomials, relation of two polynomials, the dynamic model of matrix equalization, complication of algorithm, is generalized.*

Отримано:25.10.2017

УДК 517.988:519.632

М. В. Сидоров, канд. фіз.-мат. наук

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

МЕТОД ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглянуто задачу Діріхле для рівняння теплопровідності з нелінійною функцією потужності теплових джерел та коефіцієнтом теплопровідності, степенево залежним від температури. Для знаходження її чисельного розв'язку запропоновано використати метод двобічних наближень. Наведено результати обчислювального експерименту в одиничному крузі для випадку експоненціальної залежності потужності теплових джерел від температури.

Ключові слова: *нелінійна теплопровідність, додатний розв'язок, метод двобічних наближень, рівняння з гетеротонним оператором.*

Вступ. Лінійні математичні моделі є завжди лише певними наближеннями при описі процесів різної природи, тому у сучасній науці все більше уваги приділяється саме нелінійним математичним моделям та актуальною стає проблема розробки нових та вдосконалення існуючих методів їх чисельного аналізу.

Математичними моделями процесів, що протікають у нелінійних середовищах, зазвичай є нелінійні крайові задачі математичної фізики [12]. Для чисельного аналізу нелінійних крайових задач використовуються методи скінченних різниць, скінченних елементів [9, 11] або двобічні ітераційні методи [1–6]. При застосування методу двобічних наближень будується дві ітераційні послідовності, які з обох боків збігаються до точного розв'язку задачі, що дозволяє не тільки довести існування розв'язку, а ще й на кожному кроці ітераційного процесу мати апостеріорну оцінку похибки, а отже, і зручний критерій закінчення ітерацій. Тому, на нашу думку, саме розвиток останнього методу та поширення його застосувань на якомога більший клас нелінійних задач є найбільш важливим з точки зору створення нових засобів обчислювальної математики. Метод двобічних наближень заснований на використанні теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах [5, 6, 10].

Метою роботи є розробка двобічних ітераційних методів розв'язання задачі Діріхле для рівняння теплопровідності з нелінійною функцією потужності теплових джерел та коефіцієнтом теплопровідності, степенево залежним від температури. Дана робота продовжує дослідження, розпочаті у [1–4].

1. Постановка задачі. Розглядатимемо проблему знаходження додатного розв'язку нелінійної крайової задачі вигляду

$$-div(k(T)gradT) = \lambda f(x,T) \text{ у } \Omega, \tag{1}$$

$$T\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

де $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — обмежена область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, $f(x,T)$ — невід'ємна та неперервна за сукупністю змінних x, T функція, якщо $x \in \Omega$, $T \geq 0$, $k(T) = k_0 T^\sigma$, $\sigma > 0$ — параметри нелінійності середовища, $\lambda > 0$ — стала.

Задача (1), (2) є математичною моделлю процесу теплопровідності, коли коефіцієнт теплопровідності залежить степенево від температури, а також коли в Ω наявні джерела тепловиділення за нелінійним законом $f(x,T)$ (параметр λ характеризує їх потужність).

Аналітичному дослідженню задач нелінійної теплопровідності присвячена, наприклад, книга [8].

У задачі (1), (2) зробимо заміну $T = \left[\dfrac{\sigma+1}{k_0}u\right]^{\frac{1}{1+\sigma}}$, де $u(x)$ — нова невідома функція. Тоді для функції u отримаємо задачу

$$-\Delta u = \lambda F(x, u) \text{ у } \Omega\,, \tag{3}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0\,, \tag{4}$$

де $F(x,u) = f\left(x, \left[\frac{\sigma+1}{k_0}u\right]^{\frac{1}{1+\sigma}}\right)$.

2. Побудова двобічних наближень. У банаховому просторі $C(\overline{\Omega})$ неперервних у $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$ функцій з нормою $\|u\| = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$ виділимо конус K_+ невід'ємних функцій. Відомо [5, 6], що конус K_+ у $C(\overline{\Omega})$ є нормальним.

За допомогою конуса K_+ у просторі $C(\overline{\Omega})$ введемо напівупорядкованість за правилом: для $u, v \in C(\overline{\Omega})$ $u \le v$, якщо $v - u \in K_+$, тобто

$$u \le v \text{, якщо } u(x) \le v(x) \text{ для всіх } x \in \overline{\Omega}\,.$$

Нехай $G(x, \xi)$ — функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-\Delta$ у області Ω, $x = (x_1, ..., x_m)$, $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m)$. Тоді задача (3), (4) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(x) = \lambda \int\limits_{\Omega} G(x, \xi) F(\xi, u(\xi)) d\xi\,. \tag{5}$$

Узагальненим розв'язком задачі (3), (4) називатимемо функцію $u^* \in C(\overline{\Omega})$, яка є розв'язком рівняння (5). Отже, розв'язком (узагальненим) вихідної задачі (1), (2) буде функція

$$T^* = \left[\frac{\sigma+1}{k_0}u^*\right]^{\frac{1}{1+\sigma}}. \tag{6}$$

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор T, який діє у $C(\overline{\Omega})$ за правилом, яке визначається правою частиною інтегрального рівняння (5):

$$T(u) = \lambda \int\limits_{\Omega} G(x, \xi) F(\xi, u(\xi)) d\xi\,. \tag{7}$$

Функція $F(x,u)$ невід'ємна і неперервна за сукупністю змінних x, u, якщо $x \in \Omega$, $u \ge 0$, оскільки таку властивість має функція $f(x,T)$. Функція Гріна $G(x, \xi) \ge 0$, $x, \xi \in \Omega$, $x \ne \xi$. Тоді оператор T залишає інваріантним конус K_+: $T(K_+) \subset K_+$, тобто є додатним.

Припустимо, що функція $F(x, u)$ дозволяє діагональне подання $F(x, u) = \Phi(x, u, u)$, де неперервна за сукупністю змінних x, v, w

функція $\Phi(x, v, w)$ монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $x \in \Omega$. Тоді оператор T вигляду (5) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\widehat{T}(v, w) = \lambda \int_{\Omega} G(x, \xi) \Phi(\xi, v(\xi), w(\xi)) d\xi . \quad (8)$$

Якщо функція $F(x, u)$ монотонно зростає за u для всіх $x \in \Omega$, можна обрати $\Phi(x, v, w) = F(x, v)$, а якщо монотонно спадає за u, то можна покласти $\Phi(x, v, w) = F(x, w)$.

Оператори T і $\widehat{T}$ є цілком неперервними [5, 6].

У конусі K_+ виділимо сильно інваріантний для гетеротонного оператора T конусний відрізок $< v_0, w_0 >$ умовами

$$\widehat{T}(v_0, w_0) \ge v_0 , \ \widehat{T}(w_0, v_0) \le w_0 ,$$

тобто

$$\lambda \int_{\Omega} G(x, \xi) \Phi(\xi, v_0(\xi), w_0(\xi)) d\xi \ge v_0(x) \text{ для всіх } x \in \overline{\Omega} ,$$

$$\lambda \int_{\Omega} G(x, \xi) \Phi(\xi, w_0(\xi), v_0(\xi)) d\xi \le w_0(x) \text{ для всіх } x \in \overline{\Omega} .$$

Сформуємо далі ітераційний процес за схемою

$$v^{(k+1)} = \widehat{T}(v^{(k)}, w^{(k)}) , \ w^{(k+1)} = \widehat{T}(w^{(k)}, v^{(k)}) , \ k = 0,1,2,... ,$$

$$v^{(0)} = v_0 , \ w^{(0)} = w_0 ,$$

тобто

$$v^{(k+1)}(x) = \lambda \int_{\Omega} G(x, \xi) \Phi(\xi, v^{(k)}(\xi), w^{(k)}(\xi)) d\xi , \quad (9)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \lambda \int_{\Omega} G(x, \xi) \Phi(\xi, w^{(k)}(\xi), v^{(k)}(\xi)) d\xi , \ k = 0, 1, 2, ... , \quad (10)$$

$$v^{(0)}(x) = v_0(x) , \ w^{(0)}(x) = w_0(x) . \quad (11)$$

Оскільки конусний відрізок $< v_0, w_0 >$ є сильно інваріантним, а оператор T є гетеротонним, то послідовність $\{v^{(k)}(x)\}$ не спадає за конусом K_+, а послідовність $\{w^{(k)}(x)\}$ не зростає за конусом K_+. Крім того, з нормальності конуса K_+ і цілком неперервності оператора $\widehat{T}$ випливає існування границь $v^*(x)$ і $w^*(x)$ цих послідовностей. При цьому для послідовних наближень $\{v^{(k)}(x)\}$, $\{w^{(k)}(x)\}$ справджується такий ланцюг нерівностей:

$$v_0 = v^{(0)} \le v^{(1)} \le ... \le v^{(k)} \le ... \le v^* \le w^* \le ... \le w^{(k)} \le ... \le w^{(1)} \le w^{(0)} = w_0 .$$

Функції v^* і w^* є розв'язком системи рівнянь

$$v^* = \widehat{T}(v^*, w^*), \; w^* = \widehat{T}(w^*, v^*),$$

тобто системи

$$v^*(x) = \lambda \int_\Omega G(x, \xi)\Phi(\xi, v^*(\xi), w^*(\xi))d\xi ,$$

$$w^*(x) = \lambda \int_\Omega G(x, \xi)\Phi(\xi, w^*(\xi), v^*(\xi))d\xi .$$

Якщо ж отримали, що $v^* = w^* = u^*$, то u^* — єдина на конусному відрізку $<v_0, w_0>$ нерухома точка оператора T, а отже, u^* — єдиний на $<v_0, w_0>$ розв'язок крайової задачі (3), (4).

Достатньою умовою виконання рівності $v^* = w^*$ є умова [6] для всіх додатних чисел v, w і будь-якому $\tau \in (0,1)$ виконується нерівність

$$\Phi\left(x, \tau v, \frac{1}{\tau} w \right) > \tau\Phi(x, v, w), \; x \in \Omega , \qquad (12)$$

яка гарантує u_0 — псевдоугнутість оператора (7) з $u_0(x) = \int_\Omega G(x,\xi)d\xi$.

Тоді інтегральне рівняння (5) (а отже, і крайова задача (1), (2)) має єдиний додатний розв'язок [6], до якого двобічно збігається ітераційний процес (9)–(11).

Таким чином, справджується теорема.

Теорема 1. Нехай гетеротонний оператор (7) має сильно інваріантний конусний відрізок $< v_0, w_0 >$ і виконується умова (12). Тоді ітераційний процес (9)–(11) двобічно збігається до єдиної у конусі K_+ нерухомої точки u^* оператора T :

$$v_0 \leqslant v_1 \leqslant ... \leqslant v_n \leqslant ... \leqslant u^* \leqslant ... \leqslant w_n \leqslant ... \leqslant w_1 \leqslant w_0 .$$

Зазначимо, що перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу є те, що на кожній k -й ітерації для наближеного розв'язку

$$u^{(k)}(x) = \frac{1}{2}(w^{(k)}(x) + v^{(k)}(x))$$

ми маємо зручну апостеріорну оцінку похибки:

$$\left\| u^* - u^{(k)} \right\| \le \frac{1}{2} \left\| w^{(k)} - v^{(k)} \right\|.$$

Отже, якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітерації слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{x \in \Omega}(w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)) < 2\varepsilon .$$

Тоді з точністю ε можна вважати, що

$$u^*(x) \approx u^{(k)}(x) ,$$

а отже, відповідно до (6),

$$T^*(x) \approx \left[\frac{\sigma+1}{k_0} u^{(k)}(x) \right]^{\frac{1}{1+\sigma}} .$$

Сильно інваріантний конусний відрізок можна шукати у вигляді $< v_0, w_0 >=< 0, \beta >$, $\beta > 0$ [1–4]. Тоді нерівності, які визнають v_0, w_0 приймають вигляд

$$\int_\Omega G(x,\xi)\Phi(\xi,0,\beta)d\xi \geq 0 \text{ для всіх } x \in \overline{\Omega},$$

$$\lambda\int_\Omega G(x,\xi)\Phi(\xi,\beta,0)d\xi \leq \beta \text{ для всіх } x \in \overline{\Omega}.$$

Якщо $\widehat{f}(x,0,\beta) \geq 0$ для всіх $x \in \Omega$, $\beta > 0$, то перша з цих нерівностей завжди виконана, а значення β можна знайти з другої нерівності.

3. Результати обчислювального експерименту. Для обчислювального експерименту оберемо у (1), (2) у вигляді $k_0 = 1$, $\sigma = \frac{1}{2}$, $f(x,u) = e^u$, тобто розглянемо задачу

$$-div(\sqrt{T}\, gradT) = \lambda e^T \text{ у } \Omega, \tag{13}$$

$$T\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{14}$$

в одиничному крузі ($m = 2$)

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}.$$

У задачі (13), (14) зробимо заміну $T = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{u^2}$, де u — нова невідома функція. Це призводить до задачі

$$-\Delta u = \lambda \exp\left\{\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{u^2}\right\} \text{ у } \Omega, \tag{15}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{16}$$

Оскільки функція $F(x,u) = \exp\left\{\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{u^2}\right\}$ монотонно зростає за u, то обираємо $\Phi(x,v,w) = \exp\left\{\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{v^2}\right\}$.

У просторі $C(\overline{\Omega})$ задача (15), (16) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(x) = \lambda\int_\Omega G(x,\xi)\cdot \exp\left\{\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{[u(\xi)]^2}\right\} d\xi, \tag{17}$$

де $G(x,\xi)=\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{\rho r_{x\xi^1}}{r_{x\xi}}$, $\rho=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$, точки ξ і ξ^1 симетричні відносно кола одиничного радіуса, $r_{x\xi}$, $r_{x\xi^1}$ — відстані між точками x, ξ і x, ξ^1 відповідно.

Супровідний для гетеротонного оператора

$$T(u)=\lambda\int_\Omega G(x,\xi)\cdot\exp\left\{\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{[u(\xi)]^2}\right\}d\xi$$

має вигляд

$$\widehat{T}(v,w)=\lambda\int_\Omega G(x,\xi)\cdot\exp\left\{\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{[v(\xi)]^2}\right\}d\xi\ .$$

Сильно інваріантний для цього гетеротонного оператора конусний відрізок шукатимемо у вигляді $<v_0,w_0>=<0,\beta>$. Нерівності $\widehat{T}(v_0,w_0)\ge v_0$, $\widehat{T}(w_0,v_0)\le w_0$, які його визначають, приймають вигляд

$$\lambda\int_\Omega G(x,\xi)d\xi\ge 0\ ,\ \lambda\exp\left\{\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{\beta^2}\right\}\int_\Omega G(x,\xi)d\xi\le\beta\ .$$

Перша з цих нерівностей завжди виконується, бо $G(x,\xi)\ge 0$, $x,\xi\in\Omega$, $x\ne\xi$, а з другої нерівності, оскільки $\max\limits_{x\in\bar\Omega}\int_\Omega G(x,\xi)d\xi=\dfrac{1}{4}$, отримуємо, що

$$\beta\exp\left\{-\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{\beta^2}\right\}\ge\frac{\lambda}{4}\ . \tag{18}$$

Нами встановлено, що нерівність (18) має розв'язок відносно β, якщо $\lambda\le 1,0931$.

Двобічний ітераційний процес послідовних наближень до розв'язку рівняння (17) (а отже, і задачі (15), (16)) сформуємо за схемою

$$v^{(k+1)}(x)=\lambda\int_\Omega G(x,\xi)\cdot\exp\left\{\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{[v^{(k)}(\xi)]^2}\right\}d\xi\ , \tag{19}$$

$$w^{(k+1)}(x)=\lambda\int_\Omega G(x,\xi)\cdot\exp\left\{\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{[w^{(k)}(\xi)]^2}\right\}d\xi\ ,\ k=0,1,2,\ldots, \tag{20}$$

$$v^{(0)}(x)=0\ ,\ w^{(0)}(x)=\beta\ .$$

Виконання умови (12) для всіх $\tau\in(0;1)$ перевіряється безпосередньо:

$$\exp\left\{\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{\tau^2v^2}\right\}>\tau\exp\left\{\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{v^2}\right\}.$$

Отже, справджується така теорема.

Теорема 2. Нехай $\lambda \in (0; \approx 1{,}0931)$, а β визначається нерівністю (18). Тоді ітераційний процес (19), (20) з $v^{(0)}(x) = 0$, $w^{(0)}(x) = \beta$ двобічно збігається до єдиного додатного розв'язку задачі (15), (16), а отже, послідовність

$$T^{(k)} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{[u^{(k)}]^2}\ ,$$

де $u^{(k)} = \dfrac{v^{(k)} + w^{(k)}}{2}$ збігається до єдиного додатного розв'язку задачі (13), (14).

Обчислювальний експеримент було проведено для значення $\lambda = 0{,}4$. Для цього значення λ розв'язок нерівності (18) має вигляд $0{,}14313 \le \beta \le 5{,}25829$. Оскільки значення β слід обирати якомога меншим (щоб мати мінімальну довжину конусного відрізка), то обираємо $\beta = 0{,}1432$.

Оберемо $\varepsilon = 10^{-4}$. В таблиці 1 наведено значення $\varepsilon^{(k)} = \max\limits_{x\in\bar{\Omega}} \dfrac{1}{2}\left|w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)\right|$ оцінки похибки наближеного розв'язку $u^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, а в таблиці 3 — значення наближень $w^{(k)}(x)$, $u^{(k)}(x)$ та $v^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, в точці (0; 0). На рис. 1 наведено графіки перерізів верхніх $w^{(k)}(x)$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(x)$ (штрихована лінія) наближень при $x_2 = 0$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Таблиця 1

Значення оцінки похибки наближеного розв'язку

k	0	1	2	3	4	5
$\varepsilon^{(k)}$	$0{,}72\cdot10^{-1}$	$0{,}22\cdot10^{-1}$	$0{,}41\cdot10^{-2}$	$0{,}73\cdot10^{-3}$	$0{,}13\cdot10^{-3}$	$0{,}23\cdot10^{-4}$

Таблиця 2

Значення послідовних наближень в точці (0; 0)

k	0	1	2	3	4	5
$w^{(k)}(0, 0)$	0,14313	0,14313	0,13421	0,13240	0,13207	0,13202
$u^{(k)}(0, 0)$	0,07157	0,12156	0,13012	0,13167	0,13194	0,13199
$v^{(k)}(0, 0)$	0,00000	0,10000	0,12603	0,13094	0,13182	0,13197

Як бачимо, точність $\varepsilon = 10^{-4}$ досягнута на п'ятій ітерації. Тоді

$$T^* \approx T^{(5)} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}\sqrt[3]{[u^{(5)}]^2}\ ,$$

де $u^{(5)} = \dfrac{v^{(5)} + w^{(5)}}{2}$.

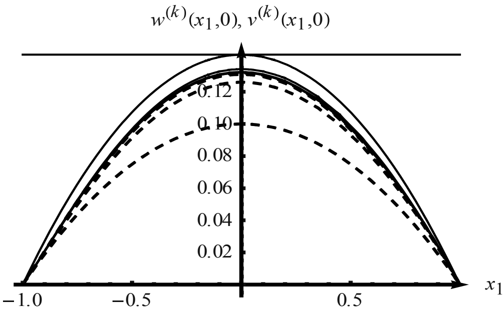

Рис. 1. *Графіки перерізів верхніх* $w^{(k)}(x)$ *(суцільна лінія) та нижніх* $v^{(k)}(x)$ *(штрихована лінія) наближень при* $x_2 = 0$ *для* $k = 0,1,2,3,4,5$

На рис. 2 і 3 наведені поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку $T^{(5)}(x)$ відповідно, а у таблиці 3 значення $T^{(5)}(x)$ в точках $(0,2i;\,0)$, $i = 0,1,2,3,4,5$.

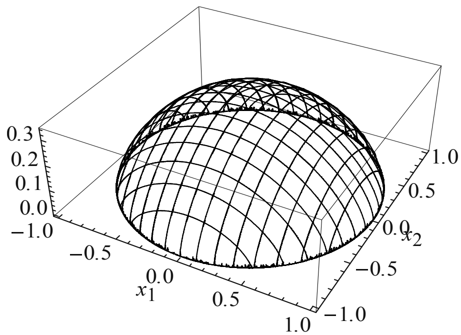

Рис. 2. *Поверхня наближеного розв'язку* $T^{(5)}(x)$

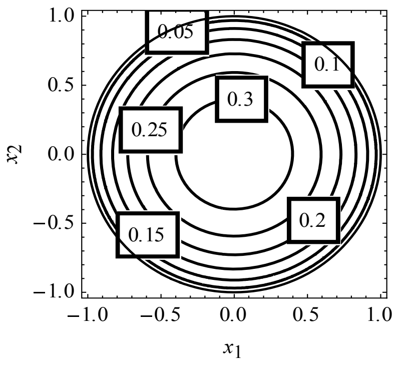

Рис. 3. *Лінії рівня наближеного розв'язку* $T^{(5)}(x)$

Таблиця 3

Значення наближеного розв'язку в точках $(0,2i;0)$, $i=0,1,2,3,4,5$

i	0	1	2	3	4	5
$T^{(5)}(0,2i,0)$	0,3397	0,3300	0,2997	0,2477	0,1669	0,0000

Висновки. В роботі вперше для отримання наближеного розв'язку задачі нелінійної теплопровідності з нелінійною функцією потужності теплових джерел та коефіцієнтом теплопровідності, степенево залежним від температури, запропоновано використати метод двобічних наближень. Обчислювальний експеримент, проведений для тестової задачі, продемонстрував можливості та ефективність цього метода. Результати роботи можуть бути використані у математичному моделюванні процесів у нелінійних середовищах.

Обмеженість використання запропонованого метода може бути пов'язана з тим, що функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-\Delta$ відома лише для певної кількості класичних областей. При розгляді задач у областях некласичної геометрії або у областях, для яких функція Гріна відома, але має складний аналітичний вираз, для побудови відповідного диференціальній задачі нелінійного інтегрального рівняння можна буде використати підхід, заснований на використанні замість функції Гріна відповідної квазіфункції [7].

Список використаних джерел:

1. Колосов А. И. Конструктивное исследование краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений / А. И. Колосов, С. В. Колосова, М. В. Сидоров // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2012. — № 2. — С. 50–57.
2. Колосова С. В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане–Эмдена / С. В. Колосова, В. С. Луханин, М. В. Сидоров // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2015. — № 3. — С. 107–120.
3. Колосова С. В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений / С. В. Колосова, В. С. Луханин, М. В. Сидоров // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2013. — № 1. — С. 35–42.
4. Колосова С. В. Применение итерационных методов к решению эллиптических краевых задач с экспоненциальной нелинейностью / С. В. Колосова, М. В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. — 2013. — № 3 (62). — С. 28–31.
5. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. — М. : Физматгиз, 1962. — 394 с.
6. Опойцев В. И. Нелинейные операторы в пространствах с конусом / В. И. Опойцев, Т. А. Хуродзе. — Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. — 246 с.
7. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые её приложения / В. Л. Рвачев. — К. : Наук. думка, 1982. — 552 с.

8. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. — М. : Наука, 1987. — 480 с.
9. Afrouzi G. A. A Numerical Method for Finding Positive Solution of Dirichlet Problem with a Weight Function / G. A. Afrouzi, S. Mahdavi, Z. Naghizadeh // Journal of Information and Computing Science. — 2006. — Vol. 1. — № 3. — P. 168–172.
10. Amann H. On the number of solutions of nonlinear equations in ordered Banach spaces / H. Amann // J. Funct. Anal. — 1972. — № 11. — P. 346–384.
11. Chen G. Algorithms and visualization for solutions of nonlinear elliptic equations / G. Chen, J. Zhou, W.-M. Ni // Int. J. Bifurcation Chaos. — 2000. — Vol. 10. — № 7. — P. 1565–1612.
12. Pao C. V. Nonlinear parabolic and elliptic equations / C. V. Pao. — New York : Plenum Press, 1992.

The Dirichlet problem for the heat conduction equation with the nonlinear function of the power of heat sources and the coefficient of thermal conductivity, which is power dependent on temperature, is considered. To find its numerical solution, it is proposed to use the method of two-sided approximations. The results of the computational experiment in the unit circle for the case of the exponential dependence of the heat sources power on temperature are given.

Key words: *nonlinear heat conductivity, positive solution, two-sided iterative method, equation with heterotone operator.*

Отримано: 19.10.2017

УДК 517.5

В. А. Сорич, канд. фіз.-мат. наук,
Н. М. Сорич, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

СУМІСНЕ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ЗГОРТОК З ЯДРАМИ ПУАССОНА СУМАМИ ФУР'Є В МЕТРИЦІ ПРОСТОРУ L_p

Встановлено асимптотичні рівності для верхніх меж величини, що характеризує сумісне наближення частинними сумами Фур'є в метриці просторів L_p, $1 \le p \le \infty$, класів інтегралів Пуассона періодичних функцій, що належать одиничній кулі простору L_1.

Ключові слова: *інтеграли Пуассона, сумісне наближення в просторі* L_p*, суми Фур'є.*

Вступ. Стаття присвячена відшуканню асимптотичних рівностей для верхніх меж відхилень лінійних комбінацій згорток з ядрами Пуасона періодичних сумовних функцій від своїх сум Фур'є в метриці простору L_p .