УДК 517.9

Л. Г. Хохлова*, канд. фіз.-мат. наук,
С. Г. Хома-Могильська**, канд. фіз.-мат. наук,
Н. Г. Хома**, канд. фіз.-мат. наук

*Тернопільський національний педагогічний університет
імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль,
**Тернопільський національний економічний університет, м. Тернопіль

ІНТЕГРАЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

У роботі розглядається крайова задача без початкових умов для лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. З використанням методів теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними та методів теорії інтегральних рівнянь для довільної функції $\mu(z) \in C^1(R)$ побудований формальний розв'язок вказаної задачі, як розв'язок інтегрального рівняння. Встановлені нові умови існування класичного розв'язку лінійної крайової задачі без початкових умов для гіперболічного рівняння другого порядку.

Ключові слова: *оператор, клас функцій, крайова задача без початкових умов, гіперболічне рівняння другого порядку, розв'язок, інтегральне рівняння.*

Вступ. Як відомо, в останні десятиліття розроблено новий метод відшукання розв'язку крайових періодичних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку (як лінійних, так і квазілінійних) [1–3], що передбачає першочерговим знаходження розв'язку з подальшою перевіркою виконання крайових умов. Методи, запропоновані ж раніше [4, 7], передбачали відшукання розв'язку у вигляді тригонометричного ряду $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx$. що автоматично забезпечувало виконання крайових умов $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, але накладало додаткові умови на праву частину неоднорідного рівняння.

У працях [5, 6] показано, що для деяких рівнянь та систем можна знайти розв'язок крайової задачі і без початкових умов.

У статті, використовуючи результати та методи робіт [8–10], проведено дослідження крайової задачі без початкових умов для гіперболічного рівняння $u_{tt} - a^2 u_{xx} = cu,\ c = const.$ Встановлено простір функцій, в якому існує розв'язок даної задачі та обґрунтовано ряд властивостей такого розв'язку.

Основні результати. Розглянемо таку крайову задачу:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = cu,\ c = const,\ 0 \le x \le \pi,\ 0 \le t \le T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{2}$$

Справедливим є твердження.

Лема 1. Для довільної функції $\mu(z) \in C^1(R)$ розв'язок $u \in C^{2,2}([0,\pi]\times[0,T])$ інтегрального рівняння

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x} \mu(\alpha)d\alpha + \frac{c}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} u(\xi,\tau)d\xi \equiv u^0(x,t) + \tilde{u}(x,t), \tag{3}$$

є розв'язком диференціального рівняння (1).

Доведення. Покажемо, що функція

$$u^0(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x} \mu(\alpha)d\alpha \tag{4}$$

є розв'язком однорідного рівняння

$$u_{tt}^0 - a^2 u_{xx}^0 = 0. \tag{5}$$

Обчислимо частинні похідні u_{tt}^0 і u_{xx}^0 від функції $u^0(x,t)$, визначеної формулою (4):

$$u_{tt}^0(x,t) = \frac{a}{2}\left(\frac{\partial\,\mu(at+x)}{\partial\,(at+x)} - \frac{\partial\,\mu(at-x)}{\partial\,(at-x)}\right);$$

$$u_{xx}^0(x,t) = \frac{1}{2a}\left(\frac{\partial\,\mu(at+x)}{\partial\,(at+x)} - \frac{\partial\,\mu(at-x)}{\partial\,(at-x)}\right).$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що $u_{tt}^0 - a^2 u_{xx}^0 \equiv 0.$ Отже, функція $u^0(x,t)$, яка визначена формулою (4), є розв'язком однорідного рівняння (5).

Обчислимо похідні $\tilde{u}_{tt}$ і $\tilde{u}_{xx}$ від функції $\tilde{u}(x,t)$, визначеної формулою

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{c}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} u(\xi,\tau)d\xi. \tag{6}$$

Маємо

$$\tilde{u}_t(x,t) = \frac{c}{2}\int_0^t (u(x+a(t-\tau),\tau) + u(x-a(t-\tau),\tau))\,d\tau;$$

$$\tilde{u}_x(x,t) = \frac{c}{2a}\int_0^t (u(x+a(t-\tau),\tau) - u(x-a(t-\tau),\tau))\,d\tau;$$

$$\tilde{u}_{tt}(x,t) = \frac{c}{2}(u(x,t) + u(x,t)) +$$

$$+\frac{ca}{2}\int_0^t\left(\frac{\partial u(x+a(t-\tau),\tau)}{\partial(x+a(t-\tau))}-\frac{\partial u(x-a(t-\tau),\tau)}{\partial(x-a(t-\tau))}\right)d\tau;$$

$$\tilde{u}_{xx}=\frac{c}{2a}\int_0^t\left(\frac{\partial u(x+a(t-\tau),\tau)}{\partial(x+a(t-\tau))}-\frac{\partial u(x-a(t-\tau),\tau)}{\partial(x-a(t-\tau))}\right)d\tau.$$

Підстановкою переконуємося, що $\tilde{u}_{tt}-a^2\tilde{u}_{xx}=cu.$ Отже, функція $\tilde{u}(x,t),$ яка визначена формулою (6), є частинним розв'язком лінійного неоднорідного рівняння (1).

Таким чином, функція $u(x,t)=u^0(x,t)+\tilde{u}(x,t),$ яка є розв'язком інтегрального рівняння (3), є розв'язком рівняння (1) для довільної функції $\mu(z)\in C^1(R)$.

На основі методу послідовних наближень

$$u_0(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}\mu(\alpha)d\alpha,$$

$$u_1(x,t)=u_0+\frac{c}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}u_0(\xi,\tau)d\xi,$$

$$u_2(x,t)=u_0+\frac{c}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}u_1(\xi,\tau)d\xi,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n(x,t)=u_0+\frac{c}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}u_{n-1}(\xi,\tau)d\xi,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

завжди існує розв'язок лінійного інтегрального рівняння (3).

Лему 1 доведено.

Доведемо, що розв'язок інтегрального рівняння задовольняє крайові умови в деякому класі функцій. Оскільки кожне послідовне наближення є відомою функцією, то треба показати, в якому класі функцій виконуються крайові умови

$$u_n(0,t)=u_n(\pi,t)=0,\ n=0,1,2,...,n,... \ . \tag{7}$$

Тоді гранична функція $\tilde{u}(x,t),$ що є розв'язком інтегрального рівняння, автоматично задовольнятиме крайові умови (2).

З'ясуємо, в якому класі функцій другий доданок послідовних наближень задовольняє крайову умову $\tilde{u}(\pi,t)=0,$ тобто коли

$$\frac{c}{2a}\int_0^t d\tau \int_{\pi-a(t-\tau)}^{\pi+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi \equiv 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

де $f(\xi,\tau)d\xi = u_n(\xi,\tau)d\xi,\ n = 0,1,2,...,n,...$.

Зрозуміло, що рівність (8) може виконуватися за умови

$$\int_{\pi-a(t-\tau)}^{\pi+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{9}$$

Доведемо, що існує клас функцій, для яких справедливою є рівність (9). На основі лівої частини рівності (9) одержуємо

$$\int_{\pi-a(t-\tau)}^{\pi+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi = \int_{\pi-a(t-\tau)}^{-a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi + \int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi +$$

$$+\int_{a(t-\tau)}^{\pi+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi = \int_{\pi-a(t-\tau)}^{-a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi + \tag{10}$$

$$+\int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi - \int_{\pi-a(t-\tau)}^{-a(t-\tau)} f(\pi-\eta,\tau)d\eta.$$

Отже, якщо ввести такий клас функцій:

$$B^- = \{f : f(x,t) = f(\pi - x,t) = -f(-x,t)\},\ 0 \le x \le \pi,\ 0 \le t \le T,$$

то з рівності (10) при $f(x,t) \in B^-$ випливає виконання умови (9).

Аналогічно при умові $f(x,t) \in B^-$ маємо

$$\frac{c}{2a}\int_0^t d\tau \int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi \equiv 0, \quad 0 \le t \le T.$$

Справедливе твердження.

Лема 2. Якщо $f(x,t) \in B^-$, то $f(x,t) \in Q^-_{2\pi\times[0,T]}$, де

$$Q^-_{2\pi\times[0,T]} = \{f : f(x,t) = -f(-x,t) = f(x+2\pi,t)\}.$$

Доведення. Справді,

$$f(x+2\pi,t) = f(\pi-(-\pi-x),t) = -f(\pi+x,t) =$$
$$= -f(\pi-(-x),t) = -f(-x,t) = f(x,t),$$

що й потрібно було довести.

Через $Q^-_{2\pi}$ позначимо такий клас функцій:

$$Q^-_{2\pi} = \{\mu : \mu(z) = -\mu(-z) = \mu(z+2\pi)\},$$

визначених і неперервних на R.

Лема 3. Якщо $\mu(z) \in Q^-_{2\pi}$, то функція $u^0(x,t)$, визначена формулою (4), задовольняє крайові умови

$$u^0(0,t) = u^0(\pi,t) = 0, \tag{11}$$

Доведення. Справді,

$$u^0(0,t) = \frac{1}{2a}\int_{at}^{at}\mu(\alpha)d\alpha \equiv 0.$$

Покладемо замість x у формулі (4) $x = \pi$. Маємо

$$u^0(\pi,t) = \frac{1}{2a}\int_{at-\pi}^{at+\pi}\mu(\alpha)d\alpha = \frac{1}{2a}\int_{at-\pi}^{-\pi}\mu(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2a}\int_{-\pi}^{\pi}\mu(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2a}\int_{\pi}^{at+\pi}\mu(\alpha)d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{at-\pi}^{-\pi}\mu(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2a}\int_{-\pi}^{\pi}\mu(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2a}\int_{-\pi}^{at-\pi}\mu(2\pi+\beta)d\beta = 0,$$

що й потрібно було довести.

Зауваження. Якщо через B_0^- позначити клас функцій

$$B_0^- = \{\mu : \mu(z) = -\mu(-z) = \mu(\pi - z)\},$$

то розв'язок однорідного рівняння (5), визначений формулою (4), при $\mu(z) \in B_0^-$ також задовольняє крайові умови (11). Справді, якщо $\mu(z) \in B_0^-$, то $\mu(z) \in Q_{2\pi}^-$.

Отже, якщо кожне послідовне наближення $u_n(x,t)$, $n = 0,1,2,\ldots$, задовольняє крайові умови (7), то гранична функція $\lim_{n\to\infty} u_n(x,t) = U(x,t)$ задовольняє крайові умови $U(0,t) = U(\pi,t) = 0$.

Таким чином, враховуючи вище доведені твердження, можна сформулювати наступний результат.

Теорема 1. Для довільної функції $\mu(z) \in C^1(R) \cap B_0^-$ існує розв'язок крайової задачі (1), (2).

Встановимо властивості розв'язку крайової задачі (1), (2).

Введемо позначення

$$u(x,t) = (A[\mu, f])(x,t), \tag{12}$$

де A — оператор, який породжує розв'язок крайової задачі (1), (2) і при $\mu(z) \in C^1(R) \cap B_0^-$, $f(x,t) = u_n(x,t) \in C^{1,0}([0,\pi]\times[0,T]) \cap B^-$, $n = 0,1,2,\ldots$, задається формулою

$$(A[\mu, f])(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}\mu(\alpha)d\alpha + \frac{c}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi. \tag{13}$$

Теорема 2. Якщо $\mu(z) \in C(R) \cap B_0^-$ і $f(x,t) \in C([0,\pi]\times[0,T]) \cap B^-$, то справедливі рівності

$$(A[\mu, f])(-x,t) = -(A[\mu, f])(x,t); \qquad (14)$$

$$(A[\mu, f])(\pi - x,t) = (A[\mu, f])(x,t), \qquad (15)$$

тобто оператор A переводить клас функцій із класу B^- у цей же клас функцій $(B^- \xrightarrow{A} B^-)$.

Доведення. На основі формули (13) одержуємо

$$(A[\mu, f])(-x,t) = \frac{1}{2a}\int_{at+x}^{at-x} \mu(\alpha)d\alpha + \frac{c}{2a}\int_0^t d\tau \int_{-x-a(t-\tau)}^{-x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x} \mu(\alpha)d\alpha - \frac{c}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x+a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)} f(-\eta,\tau)d\eta = -(A[\mu, f])(x,t)\,.$$

Отже, рівність (14) справедлива.

Для доведення рівності (15) запишемо

$$(A[\mu, f])(\pi - x,t) = \frac{1}{2a}\int_{at-\pi+x}^{at+\pi-x} \mu(\alpha)d\alpha + \frac{c}{2a}\int_0^t d\tau \int_{\pi-x-a(t-\tau)}^{\pi-x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi \equiv$$
$$\equiv u^0(\pi - x,t) + \tilde{u}(\pi - x,t). \qquad (16)$$

Окремо доведемо, що

$$u^0(\pi - x,t) = u^0(x,t), \qquad (17)$$

$$\tilde{u}(\pi - x,t) = \tilde{u}(x,t). \qquad (18)$$

На основі формули (4) одержуємо

$$u^0(\pi - x,t) = \frac{1}{2a}\int_{at-\pi+x}^{at+\pi-x} \mu(\alpha)d\alpha = -\frac{1}{2a}\int_{-at+2\pi-x}^{-at+x} \mu(\pi-\beta)d\beta =$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{-at+x}^{2\pi-at-x} \mu(\beta)d\beta = -\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{-2\pi+at+x} \mu(-\gamma)d\gamma = \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{-2\pi+at+x} \mu(\gamma)d\gamma =$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x} \mu(\gamma)d\gamma + \frac{1}{2a}\int_{at+x}^{-2\pi+at+x} \mu(\gamma)d\gamma = \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x} \mu(\gamma)d\gamma + \qquad (19)$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^{-2\pi} \mu(\gamma)d\gamma = \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x} \mu(\gamma)d\gamma + 0 = u^0(x,t).$$

Враховуючи формулу (6), маємо

$$\tilde{u}(\pi - x,t) = \frac{c}{2a}\int_0^t d\tau \int_{\pi-x-a(t-\tau)}^{\pi-x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi =$$
$$= -\frac{c}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x+a(t-\tau)}^{x-a(t-\tau)} f(\pi-\eta,\tau)d\eta = \frac{c}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\eta,\tau)d\eta = \tilde{u}(x,t). \qquad (20)$$

Таким чином, враховуючи рівності (19), (20) на основі (16) переконуємося у справедливості теореми 2.

Висновки. У статті встановлено умови існування розв’язку крайової задачі без початкових умов для лінійного гіперболічного рівняння другого порядку вигляду $u_{tt} - a^2 u_{xx} = cu$, $c = const$, $0 \le x \le \pi$, $0 \le t \le T$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $0 \le t \le T$. Для довільної функції $\mu(z) \in C^1(R)$ побудовано формальний розв’язок вказаної задачі, як розв’язок інтегрального рівняння $u(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{at+x} \mu(\alpha)d\alpha + \frac{c}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} u(\xi,\tau)d\xi$. Визначені класи функцій $B_0^- = \{\mu : \mu(z) = -\mu(-z) = \mu(\pi - z)\}$, $B^- = \{f : f(x,t) = f(\pi - x,t) = -f(-x,t)\}$, в яких існує формальний розв’язок крайової задачі без початкових умов для лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. На основі цих результатів побудований оператор *A*, який переводить клас функцій B^- самого в себе. Це дозволяє використовувати його в побудові наближених обчислень розв’язку крайових задач для квазілінійних гіперболічних рівнянь.

Отримані результати є достатньо вагомими і започатковують дослідження крайових задач для гіперболічних рівнянь другого порядку виду $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t,u_t,u_x)$, а також крайових задач для рівняння дисперсії хвиль $u_{tt} - a^2 u_{xx} + b_1 u_t + b_2 u_x + cu = 0$ та більш загальних рівнянь $u_{tt} - a^2 u_{xx} + \alpha u_t + \varepsilon F(t,x,u,u_t,u_x,u_{tt},u_{xx},u_{tx}) = 0$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $0 \le t \le T$.

Список використаних джерел:

1. Khoma L. G. A linear periodic boundary-value problem for a second order hyperbolic equation / L. G. Khoma, N. G. Khoma // Ukrainian Mathematical Journal. — 1999. — Vol. 51, № 2. — P. 319–323.
2. Mitropolskii Yu. A. Periodic solution of second-order quasilinear hyperbolic equations / Yu. A. Mitropolskii, S. H. Khoma-Mohyl’s’ka // Ukrainian Math. Journal. — 2005. — Vol. 52, № 10. — P. 1563–1570.
3. Mitropolskii Yu. A. Conditions for the existence of solutions of a periodic boundary-value problem for an inhomogeneous linear hyperbolic equation of the second order / Yu. A. Mitropolskii, N. G. Khoma // Ukrainian Mathematical Journal. — 1995. — Vol. 47. — P. 1068–1074.

4. Rabinowitz P. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equation / P. Rabinowitz // Comm. Pure Appl. Math. — 1967. — Vol. 20, № 1. — P. 145–205.
5. Кирилич В. М. Крайова задача без початкових умов для лінійної одномірної системи рівнянь гіперболічного типу / В. М. Кирилич, А. Д. Мишкіс // Доп. АН УРСР. — 1991. — Сер. А, № 5. — С. 8–10.
6. Кирилич В. М. Краевая задача без начальных условий для линейной одномерной системы уравнений гиперболического типа / В. М. Кирилич, А. Д. Мышкис //Дифференциальные уравнения. — 1992. — Вып. 28, № 3. — С. 463–469.
7. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б. И. Пташник. — К. : Наукова думка, 1984. — 264 с.
8. Самойленко А. М. Аналітичний метод відшукання 2π-періодичних розв'язків гіперболічних рівнянь другого порядку / А. М. Самойленко, С. Г. Хома-Могильська //Доп. НАН України. — 2010. — № 4. — С. 25–29.
9. Самойленко А. М. Окремий випадок існування 2π-періодичних розв'язків крайових задач для гіперболічного рівняння другого порядку / А. М. Самойленко, Н. Г. Хома, С. Г. Хома-Могильська // Доп. НАН України. — 2012. — № 2. — С. 25–29.
10. Хома Н. Г. Умови існування 2π-періодичного гладкого розв'язку квазілінійного рівняння гіперболічного типу / Н. Г. Хома, С. Г. Хома-Могильська, Л. Г. Хохлова // Вісник Запорізького національного університету. — 2016. — № 1. — С. 257–264.

The boundary value problem without initial conditions for linear hyperbolic equations of second order $u_{tt} - a^2 u_{xx} = cu,\ c = const$, $0 \le x \le \pi,\ 0 \le t \le T$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ is considered. The formal solution to the said problem as the solution of the integral equation $u(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{at+x} \mu(\alpha)d\alpha + \frac{c}{2a}\int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} u(\xi,\tau)d\xi$ is obtained.

Key words: *operator, class of function, boundary–value problem without initial conditions, hyperbolic equation of second order, integral equation.*

Отримано: 19.05.2017