17. Shilov G. Mathematical analysis. Second special course / G. Shilov. — Moscow : Nauka, 1965.
18. Gelfand I. Some questions in the theory of differential equations / I. Gelfand, G. Shilov. — Moscow : Fizmatgiz, 1958.

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв’язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики для напівобмеженого кусково-однорідного суцільного циліндра.

Ключові слова: *гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, головні розв’язки.*

Отримано: 31.05.2017

УДК 517.5

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,
В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

КРИТЕРІЇ ЕКСТРЕМАЛЬНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ ДЛЯ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОГО У РОЗУМІННІ ОПУКЛОЇ ФУНКЦІЇ НАБЛИЖЕННЯ ФІКСОВАНОГО ЕЛЕМЕНТА ОПУКЛОЮ МНОЖИНОЮ

У статті встановлено критерії екстремальної послідовності для задачі найкращого у розумінні опуклої функції наближення фіксованого елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору.

Ключові слова: *опукла функція, опукла множина, задача найкращого наближення, екстремальна послідовність, критерій екстремальної послідовності.*

Вступ. У статті для задачі найкращого у розумінні опуклої функції наближення фіксованого елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору встановлено критерії екстремальної послідовності, окремі з яких узагальнюють критерії екстремального елемента для цієї задачі, встановлені у праці [1].

Постановка задачі. Нехай X — дійсний лінійний нормований простір, F — опукла множина простору X, p — опукла та неперервна на X функція, x — елемент простору X.

Задачею найкращого у розумінні функції p наближення елемента x множиною F будемо називати задачу відшукання величини

$$E(x)=\inf_{u\in F} p(x-u). \qquad (1)$$

Величину $E(x)$ будемо називати найкращим у розумінні функції p наближенням елемента x множиною F.

Якщо для $x \in X$ існує елемент $u_0 \in F$ такий, що

$$E(x)=p(x-u_0),$$

то його будемо називати елементом найкращого у розумінні функції p наближення елемента x множиною F або просто екстремальним елементом для величини (1).

Послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ елементів $u_k \in F$, для якої $\lim\limits_{k\to\infty} p(x-u_k)=E(x)$, будемо називати послідовністю найкращого у розумінні функції p наближення елемента x множиною F або просто екстремальною послідовністю для величини (1).

Актуальність теми. Відомо, що необхідність наближення складних математичних об’єктів більш простими і зручними у користуванні виникає у різних розділах математичної науки, особливо прикладних напрямів.

Теорія наближення бере свій початок у роботах П. Л. Чебишова, який ще у 50-х роках XIX століття поставив задачу про рівномірне (чебишовське) наближення неперервної на сегменті дійснозначної функції множиною алгебраїчних поліномів степеня, що не перевищує деякого натурального числа.

Згодом було досліджено велику кількість задач подібного роду, коли окремі функції наближались алгебраїчними, тригонометричними поліномами, раціональними функціями в метриках різних просторів.

Внаслідок цих досліджень була сформульована більш загальна задача наближення фіксованого елемента $x \in X$ опуклою множиною $F \subset X$, тобто задача відшукання величини

$$\inf_{u\in F} \|x-u\|. \qquad (2)$$

Величина (2) вивчалась багатьма авторами. Основні результати цих досліджень підсумовані, зокрема, у монографіях Н. І. Ахієзера [2], В. К. Дзядика [3], М. П. Корнєйчука [4], П.-Ж. Лорана [5], О. І. Степанця [6,7], В. М. Тихомирова [8] та ін.

Як відомо, виникають задачі наближення в яких міра відхилення між фіксованим елементом x простору X та елементами $u \in F$ є, так званою, «викривленою метрикою»: переднормою, функцією Мінковського, сублінійною функцією, функцією повільного зростання. Всі ці задачі вкладаються у схему постановки задачі відшукання величини (1).

Результати загального характеру, отримані при дослідженні величини (1), становлять самостійний інтерес, а також слугуватимуть відправним пунктом отримання відповідних результатів для конкретних задач, що включаються у схему її постановки, зіграють важливу роль при побудові та обґрунтуванні збіжності чисельних методів розв'язання цих задач.

У праці [1] встановлено, зокрема, критерії екстремального елемента для величини (1).

Проте часто екстремальний елемент для величини (1) не існує (особливо у випадках, коли X є нескінченновимірним простором), тоді коли існування екстремальної послідовності для цієї величини гарантовано.

Тому актуальною є проблема встановлення критеріїв екстремальності не лише елементів множини F, а й послідовностей u_k, $k=1,2,...,$ елементів цієї множини таких, що існує $\lim\limits_{k\to\infty} p\left(x-u_k\right)$.

Встановлення критеріїв екстремальної послідовності для величини (1) дозволить для цієї величини розширити можливості застосувань результатів дослідження цієї величини.

Мета роботи. Встановити критерії екстремальної послідовності для задачі відшукання величини (1).

Критерії екстремальної послідовності для величини (1), основані на співвідношенні двоїстості для цієї величини. Будемо позначати через X^* — простір, спряжений з X, а через p^* — функцію, спряжену з p, тобто функцією, задану на X^*, яка задається рівністю

$$p^*\left(f\right)=\sup_{x\in X}\left(f\left(x\right)-p\left(x\right)\right),\ f\in X^*$$

(див., наприклад, [9, с. 183]).

Множина $domp^*=\left\{f\in X^*:p^*\left(f\right)<+\infty\right\}$ називається ефективною множиною функції p (див., наприклад, [9, с. 57]).

Згідно з теоремою Фенхеля-Моро (див., наприклад, [9, с. 186]) має місце співвідношення

$$p\left(x\right)=\sup_{f\in X^*}\left(f\left(x\right)-p^*\left(f\right)\right)=\sup_{f\in domp^*}\left(f\left(x\right)-p^*\left(f\right)\right),\ x\in X. \quad (3)$$

Позначимо через $M=\left\{f\in domp^*:\sup\limits_{u\in F}f\left(u\right)<+\infty\right\}$.

Теорема 1 [1]. Для того щоб функція E приймала скінченні значення на X, необхідно і достатньо, щоб $M\neq\varnothing$.

З метою виключення із розгляду випадку, коли $E\left(x\right)=-\infty$, $x\in X$, будемо припускати, що $M\neq\varnothing$.

Теорема 2 [2]. Для довільного $x \in X$ справедливе співвідношення двоїстості

$$E(x) = \inf_{u \in F} p(x-u) = \max_{f \in M}\left(f(x) - p^*(f) - \sup_{u \in F} f(u) \right).$$

Теорема 3. Нехай $u_k \in F$, $k = 1,2,\dots$, існує $\lim\limits_{k\to\infty} p(x-u_k)$. Для того щоб послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною послідовністю для величини (1), необхідно і достатньо існування функціонала $f_0 \in X^*$ такого, що:

1) $f_0 \in M$,

2) $\lim\limits_{k\to\infty}\left(f_0(x-u_k) - p^*(f_0) \right) = \lim\limits_{k\to\infty} p(x-u_k)$,

3) $\lim\limits_{k\to\infty} f_0(u_k) = \sup\limits_{u \in F} f_0(u)$.

Доведення. Необхідність. Нехай $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1). Згідно з теоремою 2 існує функціонал $f_0 \in X^*$ такий, що $f_0 \in M$ та

$$\begin{aligned} \inf_{u \in F} p(x-u) &= \max_{f \in M}\left(f(x) - p^*(f) - \sup_{u \in F} f(u) \right) = \\ &= f_0(x) - p^*(f_0) - \sup_{u \in F} f_0(u). \end{aligned} \tag{4}$$

Оскільки $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1), то внаслідок (3), (4)

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} p(x-u_k) &= \inf_{u \in F} p(x-u) == f_0(x) - p^*(f_0) - \sup_{u \in F} f_0(u) = \\ &= \inf_{u \in F}\left(f_0(x-u) - p^*(f_0) \right) \le f_0(x-u_k) - p^*(f_0) \le \\ &\le \sup_{f \in X^*}\left(f(x-u_k) - p^*(f) \right) = p(x-u_k),\ k = 1,2,\dots . \end{aligned} \tag{5}$$

Внаслідок (5)

$$\lim_{k\to\infty}\left(f_0(x-u_k) - p^*(f_0) \right) = \lim_{k\to\infty} p(x-u_k),$$

$$\lim_{k\to\infty} f_0(u_k) = \sup_{u \in F} f_0(u).$$

Тому співвідношення 1)–3) мають місце.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для послідовності $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, $u_k \in F$, $k = 1, 2, \ldots$, існує $\lim\limits_{k\to\infty} p(x - u_k)$ та функціонал $f_0 \in X^*$, який задовольняє умови 1)–3). Доведемо, що $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Згідно з умовою 3) $f_0(u) \le \lim\limits_{k\to\infty} f_0(u_k), u \in F$.

Тому, врахувавши співвідношення (3) та 2), можна записати, що

$$0 \ge \lim_{k\to\infty} f_0(u - u_k) = \lim_{k\to\infty}\Big(\big(f_0(x - u_k) - p^*(f_0)\big) - \big(f_0(x - u) - p^*(f_0)\big)\Big) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} p(x - u_k) - p(x - u), u \in F.$$

Звідси випливає, що для всіх $u \in F$

$$p(x - u) \ge \lim_{k\to\infty} p(x - u_k) \ge \inf_{u\in F} p(x - u).$$

Тому

$$\inf_{u\in F} p(x - u) \ge \lim_{k\to\infty} p(x - u_k) \ge \inf_{u\in F} p(x - u).$$

Отже, $\lim\limits_{k\to\infty} p(x - u_k) = \inf\limits_{u\in F} p(x - u)$.

Це й означає, що $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Наслідок 1. Нехай F — конус простору X з вершиною в точці 0, тобто для всіх $u \in F$, $t > 0$ має місце співвідношення $tu \in F$, $u_k \in F$, $k = 1, 2, \ldots$, існує $\lim\limits_{k\to\infty} p(x - u_k)$.

Для того щоб послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною послідовністю для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо існування функціонала $f_0 \in X^*$ такого, що:

1) $f_0(x) - p^*(f_0) = \lim\limits_{k\to\infty} p(x - u_k)$,

2) $\sup\limits_{u\in F} f_0(u) = 0$.

Доведення. Необхідність. Нехай послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1). Згідно з теоремою 3 існує функціонал $f_0 \in X^*$, який задовольняє умови 1)–3) цієї теореми.

Оскільки $f_0 \in M$, то $\sup\limits_{u \in F} f_0(u) \in R$. Переконаємося, що $\sup\limits_{u \in F} f_0(u) = 0$. Дійсно, якщо припустити, що $\sup\limits_{u \in F} f_0(u) > 0$, то для деякого $u_0 \in F$ $f_0(u_0) > 0$. Тоді

$$\sup_{u \in F} f_0(u) \ge \sup_{t \in R} f_0(tu_0) = \sup_{t \in R}\left(tf_0(u_0)\right) = +\infty ,$$

що суперечить співвідношенню $\sup\limits_{u \in F} f_0(u) \in R$.

Отже, $\sup\limits_{u \in F} f_0(u) \le 0$. Тому $f_0(u) \le 0$ для всіх $u \in F$. Нехай $u_0 \in F$. Тоді $f_0(u_0) \le 0$, $0 \ge \sup\limits_{u \in F} f_0(u) \ge \sup\limits_{t>0} f_0(tu_0) = \sup\limits_{t>0}\left(tf_0(u_0)\right) = 0$.

Звідси випливає, що $\sup\limits_{u \in F} f_0(u) = 0$.

Відповідно до умов 3) теореми 3 тоді $\lim\limits_{k \to \infty} f_0(u_k) = 0$. З урахуванням цієї рівності та співвідношень 2), 3) теореми 3 робимо висновок, що функціонал f_0 задовольняє умови 1), 2) наслідку.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай існує функціонал $f_0 \in X^*$ з властивостями 1), 2). Згідно з (3)

$$p(x - u_k) = \sup_{f \in X^*}\left(f(x - u_k) - p^*(f)\right) \ge f_0(x - u_k) - p^*(f_0), k = 1, 2, \ldots .$$

З урахуванням цих співвідношень та 2) отримаємо, що

$$\sup_{u \in F} f_0(u) = 0 \ge f_0(u_k) \ge f_0(x) - p^*(f_0) - p(x - u_k), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Оскільки за умовою має місце співвідношення 1), то

$$\lim_{k \to \infty} f_0(u_k) = 0 = \sup_{u \in F} f_0(u) .$$

Отже, функціонал f_0 задовольняє умови 1)-3) теореми 3. Згідно з цією теоремою послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Достатність доведено.

Наслідок доведено.

Наслідок 2. Нехай F — підпростір простору X, $u_k \in F$, $k = 1, 2, \ldots$, існує $\lim\limits_{k \to \infty} p(x - u_k)$.

Для того щоб послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною послідовністю для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо існування функціонала $f_0 \in X^*$ такого, що:

1) $f_0(x) - p^*(f_0) = \lim\limits_{k\to\infty} p(x - u_k)$,

2) $f_0(u) = 0$, $u \in F$.

Доведення. Необхідність. Нехай послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1). Оскільки F — підпростір простору X, то F є конусом цього простору з вершиною в точці 0.

Внаслідок наслідку 1 існує функціонал $f_0 \in X^*$, який задовольняє умови 1), 2) цього наслідку. Тому $\sup\limits_{u\in F} f_0(u) = 0$. Звідси випливає, що $f_0(u) = 0$, $u \in F$. Дійсно, якщо припустити, що $f_0(u_0) \neq 0$ для деякої точки $u_0 \in F$, то тоді одержимо, що

$$\sup_{u\in F} f_0(u) \geq \sup_{t\in R} f_0(tu_0) = \sup_{t\in R}\left(tf_0(u_0)\right) = +\infty .$$

Отже, f_0 задовольняє умови 1), 2) наслідку 2.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай $f_0 \in X^*$ і мають місце співвідношення 1), 2). Тоді $\sup\limits_{u\in F} f_0(u) = 0$. Отже, функціонал f_0 задовольняє умови 1), 2) наслідку 1. Оскільки F є конусом з вершиною в точці 0, то згідно з наслідком 1 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Достатність доведено.
Наслідок доведено.

Наслідок 3. Нехай $x_1,...,x_n$ — фіксовані елементи простору X, $F = \left\{u : u = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \alpha_i \in R, i = \overline{1,n}\right\}$ — скінченновимірний підпростір простору X, породжений елементами $x_1,...,x_n$, $u_k \in F$, $k = 1,2,...$, існує $\lim\limits_{k\to\infty} p(x - u_k)$.

Для того щоб послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною послідовністю для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо існування функціонала $f_0 \in X^*$ такого, що:

1) $f_0(x) - p^*(f_0) = \lim\limits_{k\to\infty} p(x - u_k)$,

2) $f_0(x_i) = 0$, $i = \overline{1,n}$.

Справедливість цього наслідку випливає з наслідку 2, якщо врахувати, що для $f_0 \in X^*$ рівність $f_0(u) = 0$, $u \in F$, в розглядуваному випадку справедлива тоді і тільки тоді, коли $f_0(x_i) = 0$, $i = \overline{1,n}$.

Твердження 1. Якщо h — додатно однорідна функція, задана на X, тобто $h(tx) = th(x)$ для всіх $x \in X$ та всіх $t \ge 0$, то

$$domh^* = \left\{ f : f \in X^*, h^*(f) = 0 \right\}. \tag{6}$$

Доведення. Нехай h — додатно однорідна функція, задана на X, $f \in domh^*$. Переконаємося, що $h^*(f) = 0$. Дійсно, оскільки $f \in domh^*$, то $h^*(f) = \sup\limits_{x\in X}\left(f(x) - h(x)\right) < +\infty$. Звідси випливає, що $f(x) \le h(x),\ x \in X$. В протилежному випадку існує $x_1 \in X$, що $f(x_1) > h(x_1)$. Тоді

$$h^*(f) = \sup_{x\in X}\left(f(x) - h(x)\right) \ge \sup_{t\ge 0}\left(f(tx_1) - h(tx_1)\right) = \left(f(x_1) - h(x_1)\right)\sup_{t\ge 0} t = +\infty,$$

що суперечить співвідношенню $f \in domh^*$.

Отже, для $f \in domh^*$ $f(x) \le h(x),\ x \in X$. Звідси випливає, що для $f \in domh^*$

$$0 = f(0) - h(0) \le \sup_{x\in X}\left(f(x) - h(x)\right) = h^*(f) \le 0.$$

Отже, $h^*(f) = 0$. Тому $domh^* \subset \left\{ f : f \in X^*, h^*(f) = 0 \right\}$. Зрозуміло, що має місце і протилежне включення. Тому співвідношення (6) має місце.

Твердження доведено.

Наслідок 4. Нехай в задачі відшукання величини (1) p є опуклою, неперервною та додатно однорідною функцією, заданою на X, $u_k \in F$, $k = 1, 2, \ldots$, існує $\lim\limits_{k\to\infty} p(x - u_k)$.

Для того щоб послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною послідовністю для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо існування функціонала $f_0 \in X^*$ такого, що:

1) $f_0(x) \le p(x),\ x \in X$,

2) $\lim\limits_{k\to\infty} f_0(x-u_k) = \lim\limits_{k\to\infty} p(x-u_k)$,

3) $\lim\limits_{k\to\infty} f_0(u_k) = \sup\limits_{u\in F} f_0(u)$.

Справедливість цього наслідку випливає з теореми 3 та твердження 1.

Наслідок 5 [1]. Для того щоб елемент $u_0 \in F$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо існування функціонала $f_0 \in X^*$ такого, що

1) $f_0 \in M$,

2) $f_0(x-u_0) - p^*(f_0) = p(x-u_0)$,

3) $f_0(u_0) = \sup\limits_{u\in F} f_0(u)$.

Справедливість наслідку безпосередньо випливає з теореми 3, якщо врахувати, що елемент $u_0 \in F$ буде екстремальним елементом для величини (1) тоді і тільки тоді, коли стаціонарна послідовність $u_k = u_0$, $k = 1, 2, \ldots$, буде екстремальною послідовністю для цієї величини.

Наслідок 6 [10, с. 241]. Нехай $u_k \in F$, $k = 1, 2, \ldots$, існує $\lim\limits_{k\to\infty} \|x-u_k\|$.

Для того щоб послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною послідовністю для величини (2), необхідно і достатньо існування функціонала $f_0 \in X^*$ такого, що:

1) $\|f_0\| \le 1$,

2) $\lim\limits_{k\to\infty} f_0(x-u_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \|x-u_k\|$,

3) $\lim\limits_{k\to\infty} f_0(u_k) = \sup\limits_{u\in F} f_0(u)$.

Справедливість цього наслідку безпосередньо випливає з наслідку 4, якщо врахувати, що функція $p(x) = \|x\|$, $x \in X$, є опуклою, неперервною та додатно однорідною функцією, заданою на X , і, крім того, в цьому випадку для $f \in X^*$

$$p^*(f) = \|\bullet\|^*(f) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \|f\| \le 1, \\ +\infty, & \text{якщо } \|f\| > 1 \end{cases} \tag{7}$$

(див., наприклад, [11, с. 227]).

Наслідок 7 [8, с. 150]. Для того щоб елемент $u_0 \in F$ був екстремальним елементом для величини (2), необхідно і достатньо існування функціонала $f_0 \in X^*$ такого, що

1) $\|f_0\| = 1$,
2) $f_0(x-u_0) = \|x-u_0\|$,
3) $f_0(u_0) = \sup\limits_{u \in F} f_0(u)$.

Критерії колмогоровського типу екстремальної послідовності для величини (1). Розглянемо далі деякі критерії колмогоровського типу екстремальності послідовності для задачі відшукання величини (1).

Теорема 4. Нехай $u_k \in F$, $k = 1,2,\dots$, існує $\lim\limits_{k\to\infty} p(x-u_k)$.

Для того щоб послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною послідовністю для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $u \in F$ існувала послідовність $\left\{f_k^u\right\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k^u \in X^*$, $k = 1,2,\dots$, така, що:

1) $f_k^u \in M$, $k = 1,2,\dots$,
2) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\left(f_k^u(x-u_k) - p^*\left(f_k^u\right)\right) = \lim\limits_{k\to\infty} p(x-u_k)$,
3) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} f_k^u(u-u_k) \le 0$.

Доведення. Достатність. Нехай для кожного $u \in F$ існує послідовність f_k^u, $k = 1,2,\dots$, для якої виконуються умови 1) – 3) цієї теореми. Тоді існує підпослідовність $\left\{f_{k_l}^u\right\}_{l=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{f_k^u\right\}_{k=1}^{\infty}$ така, що

$$\lim_{l\to\infty}\left(f_{k_l}^u\left(x-u_{k_l}\right) - p^*\left(f_{k_l}^u\right)\right) = \lim_{k\to\infty} p(x-u_k). \qquad (8)$$

Внаслідок 3)

$$\overline{\lim_{l\to\infty}} f_{k_l}^u\left(u-u_{k_l}\right) \le 0. \qquad (9)$$

Маємо, що для $u \in F$

$$f_{k_l}^u\left(u-u_{k_l}\right) = \left(f_{k_l}^u\left(x-u_{k_l}\right) - p^*\left(f_{k_l}^u\right)\right) - \left(f_{k_l}^u(x-u) - p^*\left(f_{k_l}^u\right)\right) \ge$$
$$\ge f_{k_l}^u\left(x-u_{k_l}\right) - p^*\left(f_{k_l}^u\right) - p(x-u)$$

(див. співвідношення (3)).

З урахуванням (8), (9) звідси одержимо, що

$$0 \ge \overline{\lim_{l\to\infty}} f_{k_l}^u\left(u-u_{k_l}\right) \ge \lim_{l\to\infty}\left(f_{k_l}^u\left(x-u_{k_l}\right)-p^*\left(f_{k_l}^u\right)\right)-p\left(x-u\right)=$$

$$=\lim_{k\to\infty} p\left(x-u_k\right)-p\left(x-u\right).$$

Тому для $u \in F$ $\;p\left(x-u\right) \ge \lim_{k\to\infty} p\left(x-u_k\right) \ge \inf_{u\in F} p\left(x-u\right)$.

Звідки

$$\inf_{u\in F} p\left(x-u\right) \ge \lim_{k\to\infty} p\left(x-u_k\right) \ge \inf_{u\in F} p\left(x-u\right).$$

Отже,

$$\lim_{k\to\infty} p\left(x-u_k\right) = \inf_{u\in F} p\left(x-u\right).$$

Це й означає, що $\left\{u_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Достатність доведено.

Необхідність. Нехай послідовність $\left\{u_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Переконаємося, що для будь-якого $u \in F$ існує послідовність $\left\{f_k^u\right\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k^u \in X^*$, $k=1,2,\ldots$, для якої виконуються умови 1)–3) теореми.

Згідно з теоремою 3 існує функціонал $f_0 \in X^*$, який задовольняє умови 1)–3) цієї теореми.

Для $u \in F$ покладемо $f_k^u = f_0$, $k=1,2,\ldots$. Тоді внаслідок умов 1)–3) теореми 3 маємо, що

$$f_k^u \in M,\ k=1,2,\ldots,$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left(f_k^u\left(x-u_k\right)-p^*\left(f_k^u\right)\right)=\lim_{k\to\infty}\left(f_k^u\left(x-u_k\right)-p^*\left(f_k^u\right)\right)=\lim_{k\to\infty} p\left(x-u_k\right),$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} f_k^u\left(u_k\right)=\sup_{z\in F} f_k^u\left(z\right) \ge f_k^u\left(u\right)=f_0\left(u\right).$$

З останнього співвідношення випливає, що $\overline{\lim_{k\to\infty}} f_k^u\left(u-u_k\right) \le 0$.

Отже, послідовність $\left\{f_k^u\right\}_{k=1}^{\infty}$ функціоналів $f_k^u = f_0 \in X^*$, $k=1,2,\ldots$, задовольняє умови 1)–3) теореми.

Необхідність доведено.

Теорему доведено.

Наслідок 8. Нехай $u_k \in F$, $k=1,2,\ldots$, існує $\lim_{k\to\infty} p\left(x-u_k\right)$.

Для того щоб послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною послідовністю для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $u \in F$ існував функціонал $f^u \in X^*$ такий, що:

1) $f^u \in M$,

2) $\lim\limits_{k\to\infty}\left(f^u\left(x-u_k\right)-p^*\left(f^u\right)\right)=\lim\limits_{k\to\infty} p\left(x-u_k\right)$,

3) $\lim\limits_{k\to\infty} f^u\left(u-u_k\right)\le 0$.

Доведення. Достатність. Нехай для $u \in F$ існує функціонал $f^u \in X^*$ та виконуються умови 1)–3) цього наслідку. Тоді для послідовності $\left\{f_k^u\right\}_{k=1}^{\infty}$, де $f_k^u = f^u$, $k=1,2,\ldots$, виконуються умови 1)–3) теореми 4. Згідно з цією теоремою послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Достатність доведено.

Необхідність. Нехай $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1). Згідно з теоремою 3 існує функціонал $f_0 \in X^*$, який задовольняє умови 1)–3) цієї теореми.

Для $u \in F$ покладемо $f^u = f_0$. Легко переконатися, що функціонал f^u задовольняє умови 1)–3) наслідку 8.

Необхідність доведено.
Наслідок доведено.

Наслідок 9. Нехай $u_k \in F$, $k=1,2,\ldots$, існує $\lim\limits_{k\to\infty} p\left(x-u_k\right)$.

Для того щоб послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною послідовністю для величини (1), необхідно і достатньо існування функціоналу $f_0 \in X^*$ такого, що:

1) $f_0 \in M$,

2) $\lim\limits_{k\to\infty}\left(f_0\left(x-u_k\right)-p^*\left(f_0\right)\right)=\lim\limits_{k\to\infty} p\left(x-u_k\right)$,

3) $\lim\limits_{k\to\infty} f_0\left(u-u_k\right)\le 0$ для всіх $u \in F$.

Наслідок 10. Нехай $u_k \in F$, $k=1,2,\ldots$, існує $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|x-u_k\right\|$.

Для того щоб послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною послідовністю для величини (2), необхідно і достатньо існування функціоналу $f_0 \in X^*$ такого, що:

1) $\|f_0\| \le 1$,

2) $\lim\limits_{k\to\infty} f_0\left(x-u_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty}\|x-u_k\|$,

3) $\lim\limits_{k\to\infty} f_0\left(u-u_k\right) \le 0$, $u \in F$.

Справедливість цього наслідку випливає із співвідношення (7) та наслідку 9.

Зрозуміло, що з розглянутих вище теорем та наслідків можна отримати й інші критерії екстремальності послідовності та елемента для величин (1) та (2).

Висновки. Для задачі найкращого у розумінні опуклої та неперервної функції наближення фіксованого елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору встановлено критерії екстремальної послідовності, основані на співвідношенні двоїстості, а також критерії колмогоровського типу.

Список використаних джерел:

1. Гнатюк В. А. Общие свойства наилучшего приближения по выпуклой непрерывной функции / В. А. Гнатюк, В. С. Щирба // Укр. мат. журн. — 1982. — Вып. 34, № 5. — С. 608–613.
2. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. — М. : Наука, 1965. — 407 с.
3. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций / В. К. Дзядык. — М. : Наука, 1977. — 510 с.
4. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения / Н. П. Корнейчук. — М. : Наука, 1976. — 320 с.
5. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
6. Степанец А. И. Методы теории приближений / А. И. Степанец. — К. : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. I. — 427 с.
7. Степанец А. И. Методы теории приближений / А. И. Степанец. — К. : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. II. — 468 с.
8. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений / В. М. Тихомиров. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 307 с.
9. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иофе, В. М. Тихомиров. — М. : Наука, 1974. — 408 с.
10. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения / Е. Г. Гольштейн. — М. : Наука, 1971. — 352 с.
11. Алексеев В. М. Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1979. — 429 с.

The criterias of the extremal sequence for the problem of the best at sense of the convex function of the approximation of a fixed element of a linear normed space from a convex set of this space are proved in the article.

Key words: *the convex function, the convex set, the problem of the best approximation, the extremal sequence, the criteria of the extremal sequence.*

Отримано: 20.09.2017

UDC 519.21

Ya. I. Yeleyko*, Doctor of Science,
N. V. Buhrii,** Ph. D.

*Ivan Franko Lviv National University, Lviv,
**Lviv Polytechnic National University, Lviv

THE CONVERGENCE RATE OF THE THIRD AND THE FOURTH MOMENTS

The perturbation ε of the random environment Ω is considered. There is proved that as $\varepsilon \to 0$ the perturbed third and the perturbed fourth moments differ from the third and the fourth moments respectively very little. The convergence rate of the perturbed third and the perturbed fourth moments to the unperturbed ones is investigated.

Key words: *earnings per share, risk, third and fourth moments, perturbation of an environment, convergence rate.*

Introduction. A problem about finding of the expected profit and risk is sufficiently important. In particular, Sharpe in [1; 2] was calculating the average expected returns and risks of individual securities and whole their portfolios. In articles [3; 4] the average expected earnings per share and risk of share are investigated. There is showed that the convergence rate of the perturbed profit and the perturbed risk to the unperturbed ones is linear. The necessary and sufficient conditions at which the convergence rate of the perturbed profit to unperturbed one has order $k \in \mathbb{N}$ are established. The similar problem for the perturbed risk is considered.

For studying such characteristics of statistical distributions as asymmetric function and excess are used the third and the fourth moments respectively. It is vital to note that these characteristics are quite important in the formation of the portfolio. So investigation of the behavior of the third and the fourth moments in the perturbed environment is actual at this time.

In this paper we will consider the third and the fourth moments of earnings per share. We will clear up the matter about the change of these quantities at the perturbation of an environment. We will also investigate the convergence rate of the perturbed third and the perturbed fourth moments of earnings per share to the unperturbed ones.

