18. Shilov G. Mathematical analysis. Second special course / G. Shilov. — Moscow : Nauka, 1965. — 328 p.
19. Gelfand I. Some questions in the theory of differential equations / I. Gelfand, G. Shilov. — Moscow : Fizmatgiz, 1958. — 274 p.

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НАПІВОБМЕЖЕНОГО КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики для напівобмеженого кусково-однорідного порожнистого циліндра.

Ключові слова: гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, головні розв'язки.

Отримано: 18.05.2018

УДК 517.5

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,
В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

КРИТЕРІЇ УЗАГАЛЬНЕНОГО ЧЕБИШОВСЬКОГО У РОЗУМІННІ ЗВАЖЕНИХ ВІДСТАНЕЙ ЦЕНТРА КІЛЬКОХ ТОЧОК ЛІНІЙНОГО НОРМОВАНОГО ПРОСТОРУ ВІДНОСНО ОПУКЛОЇ МНОЖИНИ ЦЬОГО ПРОСТОРУ

Загальновідомо, що визначальною ідеєю в питаннях зв'язків математики з практикою є ідея наближення.

Однією з центральних галузей теорії наближення є теорія наближення функцій, родоначальником якої вважається П. Л. Чебишов. У 50-х роках XIX століття він ввів поняття найкращого наближення неперервної на відрізку функції за допомогою алгебраїчних поліномів заданого степеня. Згодом було досліджено велику кількість подібних задач.

З розвитком теорії лінійних нормованих просторів стало зрозумілим, що низка задач найкращого наближення є частинними випадками задачі найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору.

Важливим питанням дослідження цієї задачі є встановлення критеріїв її екстремального елемента.

Загальний критерій екстремального елемента задачі найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору, оснований на співвідношенні двоїстості для цієї задачі, встановлено М. П. Корнєйчуком та В. М. Тихомировим.

Дещо відмінним від цього критерію є критерій колмогоровського типу.

Важливий клас задач теорії наближення утворюють задачі одночасного наближення кількох елементів лінійного нормованого простору множиною цього простору.

Серед них — задача відшукання чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок лінійного нормованого простору відносно опуклої множини цього простору, яка розглядається в цій роботі. Частинними її випадками є згадані вище задачі.

У статті для розглядуваної задачі встановлено співвідношення двоїстості, критерії екстремальної послідовності, доведення яких базуються на цьому співвідношенні, критерії колмогоровського типу екстремальної послідовності, критерії екстремального елемента.

Отримані результати конкретизовано на окремі випадки досліджуваної задачі.

Встановлено низку допоміжних тверджень, які становлять і самостійний інтерес.

Ключові слова: *лінійний нормований простір, зважені відстані, опукла множина, узагальнений чебишовський центр, екстремальна послідовність, критерії узагальненого чебишовського центра.*

Вступ. У статті встановлено критерії узагальненого чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок лінійного нормованого простору відносно опуклої множини цього простору, основані на співвідношенні двоїстості для відповідної екстремальної задачі, та критерії колмогоровського типу.

Постановка задачі. Нехай X — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір елементів x з нормою $\|x\|$, $a_i \in X$, $m_i \in R$, $m_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, $n \in N$ і $n > 1$, V — опукла множина простору X.

Задачею відшукання чебишовського у розумінні зважених відстаней центра системи точок a_i, $i = \overline{1,n}$, відносно множини V (у множині V) будемо називати задачу відшукання величини

$$\inf_{x\in V} \max_{1\le i\le n}\left(m_i \|a_i - x\|\right). \tag{1}$$

Послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ елементів $x_k \in V$, для якої

$$\lim_{k\to\infty} \max_{1\le i\le n}\left(m_i \|a_i - x_k\|\right) = \inf_{x\in V} \max_{1\le i\le n}\left(m_i \|a_i - x\|\right), \tag{2}$$

будемо називати узагальненим чебишовським у розумінні зважених відстаней центром системи точок a_i, $i=\overline{1,n}$, відносно множини V або просто екстремальною послідовністю для величини (1).

Якщо існує елемент $x^* \in V$ такий, що

$$\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i - x^*\right\|\right) = \inf_{x\in V}\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i - x\right\|\right),$$

то його будемо називати чебишовським у розумінні зважених відстаней центром системи точок a_i, $i=\overline{1,n}$, відносно множини V або просто екстремальним елементом для величини (1).

Актуальність теми. Відомо, що необхідність наближення складних математичних об'єктів більш простими і зручними у користуванні виникає у різних розділах математичної науки, особливо прикладних напрямів.

Важливий клас задач теорії наближення утворюють задачі одночасного наближення кількох елементів. До задач одночасного наближення кількох елементів відноситься задача відшукання чебишовського центра кількох елементів лінійного нормованого простору відносно опуклої множини цього простору.

З єдиних позицій задачі найкращої одночасної апроксимації кількох елементів лінійного нормованого простору опуклими множинами цього простору розглядалися у працях [1–3].

Однією з центральних проблем дослідження цих задач є встановлення критеріїв їх екстремальних елементів. Проте часто екстремальний елемент для відповідних величин не існує, тоді коли існування їх екстремальних послідовностей гарантовано.

Тому актуальною є проблема встановлення не лише критеріїв екстремального елемента для величини (1), а й критеріїв екстремальної послідовності для цієї величини.

Мета роботи. Встановити критерії узагальненого чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок лінійного нормованого простору відносно опуклої множини цього простору, отримати з цих критерії, як наслідки, критерії екстремального елемента для величини (1).

Допоміжні твердження. Позначимо через $X^n = X\times\cdots\times X$ — n-ий декартовий степінь X.

Для $x=\left(x_1,\dots,x_n\right)\in X^n$, $y=\left(y_1,\dots,y_n\right)\in X^n$, $\alpha\in R$ покладемо

$$x+y=\left(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n\right),\ \alpha x=\left(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n\right).$$

Легко переконатися, що введені в такий спосіб операції додавання елементів X^n та множення їх на дійсні числа задовольняють всім аксіомам лінійного простору. Тому X^n є лінійним над полем дійсних чисел простором.

Для елементів $x=\left(x_1,...,x_n\right)$ простору X^n покладемо

$$\|x\|=\left\|\left(x_1,...,x_n\right)\right\|=\max_{1\le i\le n}\left(m_i\,\|x_i\|\right). \tag{3}$$

Легко переконатися, що функція $x\in X^n\to\|x\|$, задана співвідношенням (3), є нормою на X^n. Тоді X^n є лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором. Позначимо через $\left(X^n\right)^*$ — простір, спряжений з X^n.

Твердження 1. Для кожного елемента $f\in\left(X^n\right)^*$ існують однозначно визначені елементи $f_i\in X^*$, $i=\overline{1,n}$, такі, що

$$f\left(x_1,...,x_n\right)=\sum_{i=1}^{n} f_i\left(x_i\right),\ \left(x_1,...,x_n\right)\in X^n .$$

Якщо $f_i\in X^*$, $i=\overline{1,n}$, то

$$f\left(x_1,...,x_n\right)=\sum_{i=1}^{n} f_i\left(x_i\right),\ \left(x_1,...,x_n\right)\in X^n ,$$

є лінійним неперервним функціоналом, заданим на X^n.

Якщо $f\in\left(X^n\right)^*$, $f_i\in X^*$, $i=\overline{1,n}$, та $f\left(x_1,...,x_n\right)=\sum_{i=1}^{n} f_i\left(x_i\right)$, $\left(x_1,...,x_n\right)\in X^n$, то $\|f\|=\sum_{i=1}^{n}\frac{\|f_i\|}{m_i}$.

Твердження 2. Має місце таке співвідношення двоїстості

$$\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le n}\left(m_i\,\|a_i-x\|\right)=$$

$$=\max\left\{\sum_{i=1}^{n} m_i f_i\left(a_i\right)-\sup_{x\in V}\sum_{i=1}^{n} m_i f_i\left(x\right): f_i\in X^*, i=\overline{1,n}, \sum_{i=1}^{n}\|f_i\|\le 1\right\}= \tag{4}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} m_i f_i^*\left(a_i\right)-\sup_{x\in V}\sum_{i=1}^{n} m_i f_i^*\left(x\right),$$

де $f_i^*\in X^*$, $i=\overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n}\left\|f_i^*\right\|=1$.

Справедливість твердження випливає з твердження 1, рівності

$$\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i-x\right\|\right)=\inf_{x\in V}\left\|\left(a_1,...,a_n\right)-\left(x,...,x\right)\right\|=\inf_{y\in M}\left\|a-y\right\|,$$

де $M=\left\{y=\left(x,...,x\right):x\in V\right\}$, $a=\left(a_1,...,a_n\right)$, та теореми 2.3.1 [4, с. 28].

Теорема 1. Нехай $\left\{t_i^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $i=\overline{1,n}$, — послідовності дійсних чисел, існує $\lim\limits_{k\to\infty}\max\limits_{1\le i\le n}t_i^k$, $I=\left\{i\in\left\{1,...,n\right\}:\lim\limits_{k\to\infty}t_i^k=\lim\limits_{k\to\infty}\max\limits_{1\le i\le n}t_i^k\right\}$.

Для того щоб $I\ne\varnothing$, необхідно і достатньо, щоб існували числа $\alpha_i\ge 0$, $i=\overline{1,n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$, такі, що

$$\lim_{k\to\infty}\left(\alpha_1t_1^k+\cdots+\alpha_nt_n^k\right)=\lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}t_i^k, \tag{5}$$

причому $\left\{i\in\left\{1,...,n\right\}:\alpha_i>0\right\}\subset I$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $I\ne\varnothing$. Покладемо $\alpha_i=0$ для всіх $i\in\left\{1,...,n\right\}\setminus I$ та $\alpha_i\ge 0$, $i\in I$, $\sum\limits_{i\in I}\alpha_i=1$. Тоді $\alpha_i\ge 0$, $i=\overline{1,n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\alpha_1t_1^k+\cdots+\alpha_nt_n^k\right)=\lim_{k\to\infty}\sum_{i\in I}\alpha_it_i^k=\sum_{i\in I}\alpha_i\lim_{k\to\infty}t_i^k=$$
$$=\sum_{i\in I}\alpha_i\lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}t_i^k=\lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}t_i^k\sum_{i\in I}\alpha_i=\lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}t_i^k,$$

причому $\left\{i\in\left\{1,...,n\right\}:\alpha_i>0\right\}\subset I$.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай існують числа $\alpha_i\ge 0$, $i=\overline{1,n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$, для яких виконується (5). Переконаємося, що $I\ne\varnothing$, причому $\left\{i\in\left\{1,...,n\right\}:\alpha_i>0\right\}\subset I$.

Оскільки $\alpha_i\ge 0$, $i=\overline{1,n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$, то $\left\{i\in\left\{1,...,n\right\}:\alpha_i>0\right\}\ne\varnothing$.

Для $i\in\left\{i\in\left\{1,...,n\right\}:\alpha_i>0\right\}$ та $k=1,2,...$ маємо, що $0\le\alpha_i\left(\max\limits_{1\le i\le n}t_i^k-t_i^k\right)\le\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\max\limits_{1\le i\le n}t_i^k-t_i^k\right)=\max\limits_{1\le i\le n}t_i^k-\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_it_i^k$,

$$0\le\max_{1\le i\le n}t_i^k-t_i^k\le\frac{1}{\alpha_i}\left(\max_{1\le i\le n}t_i^k-\sum_{i=1}^{n}\alpha_it_i^k\right). \tag{6}$$

Оскільки має місце (5), то

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\alpha_i}\left(\max_{1\le i\le n}t_i^k-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i t_i^k\right)=0\ . \qquad (7)$$

Зі співвідношень (6), (7) отримуємо, що

$$\lim_{k\to\infty}\left(\max_{1\le i\le n}t_i^k-t_i^k\right)=0\ .$$

Оскільки за умовою теореми існує $\lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}t_i^k$, то звідси випливає, що

$$\lim_{k\to\infty}t_i^k=\lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}t_i^k\ .$$

Це означає, що $i\in I$. Отже, для будь-якого $i\in\left\{i\in\{1,...,n\}:\alpha_i>0\right\}$ $i\in I$. Тому $i\in\left\{i\in\{1,...,n\}:\alpha_i>0\right\}\subset I$.

Звідси та з співвідношення $\left\{i\in\{1,...,n\}:\alpha_i>0\right\}\ne\varnothing$ випливає, що $I\ne\varnothing$.

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Зауважимо, що справедливість цієї теореми випливає також з леми 2.1 [1, с. 249].

Критерії екстремальної послідовності для величини (1), основані на співвідношенні двоїстості (4). Встановимо критерії екстремальної послідовності для величини (1), доведення яких базуються на твердженнях 1, 2 та теоремі 1.

Теорема 2. Нехай послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ є узагальненим чебишовським у розумінні зважених відстаней центром системи точок a_i, $i=\overline{1,n}$, відносно множини V (екстремальною послідовністю для величини (1)), тобто для неї виконується співвідношення (2).

Тоді

$$I=\left\{i\in\{1,...,n\}:\lim_{k\to\infty}\left(m_i\left\|a_i-x_k\right\|\right)=\lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i-x_k\right\|\right)\right\}\ne\varnothing$$

та існують функціонали $f_i^*\in X^*,\ i\in I$, які задовольняють умови:

1) $\sum_{i\in I}\left\|f_i^*\right\|=1$;

2) $\lim_{k\to\infty}f_i^*\left(a_i-x_k\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\left\|f_i^*\right\|\left\|a_i-x_k\right\|\right),\ i\in I$;

3) $\lim_{k\to\infty}\sum_{i\in I}m_i f_i^*\left(x_k\right)=\sup_{x\in V}\sum_{i\in I}m_i f_i^*\left(x\right)$.

Доведення. Нехай $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1). Згідно з твердженням 2 існують такі функціонали

$$f_i^* \in X^*,\ i=\overline{1,n},\ \sum_{i=1}^{n}\left\|f_i^*\right\|=1, \tag{8}$$

для яких має місце співвідношення двоїстості (4). З урахуванням цього співвідношення та включення $x_k \in V$, $k=1,2,\ldots$, отримаємо, що

$$\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i-x\right\|\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i f_i^*\left(a_i\right)-\sup_{x\in V}\sum_{i=1}^{n}m_i f_i^*\left(x\right)=$$

$$=\inf_{x\in V}\sum_{i=1}^{n}m_i f_i^*\left(a_i-x\right)\le\sum_{i=1}^{n}m_i f_i^*\left(a_i-x_k\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i f_i^*\left(a_i\right)-\sum_{i=1}^{n}m_i f_i^*\left(x_k\right)\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}m_i\left\|f_i^*\right\|\left\|a_i-x_k\right\|\le\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i-x_k\right\|\right)\sum_{i=1}^{n}\left\|f_i^*\right\|=\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i-x_k\right\|\right).$$

Оскільки має місце співвідношення (2), то звідси випливає, що

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n}m_i f_i^*\left(x_k\right)=\sup_{x\in V}\sum_{i=1}^{n}m_i f_i^*\left(x\right), \tag{9}$$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n}m_i f_i^*\left(a_i-x_k\right)=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left\|f_i^*\right\|\left(m_i\left\|a_i-x_k\right\|\right)=\lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i-x_k\right\|\right). \tag{10}$$

З рівності (10) та теореми 1 випливає, що $I\ne\varnothing$ та

$$\left\{i\in\{1,\ldots,n\}:\left\|f_i^*\right\|>0\right\}=\left\{i\in\{1,\ldots,n\}:f_i^*\ne 0\right\}\subset I.$$

Звідси одержуємо, що $f_i^*=0$, $i\in\{1,\ldots,n\}\setminus I$. Внаслідок цього та співвідношення (8)–(10) отримуємо, що мають місце рівності 1), 3) та

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i\in I}m_i f_i^*\left(a_i-x_k\right)=\lim_{k\to\infty}\sum_{i\in I}m_i\left\|f_i^*\right\|\left\|a_i-x_k\right\|. \tag{11}$$

Очевидно, що співвідношення 2) має місце для

$$i\in I\setminus\left\{i\in\{1,\ldots,n\}:f_i^*\ne 0\right\},$$

оскільки для цих індексів i $f_i^*=0$.

Нехай тепер $i\in\left\{i\in\{1,\ldots,n\}:f_i^*\ne 0\right\}$. Маємо, що

$$0\ge m_i f_i^*\left(a_i-x_k\right)-m_i\left\|f_i^*\right\|\left\|a_i-x_k\right\|\ge\sum_{i\in I}m_i f_i^*\left(a_i-x_k\right)-\sum_{i\in I}m_i\left\|f_i^*\right\|\left\|a_i-x_k\right\|.$$

Звідси та співвідношення (11) одержуємо, що для

$$i\in\left\{i\in\{1,\ldots,n\}:f_i^*\ne 0\right\}\subset I\quad\lim_{k\to\infty}\left(m_i f_i^*\left(a_i-x_k\right)-m_i\left\|f_i^*\right\|\left\|a_i-x_k\right\|\right)=0.$$

Оскільки для цих індексів i

$$\lim_{k\to\infty}\left(m_i\left\|f_i^*\right\|\left\|a_i-x_k\right\|\right)=\left\|f_i^*\right\|\lim_{k\to\infty}\left(m_i\left\|a_i-x_k\right\|\right)=\left\|f_i^*\right\|\lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i-x_k\right\|\right),$$

то

$$\lim_{k\to\infty}\left(m_i f_i^*\left(a_i-x_k\right)\right)=\lim_{k\to\infty}\left(m_i\left\|f_i^*\right\|\left\|a_i-x_k\right\|\right),$$

$$\lim_{k\to\infty} f_i^*\left(a_i-x_k\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\left\|f_i^*\right\|\left\|a_i-x_k\right\|\right).$$

Отже, співвідношення 2) також має місце.

Теорему доведено.

З доведеної теореми випливає, що екстремальними послідовностями для величини (1) можуть бути лише ті послідовності $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k\in V$, $k=1,2,\dots$, для яких існує $\lim\limits_{k\to\infty}\max\limits_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i-x_k\right\|\right)$ та множина

$$I=\left\{i\in\{1,\dots,n\}:\lim_{k\to\infty}\left(m_i\left\|a_i-x_k\right\|\right)=\lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i-x_k\right\|\right)\right\}\ne\varnothing .$$

У зв'язку з цим далі будемо розглядати лише такі послідовності.

Теорема 3. Нехай $x_k\in V$, $k=1,2,\dots$, існує $\lim\limits_{k\to\infty}\max\limits_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i-x_k\right\|\right)$,

$$I=\left\{i\in\{1,\dots,n\}:\lim_{k\to\infty}\left(m_i\left\|a_i-x_k\right\|\right)=\lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i-x_k\right\|\right)\right\}\ne\varnothing .$$

Для того щоб послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ була узагальненим чебишовським у розумінні зважених відстаней центром системи точок a_i, $i=\overline{1,n}$, відносно множини V (екстремальною послідовністю для величини (1)), необхідно і достатньо, щоб існували функціонали $f_i^*\in X^*$, $i\in I$, які задовольняють умови 1)–3) теореми 2.

Доведення. Необхідність теореми була доведена в теоремі 2.

Доведемо достатність. Нехай для послідовності $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, про яку йде мова в теоремі, існують функціонали $f_i^*\in X^*$, $i\in I$, які задовольняють умови 1)–3) теореми 2. Переконаємося, що така послідовність є екстремальною для величини (1).

Згідно з умовами 1)–3) для довільного $x\in V$ маємо:

$$\sum_{i\in I} m_i f_i^*\left(-x\right)\ge\lim_{k\to\infty}\sum_{i\in I} m_i f_i^*\left(-x_k\right),$$

$$\sum_{i\in I} m_i f_i^*\left(a_i-x\right)\ge\lim_{k\to\infty}\sum_{i\in I} m_i f_i^*\left(a_i-x_k\right)=\sum_{i\in I} m_i\lim_{k\to\infty} f_i^*\left(a_i-x_k\right)=$$

$$= \sum_{i\in I} \left\| f_i^* \right\| \lim_{k\to\infty} \left(m_i \left\| a_i - x_k \right\| \right) = \sum_{i\in I} \left\| f_i^* \right\| \lim_{k\to\infty} \max_{1\le i\le n} \left(m_i \left\| a_i - x_k \right\| \right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \max_{1\le i\le n} \left(m_i \left\| a_i - x_k \right\| \right).$$

Отже,

$$\lim_{k\to\infty} \max_{1\le i\le n} \left(m_i \left\| a_i - x_k \right\| \right) \le \sum_{i\in I} m_i f_i^* \left(a_i - x \right) \le \sum_{i\in I} m_i \left\| f_i^* \right\| \left(\left\| a_i - x \right\| \right) \le$$

$$\le \max_{1\le i\le n} \left(m_i \left\| a_i - x \right\| \right) \sum_{i\in I} \left\| f_i^* \right\| = \max_{1\le i\le n} \left(m_i \left\| a_i - x \right\| \right), \ x \in V .$$

Тому

$$\lim_{k\to\infty} \max_{1\le i\le n} \left(m_i \left\| a_i - x_k \right\| \right) \le \inf_{x\in V} \max_{1\le i\le n} \left(m_i \left\| a_i - x \right\| \right) \le \max_{1\le i\le n} \left(m_i \left\| a_i - x_k \right\| \right), \ k = 1, 2, \ldots .$$

Звідси й випливає, що

$$\lim_{k\to\infty} \max_{1\le i\le n} \left(m_i \left\| a_i - x_k \right\| \right) = \inf_{x\in V} \max_{1\le i\le n} \left(m_i \left\| a_i - x \right\| \right) .$$

Це означає, що послідовність $\left\{ x_k \right\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Зауважимо, що з доведеної теореми легко випливає справедливість теореми 2.3 [1, с. 251], яка є критерієм екстремальної послідовності для величини (1) у випадку, коли $m_i = 1$, $i = \overline{1, n}$.

Наслідок 1. Нехай в задачі відшукання величини (1) V є опуклим конусом з вершиною в точці 0, $x_k \in V$, $k = 1, 2, \ldots$, існує $\lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_{1\le i\le n} \left(m_i \left\| a_i - x_k \right\| \right)$,

$$I = \left\{ i \in \left\{ 1, \ldots, n \right\} : \lim_{k\to\infty} \left(m_i \left\| a_i - x_k \right\| \right) = \lim_{k\to\infty} \max_{1\le i\le n} \left(m_i \left\| a_i - x_k \right\| \right) \right\} \ne \varnothing .$$

Для того щоб послідовність $\left\{ x_k \right\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існували функціонали $f_i^* \in X^*$, $i \in I$, які задовольняють умови:

1) $\sum\limits_{i\in I} \left\| f_i^* \right\| = 1$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty} f_i^* \left(a_i - x_k \right) = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\left\| f_i^* \right\| \left\| a_i - x_k \right\| \right), \ i \in I$;

3) $\sum\limits_{i\in I} m_i f_i^* \left(x \right) \le 0 , \ x \in V$;

4) $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i\in I} m_i f_i^*\left(x_k\right)=0$.

Наслідок 2. Нехай в задачі відшукання величини (1) V є підпростором простору X , $x_k \in V$, $k=1,2,\ldots$, існує $\lim\limits_{k\to\infty}\max\limits_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i-x_k\right\|\right)$,

$$I=\left\{i\in\{1,\ldots,n\}:\lim_{k\to\infty}\left(m_i\left\|a_i-x_k\right\|\right)=\lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i-x_k\right\|\right)\right\}\ne\varnothing .$$

Для того щоб послідовність $\left\{x_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існували функціонали $f_i^*\in X^*$, $i\in I$, які задовольняють умовам:

1) $\sum\limits_{i\in I}\left\|f_i^*\right\|=1$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty} f_i^*\left(a_i-x_k\right)=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\left\|f_i^*\right\|\left\|a_i-x_k\right\|\right)$, $i\in I$;

3) $\sum\limits_{i\in I} m_i f_i^*\left(x\right)=0$, $x\in V$.

Наслідок 3. Нехай $x^*\in V$,

$$I=\left\{i\in\{1,\ldots,n\}:m_i\left\|a_i-x^*\right\|=\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i-x^*\right\|\right)\right\}.$$

Для того щоб точка x^* була чебишовським у розумінні зважених відстаней центром системи точок a_i , $i=\overline{1,n}$, відносно множини V (екстремальним елементом для величини (1)), необхідно і достатньо, щоб існували функціонали $f_i^*\in X^*$, $i\in I$, які задовольняють умови:

1) $\sum\limits_{i\in I}\left\|f_i^*\right\|=1$;

2) $f_i^*\left(a_i-x^*\right)=\left\|f_i^*\right\|\left\|a_i-x^*\right\|$, $i\in I$;

3) $\sum\limits_{i\in I} m_i f_i^*\left(x^*\right)=\max\limits_{x\in V}\sum\limits_{i\in I} m_i f_i^*\left(x\right)$.

Справедливість наслідку безпосередньо випливає з теореми 3, якщо врахувати, що елемент $x^*\in V$. буде екстремальним елементом для величини (1) тоді і тільки тоді, коли стаціонарна послідовність $x_k=x^*$, $k=1,2,\ldots$, буде екстремальною послідовністю для цієї величини.

Критерії колмогоровського типу екстремальної послідовності для величини (1). Розглянемо деякі критерії колмогоровського типу екстремальної послідовності для величини (1).

Теорема 4. Нехай $x_k \in V$, $k = 1, 2, \ldots$, існує $\lim\limits_{k \to \infty} \max\limits_{1 \le i \le n} \left(m_i \left\| a_i - x_k \right\| \right)$,

$$I = \left\{ i \in \{1, \ldots, n\} : \lim_{k \to \infty} \left(m_i \left\| a_i - x_k \right\| \right) = \lim_{k \to \infty} \max_{1 \le i \le n} \left(m_i \left\| a_i - x_k \right\| \right) \right\} \ne \varnothing .$$

Для того щоб послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною послідовністю для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $x \in V$ існували підпослідовність $\left\{x_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ послідовності $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, послідовності $\left\{f_i^l\right\}_{l=1}^{\infty}$, $i \in I$, де для $i \in I$ $f_i^l \in X^*$, $l = 1, 2, \ldots$, такі, що

1) $\lim\limits_{l \to \infty} \sum\limits_{i \in I} \left\| f_i^l \right\| = 1$;

2) $\lim\limits_{l \to \infty} f_i^l \left(a_i - x_{k_l} \right) = \lim\limits_{l \to \infty} \left\| f_i^l \right\| \left\| a_i - x_{k_l} \right\|$, $i \in I$;

3) $\lim\limits_{l \to \infty} \sum\limits_{i \in I} m_i f_i^l \left(x - x_{k_l} \right) \le 0$.

Доведення. *Достатність.* Нехай для послідовності $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, про яку йде мова в теоремі, та елемента $x \in V$ існує підпослідовність $\left\{x_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ послідовності $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, послідовності $\left\{f_i^l\right\}_{l=1}^{\infty}$, $i \in I$, функціоналів $f_i^l \in X^*$, $l = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються умови 1)–3) теореми. Доведемо, що $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Переконаємося, перш за все, що

$$\lim_{l \to \infty} \sum_{i \in I} m_i f_i^l \left(a_i - x_{k_l} \right) = \lim_{k \to \infty} \max_{1 \le i \le n} \left(m_i \left\| a_i - x_k \right\| \right) . \tag{12}$$

Оскільки для $i \in I$ $\lim\limits_{k \to \infty} \left(m_i \left\| a_i - x_k \right\| \right) = \lim\limits_{k \to \infty} \max\limits_{1 \le i \le n} \left(m_i \left\| a_i - x_k \right\| \right)$, то

$$\lim_{l \to \infty} \left(m_i \left\| a_i - x_{k_l} \right\| \right) = \lim_{k \to \infty} \max_{1 \le i \le n} \left(m_i \left\| a_i - x_k \right\| \right), \ i \in I .$$

Звідси випливає, що існує $\lim\limits_{l \to \infty} \left\| a_i - x_{k_l} \right\| > 0$, $i \in I$.

Внаслідок цього та 2) робимо висновок, що існують $\lim\limits_{l \to \infty} \left\| f_i^l \right\|$, $i \in I$.

З проведених міркувань та співвідношень 1), 2) одержуємо, що

$$\lim_{l \to \infty} \sum_{i \in I} m_i f_i^l \left(a_i - x_{k_l} \right) = \sum_{i \in I} m_i \lim_{l \to \infty} f_i^l \left(a_i - x_{k_l} \right) = \sum_{i \in I} m_i \left(\lim_{l \to \infty} \left\| f_i^l \right\| \left\| a_i - x_{k_l} \right\| \right) =$$

$$= \sum_{i \in I} \left(\lim_{l \to \infty} \left\| f_i^l \right\| \lim_{l \to \infty} \left(m_i \left\| a_i - x_{k_l} \right\| \right) \right) = \sum_{i \in I} \left(\lim_{l \to \infty} \left\| f_i^l \right\| \lim_{k \to \infty} \max_{1 \le i \le n} \left(m_i \left\| a_i - x_k \right\| \right) \right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i - x_k\right\|\right)\lim_{l\to\infty}\sum_{i\in I}\left\|f_i^l\right\| = \lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i - x_k\right\|\right).$$

Рівність (12) встановлено.

Для завершення доведення достатності використаємо співвідношення 3).

Маємо для $x \in V$ та $l = 1, 2, ...$

$$\sum_{i\in I} m_i f_i^l\left(x - x_{k_l}\right) = \sum_{i\in I} m_i f_i^l\left(a_i - x_{k_l}\right) - \sum_{i\in I} m_i f_i^l\left(a_i - x\right) \ge \sum_{i\in I} m_i f_i^l\left(a_i - x_{k_l}\right) -$$

$$-\sum_{i\in I} m_i\left\|f_i^l\right\|\left\|a_i - x\right\| \ge \sum_{i\in I} m_i f_i^l\left(a_i - x_{k_l}\right) - \sum_{i\in I}\left\|f_i^l\right\|\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i - x\right\|\right) =$$

$$= \sum_{i\in I} m_i f_i^l\left(a_i - x_{k_l}\right) - \max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i - x\right\|\right)\sum_{i\in I}\left\|f_i^l\right\|.$$

Отже, для $x \in V$ та $l = 1, 2, ...$

$$\sum_{i\in I} m_i f_i^l\left(x - x_{k_l}\right) \ge \sum_{i\in I} m_i f_i^l\left(a_i - x_{k_l}\right) - \max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i - x\right\|\right)\sum_{i\in I}\left\|f_i^l\right\|.$$

Перейшовши в цій нерівності до границі при $l \to \infty$ та врахувавши 1), 3), та (12), одержимо, що

$$0 \ge \lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i - x_k\right\|\right) - \max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i - x\right\|\right).$$

Звідси випливає, що

$$\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i - x\right\|\right) \ge \lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i - x_k\right\|\right),\ x \in V.$$

Тому для всіх $k = 1, 2, ...$

$$\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i - x_k\right\|\right) \ge \inf_{x\in V}\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i - x\right\|\right) \ge \lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i - x_k\right\|\right).$$

З отриманої нерівності випливає, що

$$\lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i - x_k\right\|\right) = \inf_{x\in V}\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i - x\right\|\right).$$

Це й означає, що послідовність $\left\{x_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Достатність доведено.

Необхідність. Нехай послідовність $\left\{x_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Згідно з теоремою 2 існують функціонали $f_i^* \in X^*$, $i \in I$, які задовольняють умовам 1) -3) цієї теореми. Покладемо $f_i^k = f_i^*$, $i \in I$, $k = 1, 2, ...$. Відповідно до умов 1) -3) теореми 2 одержимо, що

$$\sum_{i\in I}\left\|f_i^k\right\| = 1,\ \lim_{k\to\infty}\sum_{i\in I}\left\|f_i^k\right\| = 1;\ \lim_{k\to\infty} f_i^k\left(a_i - x_k\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\left\|f_i^k\right\|\left\|a_i - x_k\right\|\right),\ i \in I;$$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i\in I} m_i f_i^k\left(x_k\right) \ge \sum_{i\in I} m_i f_i^k\left(x\right),\ x \in V.$$

З останнього співвідношення випливає, що для $x \in V$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i\in I} m_i f_i^k\left(x-x_k\right)\right) \le 0 .$$

Отже, послідовність $\left\{f_i^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, де $f_i^k = f_i^*$, $k = 1,2,\dots$, для всіх $i \in I$, задовольняє умовам 1)–3) теореми.

Необхідність доведено.

Теорему доведено.

З теорем 2,4 випливає низка наслідків, які представляють і самостійний інтерес. Наведемо деякі з них.

Наслідок 4. Нехай $x_k \in V$, $k = 1,2,\dots$, існує $\lim\limits_{k\to\infty}\max\limits_{1\le i\le n}\left(m_i \left\|a_i - x_k\right\|\right)$,

$$I = \left\{i \in \{1,\dots,n\} : \lim_{k\to\infty}\left(m_i \left\|a_i - x_k\right\|\right) = \lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}\left(m_i \left\|a_i - x_k\right\|\right)\right\} \ne \varnothing .$$

Для того щоб послідовність $\left\{x_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною послідовністю для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $x \in V$ існували послідовності $\left\{f_i^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $i \in I$, для яких $f_i^k \in X^*$, $i \in I$, $k = 1,2,\dots$, та

1) $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i\in I}\left\|f_i^k\right\| = 1$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty} f_i^k\left(a_i - x_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty}\left\|f_i^k\right\|\left\|a_i - x_k\right\|$, $i \in I$;

3) $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i\in I} m_i f_i^k\left(x - x_k\right) \le 0$.

Наслідок 5. Нехай $x_k \in V$, $k = 1,2,\dots$, існує $\lim\limits_{k\to\infty}\max\limits_{1\le i\le n}\left(m_i \left\|a_i - x_k\right\|\right)$,

$$I = \left\{i \in \{1,\dots,n\} : \lim_{k\to\infty}\left(m_i \left\|a_i - x_k\right\|\right) = \lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}\left(m_i \left\|a_i - x_k\right\|\right)\right\} \ne \varnothing .$$

Для того щоб послідовність $\left\{x_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною послідовністю для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $x \in V$ існували функціонали $f_i^x \in X^*$, $i \in I$, та

1) $\sum\limits_{i\in I}\left\|f_i^x\right\| = 1$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty} f_i^x\left(a_i - x_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\left\|f_i^x\right\|\left\|a_i - x_k\right\|\right)$, $i \in I$;

3) $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i\in I} m_i f_i^x\left(x - x_k\right) \le 0$.

Наслідок 6. Нехай $x_k \in V$, $k = 1,2,\ldots$, існує $\lim\limits_{k\to\infty}\max\limits_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i - x_k\right\|\right)$,

$$I = \left\{ i \in \{1,\ldots,n\} : \lim_{k\to\infty}\left(m_i\left\|a_i - x_k\right\|\right) = \lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}\left(m_i\left\|a_i - x_k\right\|\right)\right\} \ne \varnothing .$$

Для того щоб послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною послідовністю для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існували функціонали $f_i^* \in X^*, i \in I$, які задовольняють умови

1) $\sum\limits_{i\in I}\left\|f_i^*\right\| = 1$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty} f_i^*\left(a_i - x_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\left\|f_i^*\right\|\left\|a_i - x_k\right\|\right)$, $i \in I$;

3) $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i\in I} m_i f_i^*\left(x - x_k\right) \le 0$, $x \in V$.

Наслідок 7. Нехай $x^* \in V$,

$$I = \left\{ i \in \{1,\ldots,n\} : m_i\left\|a_i - x^*\right\| = \max_{1\le i\le n} m_i\left\|a_i - x^*\right\|\right\} .$$

Для того щоб елемент x^* був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного $x \in V$ існували функціонали $f_i^x \in X^*, i \in I$, які задовольняють умовам

1) $\sum\limits_{i\in I}\left\|f_i^x\right\| = 1$;

2) $f_i^x\left(a_i - x^*\right) = \left\|f_i^x\right\|\left\|a_i - x^*\right\|$, $i \in I$;

3) $\sum\limits_{i\in I} m_i f_i^x\left(x - x^*\right) \le 0$.

Переконаємося у справедливості цього наслідку безпосередньо.

Необхідність. Нехай x^* є екстремальним елементом для величини (1). Згідно з наслідком 3 існують функціонали $f_i^* \in X^*, i \in I$, які задовольняють умови 1)–3) цього наслідку. Для $x \in V$ покладемо $f_i^x = f_i^*$, $i \in I$. Тоді для функціоналів $f_i^x \in X^*, i \in I$, виконуються умови 1), 2) наслідку 7 та має місце рівність

$$\sum_{i\in I} m_i f_i^x\left(x^*\right) = \max_{x\in V}\sum_{i\in I} m_i f_i^x\left(x\right).$$

З цієї рівності випливає справедливість умови 3) наслідку 7.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для кожного $x \in V$ існують функціонали $f_i^x \in X^*$, $i \in I$, які задовольняють умовам 1)–3).

Переконаємося, що x^* є екстремальним елементом для величини (1). Для $x \in V$ зі співвідношень 1)–3) випливає, що

$$0 \ge \sum_{i\in I} m_i f_i^x\left(x - x^*\right) \ge \sum_{i\in I} m_i f_i^x\left(a_i - x^*\right) - \sum_{i\in I} m_i f_i^x\left(a_i - x\right) \ge$$

$$\ge \sum_{i\in I} m_i \left\|f_i^x\right\| \left\|a_i - x^*\right\| - \sum_{i\in I} m_i \left\|f_i^x\right\| \left\|a_i - x\right\| \ge \sum_{i\in I} \left\|f_i^x\right\| \max_{1\le i\le n}\left(m_i \left\|a_i - x^*\right\|\right) -$$

$$-\sum_{i\in I} \left\|f_i^x\right\| \max_{i\in I}\left(m_i \left\|a_i - x\right\|\right) = \max_{1\le i\le n}\left(m_i \left\|a_i - x^*\right\|\right) - \max_{1\le i\le n}\left(m_i \left\|a_i - x\right\|\right).$$

Звідси й випливає, що x^* є екстремальним елементом для величини (1).

Достатність доведено.

Наслідок доведено.

Висновки. Для задачі відшукання величини (1) встановлено критерії її екстремальної послідовності, основані на співвідношенні двоїстості, а також критерії цієї послідовності колмогоровського типу, отримано з цих критеріїв, як наслідки, критерії екстремального елемента для величини (1).

Список використаних джерел:

1. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения / Е. Г. Гольштейн. — М. : Наука, 1971. — 352 с.
2. Гнатюк Ю. В. Двоїсті співвідношення для задачі найкращого за дробово-опуклою функцією наближення кількох елементів та критерії елемента найкращого наближення / Ю. В. Гнатюк // Доп. НАН України. — 1995. – № 6. — С. 23–26.
3. Гнатюк Ю. В. Основні властивості задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів / Ю. В. Гнатюк // Укр. мат. журн. — 1996. — Вип. 48, № 97. — С. 1183–1193.
4. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения / Н. П. Корнейчук. — М. : Наука, 1976. — 320 с.

THE CRITERIAS AT THE SENSE OF THE WEIGHTED DISTANCES OF THE GENERALIZED CENTER OF CHEBYSHEV OF SEVERAL POINTS OF A LINEAR NORMED SPACE RELATIVELY TO THE CONVEX SET OF THIS SPACE

The idea of a relationship of mathematics with practice is the idea of approximation.

One of the directions is the theory of approximation of function. Its founder is considered the P. L. Chebyshov. He started the conception of the best approximation of a continuous function on a segment using algebraic polynomials of some order at the 50 years of the 19th century.

Over time, it became clear that a many tasks of best approximation are partial consequence of the problem of the best approximation of an element of a linear normed space by a convex set.

An important aspect of studying this problem is the establishment of criteria for its extremal element.

M. P. Korniichuk and V. M. Tikhomirov established the general criterion for an extremal element for the problem of the best approximation of an element of a linear normed space by a convex set based on the dual interrelation. The Kolmogorov's criterion of the extremal element for the problem of approximation of a complex-valued function by a finite-dimensional subspace of generalized complex-valued polynomials is somewhat different from this criterion.

An important class of problems of the theory of the approximation is problems of simultaneous approximation of several elements of linear normed space by set of this space.

In the article one of these tasks is considered. This is a problem to research in the sense of the weighted distances Chebyshov's center of several points of the linear normed space relatively to the convex set of this space.

For this problem we found the dual relation. These duality relations became the basis for obtaining the criterion of the extremal sequence and the criterion of the extremal element. We generalized Kolmogorov's criterion on the problem that is considered in the work.

These results clarified for some cases of the studied problem.

Key words: *the linear normed space, the weighted distances, the convex set, the generalized point of Chebyshev, the extreme sequence, the criteria of the generalized center of Chebyshev.*

Отримано: 23.05.2018

УДК 517.9

К. С. Зайцева*,
В. Г. Самойленко,** д-р фіз.-мат. наук, професор,
Ю. І. Самойленко,** д-р фіз.-мат. наук,
Л. В. Вовк*,** канд. фіз.-мат. наук

*Київський університет імені Бориса Грінченка м. Київ,
**Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ,
***Київський національний університет культури і мистецтв, м. Київ

ПОБУДОВА АСИМПТОТИЧНОГО СОЛІТОНОПОДІБНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА ЗІ СПЕЦІАЛЬНО ЗАДАНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Рівняння Кортевега-де Фріза є одним з важливих об'єктів дослідження сучасної теоретичної фізики і прикладної математики. Це рівняння описує хвильові процеси в середовищах з нелінійної дисперсією і стало широко відомим у середині минулого століття завдяки наявності у нього так званих солітонних розв'язків, що мають властивість нелінійної суперпозиції. За допомогою різних аналітичних і якісних методів (метод оберненої задачі теорії розсіювання, метод Хіроти, методи Беклунд перетворення і Дарбу перетворення, метод скінченно-