

УДК 519.63:532.5

DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.113-125

**О. Р. Подгорний**, аспірант

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

## **ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ МЕТОДОМ R-ФУНКЦІЙ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ТЕЧІЙ У НЕОДНОРІДНОМУ ҐРУНТІ**

Розглядається задача теорії стаціонарної фільтрації в ізотропному неоднорідному ґрунті у припущенні, що виконується закон Дарсі. Математичною моделлю цієї задачі є еліптичне рівняння для функції течії, доповнене крайовими умовами другого роду на ділянках межі, доповнене крайовими умовами першого роду на ділянках межі, що є непроникними для рідини. При цьому, в постановку задачі входить невідоме значення повних витрат рідини, для знаходження котрого формулюється додаткове інтегральне співвідношення. Для її чисельного аналізу пропонується використати структурно-варіаційний метод (метод R-функцій), що дозволить найбільш повно урахувати в обчислювальному алгоритмі всю геометричну та аналітичну інформацію, яка входить у постановку задачі. Від вихідної задачі здійснено перехід до крайової задачі з відомими крайовими умовами. Згідно з методом R-функцій для побудованої структури розв'язку, яка точно враховує всі крайові умови отриманої задачі, обґрунтовано використання варіаційного методу Рітца для апроксимації невизначеної компоненти. Після цього, з додаткового інтегрального співвідношення знайдено наближене значення невідомих витрат рідини і наближений розв'язок вихідної задачі. Було проведено обчислювальний експеримент для різних значень коефіцієнтів фільтрації в області, яка має вигляд нижньої половини кільця, з умовою, що координатні функції були побудовані на основі поліномів Лежандра. У випадку сталого коефіцієнта фільтрації наближений розв'язок задачі було порівняно з точним розв'язком. Виявлено, що похибка значення повних витрат рідини та наближеного розв'язку задачі зменшується зі збільшенням кількості координатних функцій. Також було розглянуто випадки, де коефіцієнт фільтрації збільшується з глибиною. Встановлено, що зі збільшенням кількості координатних функцій значення повних витрат має тенденцію до збігу. Отже, запропонований метод чисельного аналізу довів свою ефективність і може бути використаний для розв'язку практичних задач. Перевагами розробленого методу є отримання розв'язку крайової задачі у вигляді єдиного аналітичного виразу і точне задоволення всіх крайових умов задачі.

**Ключові слова:** *фільтраційна течія, задача напірної фільтрації, функція течії, метод R-функцій, метод Рітца.*

**Вступ.** Фільтраційною течією називається просочування у пористому середовищі рідин, нафти та газу, газованої [12]. До розгляду таких

течій призводять процеси осушення і зрошення, втікання морської води в прісну, обтікання гідротехнічних споруд, просочування води крізь земляні дамби тощо. Математичними моделями цих процесів зазвичай є крайові та початково-крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. Точні розв'язки задач фільтрації у деяких випадках можна отримати методами теорії функцій комплексної змінної [7], але більш універсальними для практичних застосувань є чисельні методи. Серед чисельних методів теорії фільтрації можна зазначити метод сіток, метод скінченних елементів, метод мажорантних областей, метод суматорних подань, метод фіктивних областей тощо [3–6, 8, 9]. До загальних недоліків існуючих чисельних методів можна віднести те, що при розгляді задач у областях складної геометрії межа області у обчислювальному алгоритмі враховується лише наближено, наприклад, як масив точок у сіткових методах чи як ламана у методі скінченних елементів. Точно врахувати геометричну та аналітичну інформацію, що міститься у постановці крайової чи початково-крайової задачі математичної фізики, дозволяє структурно-варіаційний метод  $R$ -функцій [13]. У чисельному аналізі фільтраційних течій метод  $R$ -функцій було застосовано у [1, 2, 15], але в них було розглянуто лише задачі фільтрації під гідротехнічними спорудами і вважалося, що фільтраційні витрати рідини є заданими.

Отже, розробка нових та вдосконалення існуючих методів чисельного аналізу фільтраційних течій на основі використання методу  $R$ -функцій є актуальною науковою задачею.

**Метою роботи** є розробка нових та вдосконалення існуючих методів чисельного аналізу плоских стаціонарних фільтраційних течій на основі математичної моделі напірної фільтрації у термінах «функція течії». Дана робота продовжує дослідження, розпочаті у [11].

**1. Постановка задачі.** Розглянемо стаціонарну задачу напірної фільтрації [11]. Нехай маємо фільтраційний потік води, схема якого наведена на рис. 1.

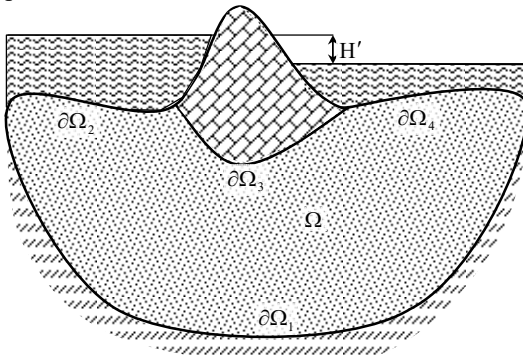


Рис. 1. Схема фільтраційного потоку води

На рис. 1 область фільтрації  $\Omega$  обмежена непроникними межами  $\partial\Omega_1$  і  $\partial\Omega_3$  (вони є лініями течії) та двома межами водойми  $\partial\Omega_2$  і  $\partial\Omega_4$  (вони є потенціальними лініями). Позначимо через  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  вектор швидкості фільтраційного потоку. Вважатимемо, що виконується закон Дарсі, який означає, що втрати напору при фільтрації пропорційні швидкості фільтрації.

Уводячи у розгляд за допомогою співвідношень

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (1)$$

функцію течії  $\psi$ , отримаємо таку задачу:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{у } \Omega, \quad (2)$$

$$\psi|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad \psi|_{\partial\Omega_3} = Q, \quad (3)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_2} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_4} = 0, \quad (4)$$

де  $\kappa = \kappa(x, y)$  — коефіцієнт фільтрації,  $n$  — зовнішня нормаль до відповідних ділянок межі,  $H'$  — діючий напір,  $Q$  — повни витрати рідини, які є заздалегідь невідомими і визначаються інтегральним співвідношенням

$$\int_{\partial\Omega_3} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial\psi}{\partial n} ds = -H'. \quad (5)$$

**2. Метод чисельного аналізу.** Розглянемо допоміжну задачу

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{у } \Omega, \quad (6)$$

$$u|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad u|_{\partial\Omega_3} = 1, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_4} = 0. \quad (8)$$

Нехай функції  $\omega(x, y)$ ,  $\omega_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , побудовані користуючись конструктивним апаратом теорії  $R$ -функцій [13] є такими, що:

$$\omega(x, y) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega; \quad \omega(x, y) > 0 \quad \text{у } \Omega; \quad \frac{\partial\omega}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = -1,$$

$$\omega_i(x, y) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_i; \quad \omega(x, y) > 0 \quad \text{у } \Omega \cup (\partial\Omega \setminus \partial\Omega_i);$$

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_i} = -1, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

У [11] було доведено, що жмуток функцій

$$u = f - \frac{\omega_{1-3}\omega_{2-4}}{\omega_{1-3} + \omega_{2-4}} D_1^{(2-4)} f + \omega_{1-3}\Phi - \frac{\omega_{1-3}\omega_{2-4}}{\omega_{1-3} + \omega_{2-4}} D_1^{(2-4)}(\omega_{1-3}\Phi), \quad (9)$$

де  $\Phi = \Phi(x, y)$  — невизначена компонента, а

$$f(x, y) = \frac{\omega_1(x, y)}{\omega_1(x, y) + \omega_3(x, y)},$$

$$D_1^{(2-4)} g = \frac{\partial \omega_{2-4}}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{2-4}}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y},$$

$$\omega_{2-4}(x, y) = \omega_2(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_4(x, y), \quad \omega_{1-3}(x, y) = \omega_1(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_3(x, y),$$

є структурою розв'язку крайової задачі (6)–(8), тобто при будь-якому виборі невизначеної компоненти  $\Phi$  функція вигляду (9) точно задовольняє крайові умови (7), (8).

У задачі (6)–(8) зробимо заміну

$$u = \varphi + v,$$

де  $\varphi = f - \frac{\omega_{1-3}\omega_{2-4}}{\omega_{1-3} + \omega_{2-4}} D_1^{(2-4)} f$ , а  $v$  — нова невідома функція. Тоді

функція  $v$  буде розв'язком крайової задачі

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = F \text{ у } \Omega, \quad (10)$$

$$v|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4} = 0, \quad (11)$$

$$\text{де } F = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right).$$

З задачею (10), (11) пов'яжемо оператор  $A$  цієї крайової задачі, який діє у просторі  $L_2(\Omega)$  за правилом

$$Av = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (12)$$

Вважатимемо, що область визначення  $D_A$  оператора  $A$  вигляду (12) складається з тих функцій з  $L_2(\Omega)$ , які належать множині  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  та задовольняють крайові умови (11). Зрозуміло, що  $D_A$  — лінеал.

Дослідимо властивості оператора  $A$  вигляду (12). Очевидно, що  $A$  — лінійний оператор. Розглянемо тепер скалярний добуток  $(Av_1, v_2)$ , де  $v_1, v_2 \in D_A$ . Застосовуючи першу формулу Гріна [10], отримаємо, що

$$\begin{aligned} (Av_1, v_2) &= \iint_{\Omega} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \right] v_2 dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v_1}{\partial n} v_2 ds . \end{aligned}$$

Інтеграл за  $\partial\Omega$  дорівнюватиме нулеві, оскільки  $v_1, v_2 \in D_A$ , а отже,  $v_2|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = 0$ ,  $\frac{\partial v_1}{\partial n}|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4} = 0$ , і

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v_1}{\partial n} v_2 ds = \int_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v_1}{\partial n} v_2 ds + \int_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v_1}{\partial n} v_2 ds .$$

Тоді

$$(Av_1, v_2) = \iint_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) dx dy \quad (13)$$

і  $(Av_1, v_2) - (v_1, Av_2) = (Av_1, v_2) - (Av_2, v_1) = 0$ , тобто  $A$  — симетричний оператор.

Додатність оператора  $A$  випливає з того, що для всіх  $v \in D_A$

$$(Av, v) = \iint_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \geq 0 ,$$

причому через умови (11) рівність  $(Av, v) = 0$  можлива лише, якщо  $v = 0$ .

Доведемо тепер додатну означеність оператора  $A$  вигляду (12). Як відомо [14], для функцій  $u$  з простору Соболева  $W_2^1(\Omega)$  матиме місце нерівність

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq c \left\{ \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_{\Gamma_1} u^2 ds \right\} , \quad (14)$$

де  $\Omega$  — область з межею Липшиця  $\partial\Omega$ ,  $\Gamma_1$  — відкрита частина межі  $\partial\Omega$  області  $\Omega$  додатної міри Лебега,  $c > 0$  — стала, залежна тільки від області  $\Omega$  і від  $\Gamma_1$ .

Оскільки

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 = \iint_{\Omega} \left[ u^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy ,$$

то з нерівності (14) випливає оцінка

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 = \iint_{\Omega} u^2 dx dy \leq c \left\{ \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_{\Gamma_1} u^2 ds \right\}. \quad (15)$$

Нехай коефіцієнт фільтрації задовольняє для всіх  $(x, y) \in \Omega$  нерівності  $0 < \kappa_1 \leq \kappa(x, y) \leq \kappa_2$ . Тоді для всіх  $v \in D_A$

$$(Av, v) = \iint_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \geq \frac{1}{\kappa_2} \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Обираючи далі у (15)  $\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3$  і враховуючи, що  $v|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = 0$  для функцій  $v \in D_A$ , отримуємо нерівність

$$(Av, v) \geq (c\kappa_2)^{-1} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

яка означає, що  $A$  — додатно означений оператор.

Введемо на  $D_A$  енергетичний добуток  $[v_1, v_2]$ , поклавши відповідно до (13) для будь-яких  $v_1, v_2 \in D_A$

$$[v_1, v_2] = \iint_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) dx dy. \quad (16)$$

Поповнюючи  $D_A$  у сенсі збіжності за енергетичною нормою

$$\|v\|_A = \sqrt{[v, v]} = \sqrt{\iint_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy}, \quad (17)$$

породженою скалярним добутком (16), отримаємо енергетичний простір  $H_A$  оператора  $A$  вигляду (12).

Отже, відповідно до теореми про функціонал енергії [10] задача (10), (11) за умови  $F \in L_2(\Omega)$  має у  $H_A$  єдиний (узагальнений) розв'язок  $v^*$ , який є точкою мінімуму у  $H_A$  функціонала енергії

$$J[v] = \|v\|_A^2 - 2(F, v) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{\kappa} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] - 2Fv \right] dx dy.$$

Наближений розв'язок екстремальної задачі  $J[v] \rightarrow \inf_{v \in H_A}$  відповідно до методу Рітца шукатимемо у вигляді

$$v_n = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k.$$

Відповідно до структури (9) координатну послідовність  $\{\varphi_k\}$  складемо з функцій

$$\varphi_k = \omega_{1-3} \tau_k - \frac{\omega_{1-3} \omega_{2-4}}{\omega_{1-3} + \omega_{2-4}} D_1^{(2-4)} (\omega_{1-3} \tau_k),$$

де  $\{\tau_k\}$  — будь-яка повна у  $L_2(\Omega)$  система функцій (степеневі чи тригонометричні поліноми, сплайни тощо).

Тоді для визначення сталих  $c_k$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ , маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (систему Рітца)

$$\sum_{k=1}^n [\varphi_k, \varphi_j] c_k = (F, \varphi_j), \quad j=1, 2, \dots, n,$$

де

$$[\varphi_k, \varphi_j] = \int_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right] dx dy,$$

$$(F, \varphi_j) = \int_{\Omega} F \cdot \varphi_j dx dy, \quad k, j=1, 2, \dots, n.$$

Із загальних теорем збіжності метода Рітца [10] впливає збіжність  $\{v_n\}$  до  $v^*$  як у нормі (17), так і у нормі  $L_2(\Omega)$ .

Тоді функцію  $u^* = \varphi + v^*$  можна розглядати як узагальнений розв'язок задачі (6)–(8), до якого у нормі  $L_2(\Omega)$  збігатиметься послідовність наближених розв'язків  $\{u_n\}$  цієї задачі, яка формується за правилом  $u_n = \varphi + v_n$ .

Зрозуміло, якщо  $u^*$  — розв'язок задачі (6)–(8), то функція  $\psi^* = Q^* u^*$ , де відповідно до (5)

$$Q^* = -H' \cdot \left( \int_{\partial\Omega_3} \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial n} ds \right)^{-1},$$

є розв'язком вихідної задачі (2)–(4).

Отже, справджується така теорема.

**Теорема.** Нехай  $F \in L_2(\Omega)$ . Тоді послідовність

$$\psi_n = Q_n u_n,$$

де

$$Q_n = -H' \cdot \left( \int_{\partial\Omega_3} \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial n} ds \right)^{-1}, \quad u_n = \varphi + v_n,$$

збігається у  $L_2(\Omega)$  до узагальненого розв'язку задачі (2)–(4).

Зазначимо, що умова  $F \in L_2(\Omega)$  як раз і є умовою застосовності до розв'язання задачі метод  $R$ -функцій.

Зазначимо також, що умова  $\left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4} = 0$  є природною, а отже,

при виборі координатної послідовності  $\{\varphi_k\}$  їй можна не задовольняти.

**3. Результати обчислювального експерименту.** Обчислювальний експеримент у задачі (2)–(4) було проведено у області  $\Omega$ , зображеній на рис. 2. Межа  $\partial\Omega$  цієї області складається з зовнішнього кола радіуса  $R$ , внутрішнього кола радіуса  $r$  ( $r < R$ ) та двох відрізків горизонтальної прямої  $y = 0$ . Для області  $\Omega$  функції  $\omega_1(x, y)$ ,  $\omega_2(x, y)$ ,  $\omega_3(x, y)$ ,  $\omega_4(x, y)$  обираємо у вигляді:

$$\omega_1(x, y) = \frac{1}{2R}(R^2 - x^2 - y^2), \quad \omega_2(x, y) = -y,$$

$$\omega_3(x, y) = \frac{1}{2r}(r^2 - x^2 - y^2), \quad \omega_4(x, y) = -y.$$

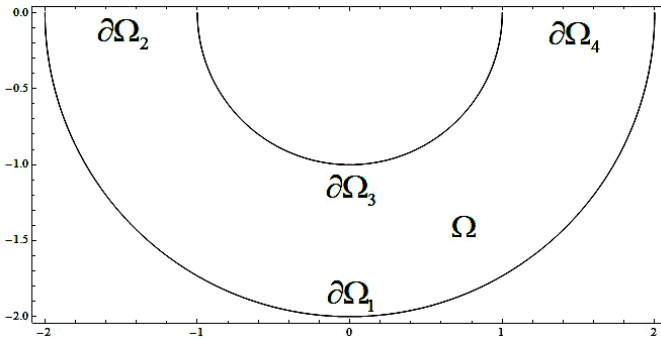


Рис. 2. Область  $\Omega$

Для обчислювального експерименту було обрано такі коефіцієнти фільтрації [8]:

$$\kappa_0 = 0,391, \quad \kappa_1 = 1,593e^{2y}, \quad \kappa_2 = 0,811 \text{ ch}^{-2} y.$$

Відомо [8], що у ґрунтах з коефіцієнтами фільтрації, які зменшуються з глибиною, напір більше на понур і менше на підшову флютбету, ніж в однорідному ґрунті. При цьому, чим швидше зменшується коефіцієнт фільтрації з глибиною, тим більший перерозподіл тиску відбувається між понурою та підшовою флютбету.

За функції  $\{\tau_k\}$  було обрано поліноми Лежандра. Точний розв'язок задачі (2)–(4) для сталого коефіцієнта фільтрації має вигляд:

$$\psi^* = Q^* \frac{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}{\ln \frac{r}{R}},$$

$$\text{де } Q^* = -\frac{H'\kappa_0}{\pi} \ln \frac{r}{R}.$$



Для сталого коефіцієнту фільтрації  $\kappa_0 = 0,391$  маємо  $Q^* = 0,0863$ , а, отже, точний розв'язок

$$\psi^* = -0,1245 \ln \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

В таблиці 1 наведено порівняння точного та наближеного розв'язків задачі в залежності від кількості координатних функцій.

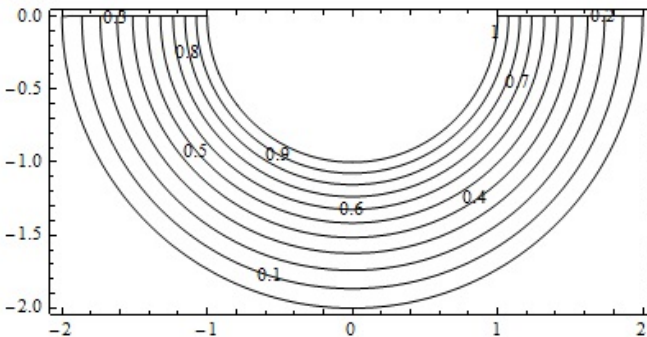
Таблиця 1

*Порівняння точного та наближеного розв'язків для сталого коефіцієнту фільтрації  $\kappa_0$  в залежності від кількості координатних функцій  $n$*

| $n$  | 6      | 10     | 15     | 21     | 28     |
|--|--------|--------|--------|--------|--------|
| $Q_n$  | 0,0931 | 0,0926 | 0,0922 | 0,0918 | 0,0914 |
| $\frac{ Q_n - Q^* }{ Q^* }$  | 7,97%  | 7,41%  | 6,90%  | 6,46%  | 6,03%  |
| $\frac{\ \psi_n - \psi^*\ _{L_2(\Omega)}}{\ \psi^*\ _{L_2(\Omega)}}$ | 8,61%  | 7,91%  | 7,30%  | 6,81%  | 6,30%  |

З таблиці 1 бачимо, що зі зростанням кількості координатних функцій відносна похибка визначення величини  $Q$  та функції  $\psi$  зменшується. Це свідчить на користь хорошої якості запропонованого у роботі підходу.

На рисунку 3 наведено лінії рівня розв'язку задачі з коефіцієнтом фільтрації  $\kappa_0$ , а на рисунку 4 наведено векторне поле швидкостей фільтраційного потоку, який було відтворене за формулою (1).



**Рис. 3.** Лінії рівня функції  $\psi_{28}$  для коефіцієнта фільтрації  $\kappa_0$

У таблиці 2 наведено залежність значення величини  $Q_n$  від кількості  $n$  координатних функцій для змінних коефіцієнтів фільтрації  $\kappa_1 = 1,593e^{2y}$ ,  $\kappa_2 = 0,811ch^{-2}y$ .

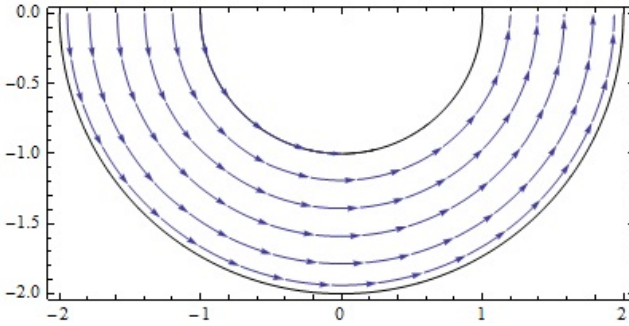


Рис. 4. Векторне поле швидкостей, відтворене за функцією  $\psi_{28}$ , для коефіцієнта фільтрації  $\kappa_0$

Таблиця 2

Значення величини  $Q_n$  для змінних коефіцієнтів фільтрації  $\kappa_1$  та  $\kappa_2$  в залежності від кількості координатних функцій  $n$

| $n$        | 6      | 10     | 15     | 21     | 28     |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\kappa_1$ | 0,0819 | 0,0797 | 0,0778 | 0,0766 | 0,0752 |
| $\kappa_2$ | 0,0108 | 0,0106 | 0,0104 | 0,0102 | 0,0101 |

Як бачимо з таблиці 2 зі збільшенням кількості координатних функцій  $n$  значення  $Q_n$  усталюються.

На рис. 5 та 7 приведені лінії рівня розв'язку задачі для коефіцієнтів фільтрації  $\kappa_1 = 1,593e^{2y}$ ,  $\kappa_2 = 0,811ch^{-2}y$  відповідно, а на рис. 6 та 8 наведено відповідне векторне поле швидкостей фільтраційного потоку.

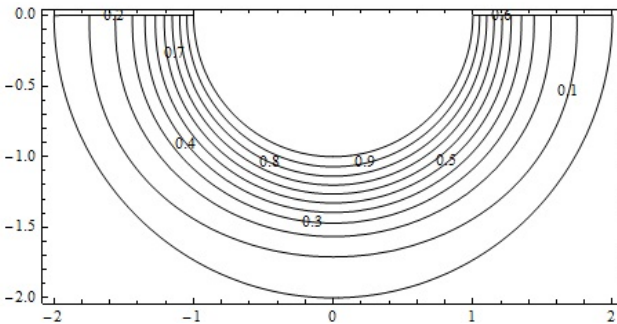
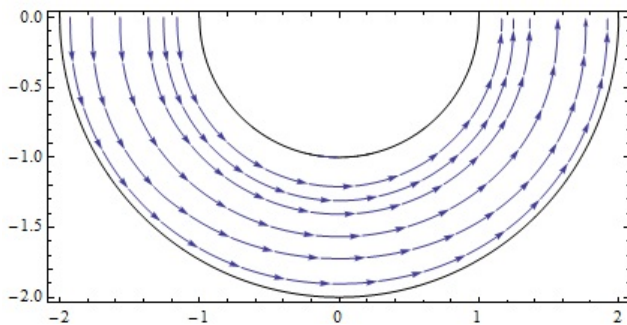
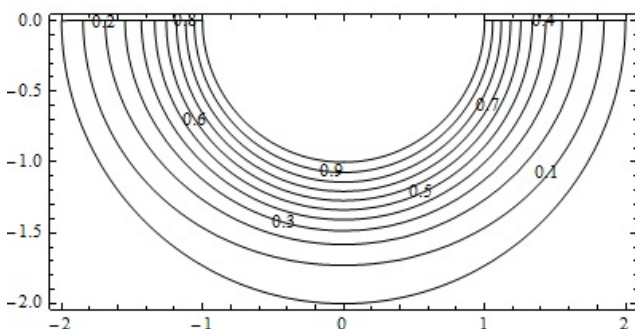


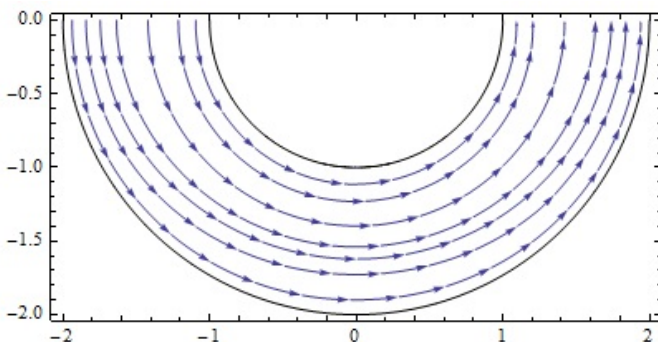
Рис. 5. Лінії рівня функції  $\psi_{28}$  для коефіцієнта фільтрації  $\kappa_1$



*Рис. 6. Векторне поле швидкостей, відтворене за функцією  $\psi_{28}$ , для коефіцієнта фільтрації  $\kappa_1$*



*Рис. 7. Лінії рівня функції  $\psi_{28}$  для коефіцієнта фільтрації  $\kappa_2$*



*Рис. 8. Векторне поле швидкостей, відтворене за функцією  $\psi_{28}$ , для коефіцієнта фільтрації  $\kappa_2$*

**Висновки.** В роботі вперше для отримання наближеного розв'язку задачі фільтрації за законом Дарсі запропоновано використати метод  $R$ -

функцій у комбінації з методом Рітца, при застосуванні яких загальні витрати рідини вважаються невідомими і визначаються у процесі розв'язання задачі. Обчислювальний експеримент, проведений для тестової задачі, продемонстрував можливості та ефективність цього метода. Результати можуть бути поширені на інші крайові задачі теорії фільтрації, а також знайти своє застосування у розв'язання прикладних задач, пов'язаних з розрахунком фільтраційних течій. Це і визначає наукову новизну та практичну значимість отриманих у роботі результатів.

### Список використаних джерел:

1. Блишун А. П. Математическое моделирование и численный анализ фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями с помощью / А. П. Блишун, М. В. Сидоров, И. Г. Яловега // Радиоэлектроника и информатика. — 2010. — № 2. — С. 40–46.
2. Блишун А. П. Применение метода R-функций к численному анализу фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями / А. П. Блишун, М. В. Сидоров, И. Г. Яловега // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2012. — № 1. — С. 50–56.
3. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопечський. — Київ : Наук. думка, 2007. — 292 с.
4. Вабищевич П. Н. Метод фиктивных областей в математической физике / П. Н. Вабищевич. — Москва : Изд-во МГУ, 1991. — 156 с.
5. Венгерський П. Про задачу сумісного руху поверхневих і ґрунтових потоків на території водозбору / П. Венгерський // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. — 2014. — Вип. 22. — С. 41–53.
6. Коннор Дж. Метод конечных элементов в механике жидкости / Дж. Коннор, К. Бреббиа. — Л. : Судостроение, 1979. — 264 с.
7. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — Москва : Наука, 1973. — 736 с.
8. Ляшко И. И. Метод мажорантных областей в теории фильтрации / И. И. Ляшко, И. М. Великоиваненко, В. И. Лаврик, Г. Е. Мистецкий. — Киев : Наук. думка, 1974. — 202 с.
9. Ляшко И. И. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / И. И. Ляшко, И. М. Великоиваненко. — Киев : Наук. думка, 1973. — 264 с.
10. Михлин С. Г. Вариационные методы решения задач математической физики / С. Г. Михлин. — Москва : Наука, 1970. — 512 с.
11. Подгорний О. Р. Математичні моделі фільтраційних течій та застосування методу R-функцій для їх чисельного аналізу / О. Р. Подгорний // Радиоэлектроника та информатика. — 2018. — № 1. — С. 40–47.
12. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. — Москва : Наука, 1977. — 664 с.
13. Рвачёв В. Л. Теория R-функций и некоторые её приложения / В. Л. Рвачёв — Киев : Наук. думка, 1982. — 552 с.
14. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике / К. Ректорис. — Москва : Мир, 1985. — 590 с.

15. Сидоров М. В. Математическое компьютерное моделирование некоторых фильтрационных течений / М. В. Сидоров, А. В. Стороженко // Радиоэлектроника и информатика. — 2004. — № 4. — С. 58–61.

### NUMERICAL ANALYSIS OF FILTRATION FLOWS IN INHOMOGENEOUS MEDIA USING THE R-FUNCTIONS METHOD

The problem of the stationary porous media flow theory in an isotropic inhomogeneous media is considered in the assumption that the Darcy law is fulfilled. The mathematical model of this problem is the elliptic equation for the stream function, supplemented by second kind boundary conditions at the reservoir boundaries, and the first kind boundary conditions in regions that are impenetrable to the liquid. At the same time, the unknown value of the full liquid flow enters the problem statement and for its finding an additional integral ratio was formulated. The structural-variational method (the R-functions method) is proposed to be used for numerical analysis and that will allow taking into account all the geometric and analytical information from the problem statement most fully. The transition from the original problem to a boundary value problem with known boundary conditions was made. According to the R-functions method for the constructed solution structure, which accurately takes into account all boundary conditions of the obtained problem, the use of the variational Ritz method for the approximation of an indefinite component is substantiated. After that, an approximate solution of the initial problem was found from an additional integral relation. A computational experiment was conducted for different values of filtration coefficients in an area that has the form of the lower half of the ring. Also, the coordinate functions were constructed on the bases of Legendre polynomials. The approximate solution of the problem was compared with the exact solution in the case of a stable filtration coefficient. It is found that the error of determining the full liquid flow and the approximate solution of the problem decreases with the increasing number of coordinate functions. Also, the cases, where the filtration coefficient increases with depth, were considered. It is established that with the increase in the number of coordinate functions, the value of total costs tends to converge. Consequently, the proposed method of numerical analysis proved its effectiveness and can be used for practical problems solving. The advantages of the developed method are obtaining a solution of the boundary value problem in the form of the single analytical expression and the exact satisfaction of all boundary conditions of the problem.

**Key words:** *flow in porous media process, pressure flow of fluid, R-functions method, Ritz method.*

Отримано: 14.11.2018