

УДК 539.3

DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.126-134

**Ю. В. Сачук\***, канд. фіз.-мат. наук,**О. В. Максимук\*\***, д-р. фіз.-мат. наук, професор\*Східноєвропейський національний університет  
імені Лесі Українки, м. Луцьк,

\*\* Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

## КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ В ЗАДАЧАХ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ КАНОНІЧНИХ ШТАМПІВ З ПІВПЛОЩИНОЮ

Для плоскої контактної задачі про взаємодію жорстких штампів канонічної форми (циліндричної, гіперболічної, параболічної, еліптичної) із півплощиною досліджено напружено-деформований стан в тілі. Для обчислення компонент напружень та оптимізації обчислень застосовано метод сіток із дзеркальним відображень результатів. Проаналізовано та підібрано програмні засоби для реалізації удосконалених методик розрахунку напруженого стану. Побудовано 3D-графіки напружень та відповідні їм лінії рівня для полегшення аналізу результатів. Побудову 3D-зображення кожної із компонент напружень було здійснено за допомогою наближеного обчислення інтегралу методом середніх прямокутників у кожній точці розбиття, в якій знаходилося значення еліптичного інтегралу третього роду, будувався ряд інтегральних сум і числове значення інтегралу. Для визначення зон пружно-пластичної деформації проаналізовано різні теорії пластичності та для реалізації поставленої мети обрано теорію максимальних дотичних напружень для дослідження умов появи пружно-пластичних зон в тілі при різних областях контакту та геометричних і фізико-механічних параметрах.

У рамках цієї теорії проведено пошук нових конструкційних матеріалів із заданими всіма необхідними фізико-механічними параметрами. Для дослідження процесу появи областей пружно-пластичної деформації обрано нові титанові сплави із покращеними механічними властивостями. Встановлено нові механічні ефекти, що виникають в процесі взаємодії для різних штампів та досліджено умови, що приводять до їх появи. Отримані результати можна використати при побудові експериментально-числової методики для визначення умов появи пластичних зон у тілі для матеріалів з різними механічними властивостями. Розвинута методика дозволяє визначити величину областей текучості, їх межі та характер розподілу із використанням ліній рівня та визначити місця найбільшої концентрації напружень і визначити максимальні значення для різних штампів.

**Ключові слова:** *контактна взаємодія, пружно-пластичні зони, штампи канонічної форми, теорія максимальних дотичних напружень, пружна півплощина, інваріанти тензора напружень, лінії рівня, аналітико-числові методи, комп'ютерне моделювання, 3D-зображення, лінії рівня.*

**Вступ.** На сучасному етапі розвитку приладобудування та промисловості одним із найважливіших аспектів виробництва є забезпечення довговічності роботи основних конструкцій та елементів машин в процесі експлуатації. Одним із способів збільшення ресурсу роботи деталей та механізмів є використання нових конструкційних матеріалів та їх сплавів в залежності від їх фізико-механічних характеристик [11]. Досліджуючи та враховуючи пружно-пластичні деформації, можна знизити концентрацію напружень в конструкціях, підвищити спротив тіл до ударних навантажень, визначити запас міцності, жорсткості та стійкості і тим самим забезпечити раціональне функціонування та надійність конструкцій [4, 6].

Одним із перспективних напрямків таких досліджень є комп'ютерне моделювання із використанням апарату контактної механіки, зокрема взаємодії жорстких штампів з пружною півплощиною. Для реалізації таких моделей необхідно застосовувати та розвивати аналітико-числові методи розв'язування контактних задач [5, 12], будувати числові схеми для визначення контактної тиску на всьому діапазоні вхідних параметрів. Недостатньо дослідженими в інженерній практиці є умови появи пружно-пластичних зон для фрикційних пар при конкретних матеріалах із використанням універсальних методів фізико-математичного моделювання та їх чисельної реалізації із побудовою ілюстраційних 3D-графіків та ліній рівня у відповідних зонах.

**Напружено-деформований стан в півплощині.** Розрахунок компонент напружено-деформованого стану в півплощині визначається за формулами [3]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, y) &= -\frac{2y}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s)(x-s)^2 ds}{((x-s)^2 + y^2)^2}, \\ \sigma_{yy}(x, y) &= -\frac{2y^3}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s) ds}{((x-s)^2 + y^2)^2}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= -\frac{2y^2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s)(x-s) ds}{((x-s)^2 + y^2)^2}.\end{aligned}\quad (1)$$

Для подальших числових розрахунків та побудови графіків введемо наступне позначення  $G_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{E_*}$ . У формулах (1)  $p(s)$  — контактний

тиск,  $2a$  — область контакту. Варто зазначити, що для штампів циліндричної, еліптичної та гіперболічної форм знайдено аналітичний розв'язок контактної тиску у роботах [5, 12], який виражається через повні еліптичні інтеграли третього роду [10]. Важливим фактором при застосуванні чисельної методики обчислення еліптичних інтегралів є можливість обчислення їх значень при визначенні напружень в середині області (у півплощині) у заданих точках розбиття [10]. Особливістю таких обчислень є те, що для побудови 3D-зображення та ліній рівня потрібно якісно задати крок розбиття для сітки [13].

Побудову 3D-зображення кожної із компонент напружень (1) було здійснено за допомогою наближеного обчислення інтегралу методом середніх прямокутників у кожній точці розбиття, в якій знаходилося значення еліптичного інтегралу третього роду, будувався ряд інтегральних сум і числове значення інтегралу [10]. Проблемою в таких розрахунках є час отримання зображень, тому що у разі задання великої точності обчислень число операції сумування та добутку зростає в багато разів. Для оптимізації обчислювального процесу було враховано, що контактний тиск разом із підінтегральною функцією в компонентах напружень є парною функцією, та здійснено відображення точок зображення симетрично щодо осі ординат [8].

Для аналізу напружено-деформованого стану в півплощині та графічного відображення пластичних зон в ній засобами системи Matlab на основі 3D-графіків було побудовано ізолінії рівня із точністю результатів до  $10^{-5}$ . Можливість побудови таких зображень забезпечує функція  $\text{contour}(x, y, z)$  та  $\text{surf}(x, y, z)$ , де вхідні параметри — це масиви даних, отриманих на попередніх кроках [13].

В якості прикладу розрахунку наведено компоненти напружень для штампа гіперболічної форми при значній області контакту та великій кривизні штампа [12], що є справедливим для новий конструкційних матеріалів із покращеними механічними властивостями [1, 7]

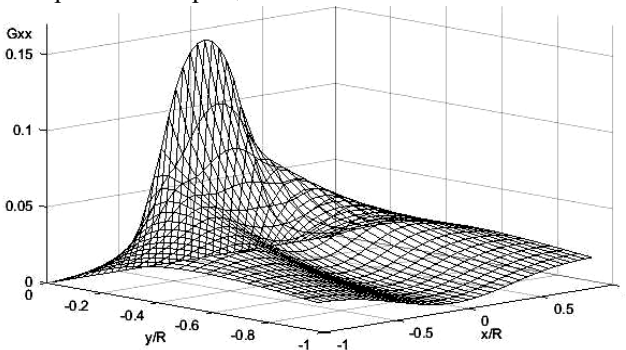
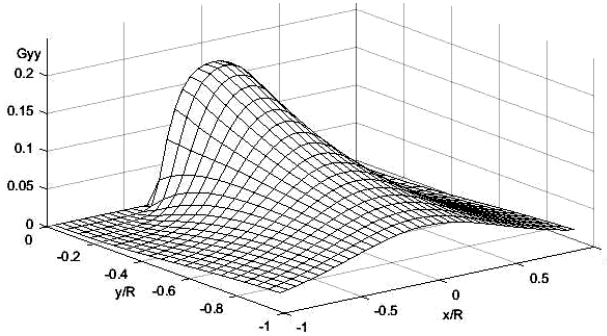
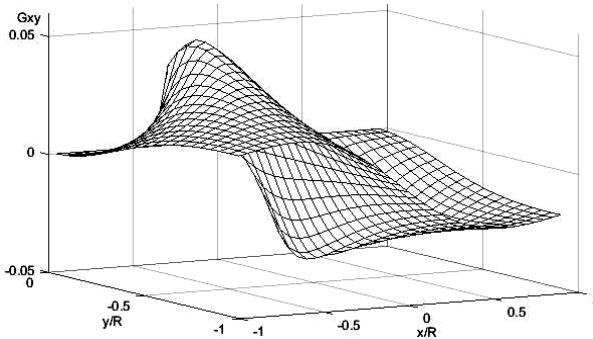


Рис. 1. Графік безрозмірного напруження  $G_{xx}$  для штампа гіперболічної форми при  $a/R = 0.35$  та  $\varepsilon = 0.1$



**Рис. 2.** Графік безрозмірного напруження  $G_{yy}$  для штампна гіперболічної форми при  $a/R = 0.35$  та  $\varepsilon = 0.1$



**Рис. 3.** Графік безрозмірного напруження  $G_{xy}$  для штампна гіперболічної форми при  $a/R = 0.35$  та  $\varepsilon = 0.1$

Для зручності обчислень згідно [5, 12] прийемо, що: для штампна еліптичної форми  $a, b$  — велика та мала півосі еліпса, для штампна гіперболічної форми  $a, b$  — величини дійсної та уявної півосей гіперболи та покладемо, що  $a = R, b = R(1 \pm \varepsilon)$  у штампнах еліптичної та гіперболічної форми.

**Умови переходу від пружної до пружно-пластичної деформації в тілі.** Згідно з роботою [1] приймаємо, що перехід з пружного стану в пластичний відбувається, якщо максимальне дотичне напруження досягає деякого граничного значення для даного матеріалу:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_{xx} - \sigma_{yy}| = \frac{\sigma_T}{2}. \quad (2)$$

Варто зауважити, що для більшості пластичних матеріалів границі при розтязі та стисненні однакові, тому за цією теорією міцності можливо із високою ймовірністю передбачати початок процесу течучості матеріалу [1, 6].

Якщо прийняти, що матеріал після переходу в пластичний стан описується рівняннями ідеальної пластичності з константою межі текучості  $k$ , то значення  $\tau_{\max} = k$  визначає початок межі зони текучості, а лінії рівня дозволяють встановити їх величину і місце знаходження.

$$\text{Приймаємо [1, 3] } \bar{\tau}_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{E_*} = \frac{\sigma_T}{2E_*}, \text{ де } \frac{1}{E_*} = \frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu_p^2}{E_p} \text{ —}$$

приведений модуль пружності.

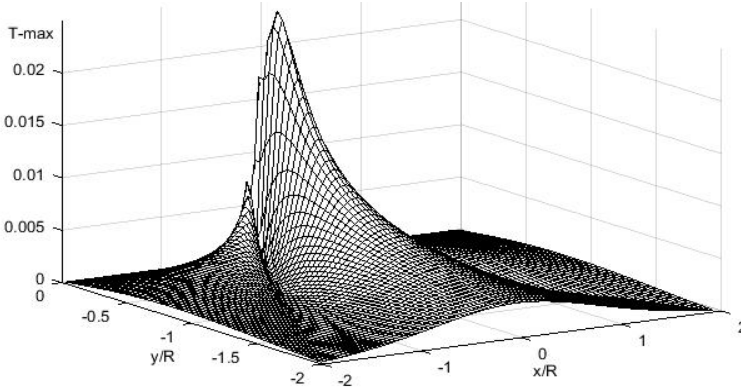
Дані таблиці 1 механічних властивостей матеріалів взяті з [1, 6, 7]

Таблиця 1

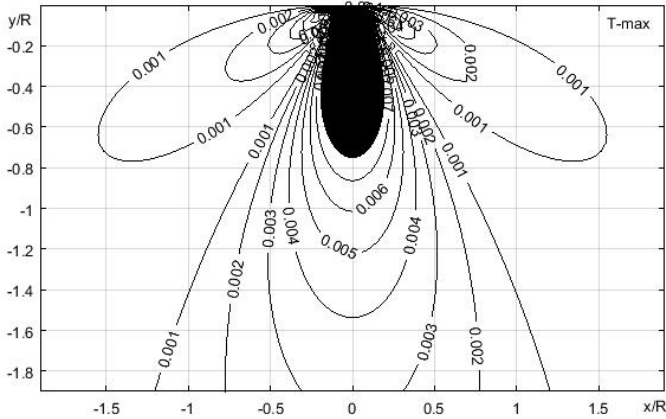
*Механічні властивості матеріалів*

Матеріал	Модуль пружності $E$ , МПа	Коефіцієнт Пуассона, $\nu$	Межа текучості, $\sigma_T$ , МПа
Титановий сплав (Ti-6Al-6V-2Sn) (штамп)	$1.15 \cdot 10^5$	0.32	1220
Титановий сплав (Ti-6Al-4V) (основа)	$1.12 \cdot 10^5$	0.32	930

**Числові результати та аналіз особливостей пружно-пластичних зон.** Процес побудови ізоліній рівня із областями пружно-пластичних деформацій умовно можна поділити на 2 етапи: перший етап — власне побудови ізоліній із використанням вищеописаних функцій, а другий — це автоматичне нанесення на лінії рівня межі пружно-пластичної деформації на основі константи текучості  $k$ .



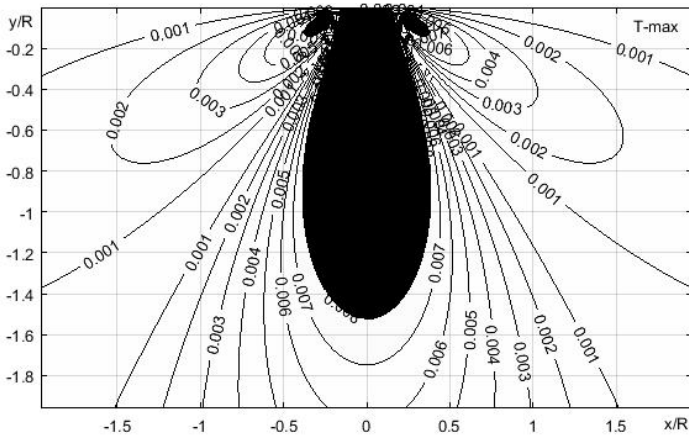
**Рис. 4.** Графік розподіл безрозмірного напруження  $\bar{\tau}_{\max}$  для штампя циліндричної форми при  $a/R = 0.15$



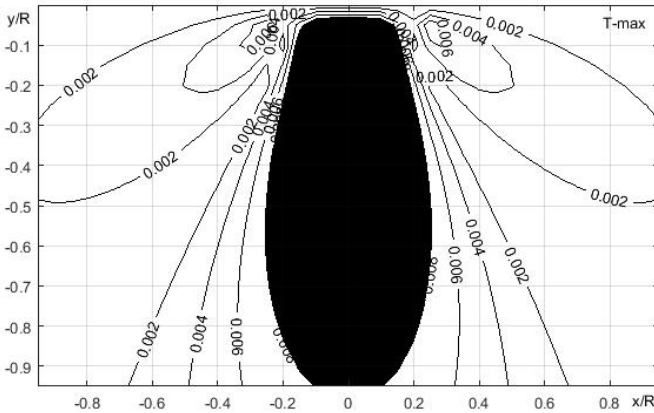
**Рис. 5.** Лінії рівня для розподілу безрозмірного напруження  $\bar{\tau}_{\max}$  для штампна циліндричної форми при  $a/R = 0.15$

На рис. 5 показано лінії рівня  $\max \bar{\tau}_{\max}$  із зоною пружно-пластичної деформації для відповідного 3D-графіка рис. 4 для  $k \approx 0,00735$  для матеріалів описаних в таблиці 1. Варто відмітити, що для всіх штампів канонічної форми при малих областях контакту розподіли компонент напружень і  $\bar{\tau}_{\max}$  практично співпадають.

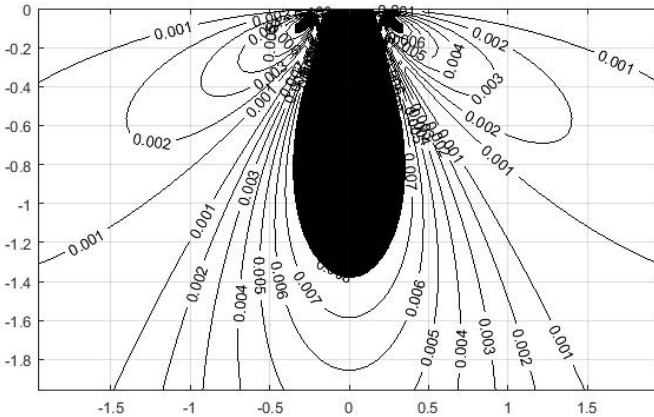
На наступних графіках наведено області зон пружно-пластичної деформації для пар описаних вище для різних штампів, при різних кривизні штампів.



**Рис. 6.** Лінії рівня для розподілу безрозмірного напруження  $\bar{\tau}_{\max}$  для штампна циліндричної форми при  $a/R = 0.2$ ,  $\varepsilon = 0.2$



**Рис. 7.** Лінії рівня для розподілу безрозмірного напруження  $\bar{\tau}_{\max}$  для штампів гіперболічної форми при  $a/R = 0.2$ ,  $\varepsilon = -0.2$



**Рис. 8.** Лінії рівня для розподілу безрозмірного напруження  $\bar{\tau}_{\max}$  для штампів циліндричної форми при  $a/R = 0.2$

Аналізуючи отримані числові результати та графіки рис. 6, рис. 7, рис. 8 встановлено, що для всіх форм штампів зберігається тенденція збільшення відстані від поверхні до точки максимуму  $\bar{\tau}_{\max}$  залежно від величини навантаження контактної пари. Також встановлено, що на величину області пружно-пластичної деформації значно впливає кривизна штампів та область контакту, опосередковано це доводять також рис. 6, рис. 7, рис. 8

**Висновок.** В статті досліджено напружено-деформований стан в середині півплощини для штампів гіперболічної, циліндричної, еліптич-

ної, параболічної форми для плоскої контактної задачі. Досліджено умови появи пружно-пластичних зон у півплощині для нових конструкційних матеріалів при різній кривизні штампів та різних областях контакту. Отримані результати можна використати при побудові експериментально-числової методики для визначення умов появи пластичних зон у тілі для матеріалів з різними механічними властивостями. Розвинута методика дозволяє визначити величину областей текучості, їх межі та характер розподілу із використанням ліній рівня та визначити місця найбільшої концентрації напружень для різних канонічних штампів.

### Список використаних джерел:

1. Горшков А. Г. Теория упругости и пластичности: учебник для вузов / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Тарлаковский. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 416 с.
2. Григоренко Г. М. Структура и свойства проплавленного металла двухфазного титанового сплава с дисперсионным упрочнением при АДС / Г. М. Григоренко, С. В. Ахонин, О. М. Задорожнюк, И. Н. Клочков // Автоматическая сварка. — 2016. — № 11. — С. 11–19.
3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. — Москва : Мир, 1989. — 510 с.
4. Подскребко М. Д. Сопротивлени материалов. Основы теории упругости, пластичности, ползучести и механики разрушения : учеб. пособие. — Минск : Вышэйшая школа, 2009. — 669 с.
5. Сачук Ю. В. Еліптичні інтеграли третього роду в задачах контактної взаємодії / Ю. В. Сачук, О. В. Максимук // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2014. — № 20. — С. 180–187.
6. Старовойтов Э. И. Сопротивление материалов / Э. И. Старовойтов. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 384 с.
7. Фещенко В. Н. Справочник конструктора. Книга 1. Машины и механизмы / В. Н. Фещенко. — Москва : Инфра-Инженерия, 2016. — 400 с.
8. Шарый С. П. Курс вычислительных методов / С. П. Шарый. — Новосибирск : Институт вычислительных технологий СО РАН, 2014. — 501 с.
9. Frank W. J. NIST Handbook of Mathematical Functions / W. J. Frank. — Cambridge : Cambridge University Press, 2010. — 951 p.
10. Nelson H. F. Beebe the mathematical-function Computation / H. F. Nelson. — Salt Lake City : Springer International Publishing, 2017. — 1115 p.
11. Pawlus P. Experimental Investigation of a Hemisphere Contact with a Hard Flat / P. Pawlus, W. Zelasko, A. Dzierwa, S. Prucnal, M. Wieczorowski // Technical Gazette. — 2018. — Vol. 25, №1. — P. 40–46.
12. Sachuk Yu. V. Analysis of the stress-strain state of a body under the action of rigid punches of different shapes / Yu. V. Sachuk, O. V. Maksymuk // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 220, №2. — P. 204–212.
13. Siau T. An Introduction to MATLAB Programming and Numerical Methods for Engineers / T. Siau, A. Bayen. — New York : Academic Press, 2014. — 311 p.



## COMPUTER MODELING OF ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION IN THE PROBLEMS OF CONTACT INTERACTION OF CANONICAL DIES WITH A HALF-PLANE

For a flat contact problem on the interaction of hard dies of a canonical form (cylindrical, hyperbolic, parabolic, elliptic) with a half-plane, the stress-strain state in the body was investigated. To calculate stress components and optimize computations, a method of grids with mirror reflection of results is used. The software tools for realization of advanced methods of calculation of the stressed state are analyzed and selected. 3D graphs of stresses and their corresponding level lines are constructed to facilitate analysis of the results. The construction of the 3D image of each of the stress components was carried out by means of the approximate computation of the integral by means of medium rectangles at each point of the partition, which contained the value of the elliptic integral of the third kind, constructed a series of integral sums and the numerical value of the integral. To determine the zones of elastic-plastic deformation various theories of plasticity have been analyzed and for the purpose of this goal the theory of maximum tangential stresses for the study of the conditions of the appearance of elastic-plastic zones in the body has been chosen for different areas of contact and geometric and physical-mechanical parameters.

In the framework of this theory, a search for new structural materials with all necessary physical and mechanical parameters was made. New titanium alloys with improved mechanical properties have been selected to study the process of the emergence of regions of elastic-plastic deformation. New mechanical effects that arise in the process of interaction for different stamps are established and the conditions leading up to their appearance are investigated. The obtained results can be used in constructing an experimental numerical technique for determining the conditions for the appearance of plastic zones in the body for materials with different mechanical properties. The developed technique allows to determine the magnitude of the yield regions, their boundaries and the character of the distribution using the level lines and to determine the places of the greatest concentration of stresses and to determine the maximum values for different dies.

**Key words:** *contact interaction, elastic-plastic zones, canonical shape stamps, the theory of maximum tensile stresses, elastic half-plane, stress tensor invariants, level lines, analytical-numerical methods, computer modeling, 3D-image, level lines.*

Отримано: 19.11.2018