УДК 517.5
DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.65-77

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,
В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

СПІВВІДНОШЕННЯ ДВОЇСТОСТІ ТА КРИТЕРІЇ ЕКСТРЕМАЛЬНОСТІ ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ ВІДШУКАННЯ ВІДСТАНІ МІЖ ДВОМА ОПУКЛИМИ МНОЖИНАМИ ЛІНІЙНОГО НОРМОВАНОГО ПРОСТОРУ

В середині XIX століття П. Л. Чебишов ввів у математичну науку поняття найкращого у розумінні рівномірної норми наближення неперервної на сегменті дійснозначної функції множиною алгебраїчних поліномів степеня, що не перевищує заданого натурального числа.

Згодом поняття найкращого наближення було перенесено на випадок загальних лінійних нормованих просторів. Виявилось, що низка задач найкращого наближення є частинними випадками задачі найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору, яку ще називають задачею відшукання відстані від заданого елемента лінійного нормованого простору до опуклої множини цього простору.

Важливими питаннями дослідження цієї задачі є питання встановлення співвідношення двоїстості та критерію екстремальності її елемента, конкретизація цього співвідношення та критерію на окремі частинні випадки та їх застосування.

Загальні співвідношення двоїстості та критерії екстремальності елемента для задачі відшукання відстані від заданої точки лінійного нормованого простору до його опуклої множини та їх конкретизації встановлено М. П. Корнєйчуком та В. М. Тихомировим.

Важливою задачею, частинним випадком якої є задача найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору, є задача відшукання відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору, яка розглядається у даній роботі.

У статті для задачі відшукання відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору встановлено співвідношення двоїстості, яке зводить розглядувану задачу до задачі на обчислення верхньої межі в спряженому до лінійного нормованого простору просторі.

Вищеназване співвідношення покладене в основу доведення критерію екстремальності елемента для розглядуваної задачі.

© У. В. Гудима, В. О. Гнатюк, 2018

Отримані результати конкретизовано на окремі випадки, застосовано для встановлення відстані між двома кулями та між кулею і гіперплощиною лінійного нормованого простору.

Ключові слова: *лінійний нормований простір, опукла множина, відстань між множинами, співвідношення двоїстості, критерій екстремальності елемента.*

Вступ. У статті встановлено співвідношення двоїстості та оснований на ньому критерій екстремальності елемента для задачі відшукання відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору. Отримані результати конкретизовано на окремі частинні випадки та використано при дослідженні задач відшукання відстані між двома кулями та відстані між кулею і гіперплощиною лінійного нормованого простору.

Постановка задачі. Нехай X — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір елементів x з нормою $\|x\|$, A та B — опуклі множини простору X.

Задачею відшукання відстані (найкращої) між множинами A та B будемо називати задачу відшукання величини

$$E\left(A,B\right)=\inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}}\|x-y\| \tag{1}$$

(див., наприклад, [1, с. 65]).

Якщо існує елемент $\left(x^*,y^*\right)\in A\times B$ такий, що

$$E\left(A,B\right)=\inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}}\|x-y\|=\left\|x^*-y^*\right\|,$$

то його будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Актуальність теми. Загальновідомо, що визначальною ідеєю в питаннях зв'язків математики з практикою є ідея наближення.

Однією з центральних галузей теорії наближення є теорія наближення функцій.

Низка задач теорії наближення функцій (задачі наближення функцій за допомогою алгебраїчних, тригонометричних поліномів тощо) в метриках різних просторів є частинними випадками задачі найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору, яка полягає в наступному.

Нехай X — лінійний нормований простір, $x\in X$, B — опукла множина простору X.

Ставиться задача відшукання величини

$$E\left(x,B\right)=\inf_{y\in B}\|x-y\|. \tag{2}$$

Якщо для $x \in X$ існує елемент $y^* \in B$ такий, що

$$E\left(x, B\right) = \inf_{y \in B}\left\|x - y\right\| = \left\|x - y^*\right\|,$$

то його називають елементом найкращого наближення елемента x множиною B або екстремальним елементом для величини (2).

Величина (2) вивчалася багатьма авторами. Основні результати цих досліджень підсумовані, зокрема, у монографіях Н. І. Ахієзера [2], В. К. Дзядика [3], М. П. Корнєйчука [4], П.-Ж. Лорана [5], О. І. Степанця [6, 7], В. М. Тихомирова [8] та ін.

Зрозуміло, що задача відшукання величини (2) є частинним випадком задачі відшукання величини (1). Вона отримується з (1) при $A = \left\{x\right\}$, де x — фіксований елемент простору X.

Отже, задача відшукання величини (2) та її екстремального елемента, всі інші вищезгадані задачі вкладаються у схему постановки задачі (1).

Тому дослідження задачі (1) дозволить з єдиних позицій розглянути результати дослідження цих задач, а також використати отримані результати дослідження задачі (1) для дослідження інших задач, які вкладаються у схему її постановки.

Такими задачами є, зокрема, задача відшукання відстані між двома кулями, між кулею та гіперплощиною, між двома гіперплощинами лінійного нормованого простору та інші.

Тому проблема дослідження задачі відшукання величини (1) є актуальною.

Оскільки отримання низки результатів при дослідженні екстремальних задач базується на співвідношеннях двоїстості та критеріях екстремальності їх елементів, то встановлення цих співвідношень та критеріїв є пріоритетним.

Мета роботи. Встановити співвідношення двоїстості та критерії екстремальності елемента для задачі відшукання відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору, застосувати отримані результати для дослідження задач про відшукання відстані між двома кулями та між кулею і гіперплощиною лінійного нормованого простору.

Співвідношення двоїстості для задачі відшукання величини (1). Будемо позначати далі через X^* — простір, спряжений з X, а через $S^* = \left\{f \in X^* : \left\|f\right\| \le 1\right\}$ — кулю простору X^* з центром у точці 0 радіуса 1.

Теорема 1. Нехай A та B є опуклими множинами лінійного над полем дійсних чисел нормованого простору X. Тоді

$$E\left(A, B\right) = \max_{f \in S^*}\left(\inf_{x \in A} f\left(x\right) - \sup_{y \in B} f\left(y\right)\right). \tag{3}$$

Доведення. Маємо, що

$$E(A,B)=\inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}}\|x-y\|=\inf_{\substack{y\in B,\\ x\in A}}\|0-(y-x)\|=\inf_{u\in B-A}\|0-u\|=E(0,B-A). \quad (4)$$

Оскільки $B-A$ є опуклою множиною простору X, то згідно з [4, с. 28]

$$E(0,B-A)=\max_{f\in S^*}\left(f(0)-\sup_{u\in B-A}f(u)\right)=\max_{f\in S^*}\left(-\sup_{u\in B-A}f(u)\right)=$$

$$=\max_{f\in S^*}\left(-\sup_{\substack{y\in B,\\ x\in A}}\left(f(y)-f(x)\right)\right)=\max_{f\in S^*}\inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}}\left(f(x)-f(y)\right)= \quad (5)$$

$$=\max_{f\in S^*}\left(\inf_{x\in A}f(x)-\sup_{y\in B}f(y)\right).$$

Зі співвідношень (4), (5) випливає справедливість співвідношення (3). **Теорему доведено.**

Наслідок 1. Якщо в задачі відшукання величини (1) A є опуклою множиною простору X, а B — опуклим конусом цього простору з вершиною в точці 0, то має місце рівність

$$E(A,B)=\max_{f\in S^*}\left(\inf_{x\in A}f(x)-\sup_{y\in B}f(y)\right)=\max_{\substack{f\in S^*,\\ f\in(-B^*)}}\inf_{x\in A}f(x),$$

де $B^*=\left\{f\in X^*: f(y)\geq 0, y\in B\right\}$ — конус, спряжений з B.

Доведення. Дійсно, якщо $f\in X^*$ і $f\notin -B^*=(-B)^*$, то $(-f)\notin B^*$. Тому існує елемент $y_0\in B$, для якого $(-f)(y_0)<0$, а $f(y_0)>0$. Звідси випливає, що $\sup\limits_{t>0}f(ty_0)=\sup\limits_{t>0}\left(tf(y_0)\right)=+\infty$. Оскільки $ty_0\in B$, $t>0$, то

$$\sup_{y\in B}f(y)\geq\sup_{t>0}\left(f(ty_0)\right)=+\infty.$$

Тоді

$$\inf_{x\in A}f(x)-\sup_{y\in B}f(y)=-\infty.$$

Це означає, що при обчисленні верхньої межі по f у співвідношенні (3) можна брати лише ті функціонали f із S^*, які одночасно належать до $-B^*$.

Але ж для цих функціоналів $\sup\limits_{y\in B} f\left(y\right)=0$. Тому в розглядуваному випадку

$$E\left(A,B\right)=\max_{f\in S^*}\left(\inf_{x\in A} f\left(x\right)-\sup_{y\in B} f\left(y\right)\right)=\max_{\substack{f\in S^*,\\ f\in\left(-B^*\right)}}\inf_{x\in A} f\left(x\right).$$

Наслідок доведено.

Наслідок 2. Якщо в задачі відшукання величини (1) A є опуклим конусом з вершиною в точці 0, а B — довільною опуклою множиною, то має місце рівність

$$E\left(A,B\right)=\max_{f\in S^*}\left(\inf_{x\in A} f\left(x\right)-\sup_{y\in B} f\left(y\right)\right)=\max_{\substack{f\in S^*,\\ f\in A^*}}\left(-\sup_{y\in B} f\left(y\right)\right),$$

де $A^*=\left\{f\in X^*: f\left(x\right)\geq 0, x\in A\right\}$ — конус, спряжений з A.

Наслідок 3. Якщо в задачі відшукання величини (1) A є опуклою множиною, а B — підпростором простору X, то має місце рівність

$$E\left(A,B\right)=\max_{\substack{f\in S^*,\, x\in A\\ f\in B^{\perp}}}\inf f\left(x\right),$$

де $B^{\perp}=\left\{f\in X^*: f\left(y\right)=0, y\in B\right\}$ — анулятор підпростору B.

Наслідок 4. Якщо в задачі відшукання величини (1) A є підпростором простору X, а B — опуклою множиною цього простору, то має місце рівність

$$E\left(A,B\right)=\max_{\substack{f\in S^*,\\ f\in A^{\perp}}}\left(-\sup_{y\in B} f\left(y\right)\right),$$

де $A^{\perp}=\left\{f\in X^*: f\left(x\right)=0, x\in A\right\}$ — анулятор підпростору A.

Задача відшукання відстані між двома кулями лінійного нормованого простору.

Теорема 2. Якщо $A=\left\{x\in X:\left\|x-a\right\|\leq r_1\right\}$ — куля простору X з центром у точці a радіуса r_1, а $B=\left\{y\in X:\left\|y-b\right\|\leq r_2\right\}$ – куля простору X з центром у точці b радіуса r_2, то

$$E\left(A,B\right)=\begin{cases}0, \text{якщо } \left\|a-b\right\|\leq r_1+r_2,\\ \left\|a-b\right\|-\left(r_1+r_2\right), \text{ якщо } \left\|a-b\right\|>r_1+r_2.\end{cases}$$

Доведення. Оскільки $A=\left\{x\in X: x=a+z,\left\|z\right\|\leq r_1\right\}$, а $B=$ $=\left\{y\in X: y=b+u,\left\|u\right\|\leq r_2\right\}$, то згідно із співвідношенням двоїстості (3) в розглядуваному випадку

$$
\begin{aligned}
E(A,B) &= \max_{f\in S^*}\left(\inf_{x\in A} f(x) - \sup_{y\in B} f(y)\right) = \\
&= \max_{f\in S^*}\left(\inf_{\|z\|\le r_1} f(a+z) - \sup_{\|u\|\le r_2} f(b+u)\right) = \\
&= \max_{f\in S^*}\left(f(a-b) + \inf_{\|z\|\le r_1} f(z) - \sup_{\|u\|\le r_2} f(u)\right) = \qquad (6)\\
&= \max_{f\in S^*}\left(f(a-b) - r_1 \sup_{\left\|-\frac{z}{r_1}\right\|\le 1} f\left(-\frac{z}{r_1}\right) - r_2 \sup_{\left\|\frac{u}{r_2}\right\|\le 1} f\left(\frac{u}{r_2}\right)\right) = \\
&= \max_{f\in S^*}\left(f(a-b) - (r_1+r_2)\|f\|\right) = \\
&= f^*(a-b) - (r_1+r_2)\left\|f^*\right\| \ge 0,
\end{aligned}
$$

де $f^* \in S^*$ ($\left\|f^*\right\| \le 1$).

Зі співвідношення (6) дістаємо нерівність

$$0 \le E(A,B) = f^*(a-b) - (r_1+r_2)\left\|f^*\right\| \le \left\|f^*\right\|\left(\|a-b\| - (r_1+r_2)\right). \quad (7)$$

Зрозуміло, що з нерівності (7) випливає рівність $E(A,B)=0$, якщо $\|a-b\| \le r_1 + r_2$, оскільки в цьому випадку $\left\|f^*\right\|\left(\|a-b\| - (r_1+r_2)\right) \le 0$.

Якщо ж $\|a-b\| > r_1 + r_2$, то існує функціонал $\overline{f} \in X^*$ такий, що $\left\|\overline{f}\right\| = 1$ і $\overline{f}(a-b) = \|a-b\|$. Тоді $\overline{f} \in S^*$ та $\overline{f}(a-b) - (r_1+r_2)\left\|\overline{f}\right\| > 0$.

Внаслідок цього та співвідношень (6), (7) можемо записати, що

$$
\begin{aligned}
0 \le \overline{f}(a-b) - (r_1+r_2)\left\|\overline{f}\right\| = \|a-b\| - (r_1+r_2) \le \\
\le E(A,B) \le \|a-b\| - (r_1+r_2).
\end{aligned}
$$

Звідси випливає, що $E(A,B) = \|a-b\| - (r_1+r_2)$.

Отже, $E(A,B)=0$, якщо $\|a-b\| \le r_1+r_2$, та $E(A,B) = \|a-b\| - (r_1+r_2)$, якщо $\|a-b\| > r_1+r_2$.

Теорему доведено.

Зауважимо, що без доведення у праці [9, с. 111] зазначено, що справедлива рівність

$$E(A,B) = \max\left\{0, \|a_1 - a_2\| - (r_1+r_2)\right\}.$$

Задача відшукання відстані між кулею та гіперплощиною лінійного нормованого простору.

Теорема 3. Якщо $A=\left\{x\in X:\|x-a\|\le r\right\}$ — куля простору X з центром у точці a радіуса r, а $B=\left\{y\in X:\varphi(y)=c\right\}$, де $\varphi\in X^*$, $\varphi\ne 0$, $c\in R$, — замкнена гіперплощина простору X, то має місце рівність

$$E(A,B)=\begin{cases}0,\text{якщо } A\cap B\ne\varnothing,\\ \dfrac{|\varphi(a)-c|}{\|\varphi\|}-r,\text{якщо } A\cap B=\varnothing.\end{cases}$$

Доведення. Оскільки $A=\left\{x\in X:x=a+z,\|z\|\le r\right\}$, то

$$\begin{aligned}E(A,B)&=\max_{f\in S^*}\left(\inf_{x\in A}f(x)-\sup_{y\in B}f(y)\right)=\\&=\max_{f\in S^*}\left(f(a)+\inf_{\|z\|\le r}f(z)-\sup_{y\in B}f(y)\right)=\\&=\max_{f\in S^*}\left(f(a)-r\|f\|-\sup_{y\in B}f(y)\right).\end{aligned}\qquad(8)$$

Нехай $y_0\in X$ та $\varphi(y_0)=c$. Тоді

$$B=\left\{y\in X:\varphi(y)=\varphi(y_0)\right\}=\left\{y\in X:\varphi(y-y_0)=0\right\}=$$
$$=\left\{y\in X:y=y_0+z,\varphi(z)=0\right\}.$$

Тому для $f\in X^*$

$$\sup_{y\in B}f(y)=\sup\left\{f(y):y=y_0+z,\varphi(z)=0\right\}=$$
$$=f(y_0)+\sup\left\{f(z):\varphi(z)=0\right\}.$$

Зрозуміло, що коли існує z_0 таке, що $\varphi(z_0)=0$, а $f(z_0)\ne 0$, то $\sup\left\{f(z):\varphi(z)=0\right\}=+\infty$.

Якщо ж $f(z)=0$ для всіх z: $\varphi(z)=0$, то в цьому випадку $\sup\left\{f(z):\varphi(z)=0\right\}=0$ та існує число λ таке, що $f=\lambda\varphi$ (див., наприклад, [5, с. 44]).

Навпаки, якщо $f=\lambda\varphi$, де $\lambda\in R$, то $\sup\left\{f(z):\varphi(z)=0\right\}=0$.

Позначимо через $P=\left\{f\in X^*:f=\lambda\varphi,\lambda\in R\right\}$.

З наведених вище міркувань випливає, що для $f \in X^*$

$$\sup_{y \in B} f(y) = \begin{cases} +\infty, \text{ якщо } f \notin P, \\ f(y_0), \text{ якщо } f \in P. \end{cases}$$

Внаслідок цього та рівності (8) одержимо, що в розглядуваному випадку

$$0 \le E(A,B) = \max\left\{\lambda\varphi(a) - r|\lambda|\|\varphi\| - \lambda\varphi(y_0) : |\lambda|\|\varphi\| \le 1\right\} =$$

$$= \max\left\{\lambda\left(\varphi(a) - c\right) - r|\lambda|\|\varphi\| : |\lambda| \le \frac{1}{\|\varphi\|}\right\} = \tag{9}$$

$$= \lambda^*\left(\varphi(a) - c\right) - r\left|\lambda^*\right|\|\varphi\|,$$

де $\left|\lambda^*\right| \le \dfrac{1}{\|\varphi\|}$.

Припустимо, що існує точка $y_0 \in A \cap B$, тобто $\varphi(y_0) = c$ та $\|y_0 - a\| \le r$. З урахуванням (9) в цьому випадку одержимо, що

$$0 \le E(A,B) = \lambda^*\varphi(a - y_0) - r\left\|\lambda^*\varphi\right\| \le \left\|\lambda^*\varphi\right\|\left(\|a - y_0\| - r\right) \le 0.$$

Звідси випливає, що $E(A,B) = 0$, якщо $A \cap B \ne \varnothing$. Припустимо тепер, що $A \cap B = \varnothing$. Це означає, що $\varphi(x) \ne c$ для всіх $x \in A$. Оскільки A є опуклою множиною, то $\varphi(x) > c$ для всіх $x \in A$ або $\varphi(x) < c$ для всіх $x \in A$. Припустимо, що $\varphi(x) > c$, $x \in A$. Звідси випливає, що

$$\varphi(a + z) = \varphi(a) + \varphi(z) > c,\ z \in \left\{z \in X : \|z\| \le r\right\}.$$

Тому

$$\inf_{\|z\| \le r} \varphi(z) = -r\|\varphi\| \ge c - \varphi(a), \text{ а } \varphi(a) - c - r\|\varphi\| \ge 0.$$

З урахуванням цього одержимо, що $\varphi(a) - c > 0$ і

$$\frac{|\varphi(a) - c|}{\|\varphi\|} - r = \max_{|\lambda| \le \frac{1}{\|\varphi\|}} \left(|\varphi(a) - c| - r\|\varphi\|\right)|\lambda| \ge$$

$$\ge \max_{|\lambda| \le \frac{1}{\|\varphi\|}} \left(\left(\varphi(a) - c\right)\lambda - |\lambda| r\|\varphi\|\right) \ge \max_{0 \le \lambda \le \frac{1}{\|\varphi\|}} \left(\varphi(a) - c - r\|\varphi\|\right)\lambda = \frac{|\varphi(a) - c|}{\|\varphi\|} - r.$$

Тому у випадку, коли $A \cap B = \varnothing$ та $\varphi(x) > c$, $x \in A$, маємо, що

$$E(A,B) = \max_{|\lambda| \le \frac{1}{\|\varphi\|}} \left(\left(\varphi(a) - c\right)\lambda - |\lambda| r\|\varphi\|\right) = \frac{|\varphi(a) - c|}{\|\varphi\|} - r.$$

Нехай $A \cap B = \varnothing$ та $\varphi(x) < c$, $x \in A$. Звідси випливає, що $\varphi(a) + \varphi(z) < c$, $\|z\| \le r$; $\varphi(a) + r\|\varphi\| \le c$, $\varphi(a) - c \le -r\|\varphi\|$.

Тому $\varphi(a) - c < 0$, $\varphi(a) - c + r\|\varphi\| \le 0$,

$$c - \varphi(a) - r\|\varphi\| = |\varphi(a) - c| - r\|\varphi\| \ge 0$$

З урахуванням цього одержимо, що

$$\frac{|\varphi(a) - c|}{\|\varphi\|} - r = \max_{|\lambda| \le \frac{1}{\|\varphi\|}} \left(|\varphi(a) - c| - r\|\varphi\|\right)|\lambda| \ge$$

$$\ge \max_{|\lambda| \le \frac{1}{\|\varphi\|}} \left(\left(\varphi(a) - c\right)\lambda - |\lambda| r\|\varphi\|\right) \ge \max_{-\frac{1}{\|\varphi\|} \le \lambda \le 0} \left(\varphi(a) - c + r\|\varphi\|\right)\lambda =$$

$$= \frac{-\left(\varphi(a) - c\right)}{\|\varphi\|} - r = \frac{|\varphi(a) - c|}{\|\varphi\|} - r .$$

Звідси випливає, що $E(A,B) = \dfrac{|\varphi(a) - c|}{\|\varphi\|} - r$ і у випадку, коли $A \cap B = \varnothing$ та $\varphi(x) < c$, $x \in A$.

Отже, якщо $A \cap B = \varnothing$, то $E(A,B) = \dfrac{|\varphi(a) - c|}{\|\varphi\|} - r$. Вище було встановлено, що $E(A,B) = 0$, якщо $A \cap B \ne \varnothing$.

Теорему доведено.

Критерій екстремальності елемента для задачі відшукання величини (1).

Теорема 4. Нехай X — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, A, B — опуклі множини цього простору. Для того щоб елемент $\left(x^*, y^*\right) \in A \times B$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо існування функціонала $f^* \in X^*$ з такими властивостями:

1) $\|f^*\| \le 1$ $\left(f^* \in S^*\right)$,

2) $f^*\left(x^* - y^*\right) = \|x^* - y^*\|$,

3) $f^*\left(x^*\right) = \inf\limits_{x \in A} f^*(x)$,

4) $f^*\left(y^*\right) = \sup\limits_{y \in B} f^*(y)$.

Доведення. Нехай елемент $\left(x^*, y^*\right) \in A \times B$ є екстремальним елементом для величини (1). Отже,

$$\left\|x^* - y^*\right\| = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\|. \tag{10}$$

Позначимо через f^* функціонал простору X^*, який реалізує точну верхню межу у співвідношенні двоїстості (3).

Тоді $\left\|f^*\right\| \leq 1$ $\left(f^* \in S^*\right)$ і

$$\left\|x^* - y^*\right\| = \inf_{x \in A} f^*(x) - \sup_{y \in B} f^*(y). \tag{11}$$

Оскільки $x^* \in A$, $y^* \in B$, то

$$\inf_{x \in A} f^*(x) \leq f^*\left(x^*\right), \ \sup_{y \in B} f^*(y) \geq f^*\left(y^*\right).$$

З урахуванням (10), (11) звідси одержимо, що

$$\left\|x^* - y^*\right\| \geq \left\|f^*\right\| \left\|x^* - y^*\right\| \geq f^*\left(x^* - y^*\right) = f^*\left(x^*\right) - f^*\left(y^*\right) \geq$$

$$\geq \inf_{x \in A} f^*(x) - \sup_{y \in B} f^*(y) = \left\|x^* - y^*\right\|.$$

Тому

$$f^*\left(x^* - y^*\right) = \left\|x^* - y^*\right\| \text{ та } f^*\left(x^*\right) = \inf_{x \in A} f^*(x), \ f^*\left(y^*\right) = \sup_{y \in B} f^*(y).$$

Отже, якщо $\left(x^*, y^*\right)$ є екстремальним елементом для величини (1), то існує функціонал $f^* \in X^*$, який задовольняє умовам 1)–4).

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для елемента $\left(x^*, y^*\right) \in A \times B$ існує функціонал $f^* \in X^*$, який задовольняє умовам 1)–4). Переконаємося, що $\left(x^*, y^*\right)$ є екстремальним елементом для величини (1). З урахуванням 1)–4) для будь-яких $x \in A$, $y \in B$ будемо мати, що

$$\left\|x^* - y^*\right\| = f^*\left(x^* - y^*\right) = f^*\left(x^*\right) - f^*\left(y^*\right) = \inf_{x \in A} f^*(x) - \sup_{y \in B} f^*(y) \leq$$

$$\leq f^*(x) - f^*(y) = f^*(x - y) \leq \left\|f^*\right\| \|x - y\| \leq \|x - y\|.$$

Це й означає, що $\left(x^*, y^*\right)$ є екстремальним елементом для величини (1).

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Наслідок 5. Нехай в задачі відшукання величини (1) A є опуклою множиною, а B є опуклим конусом з вершиною в точці 0. Для того щоб елемент $\left(x^*, y^*\right)$ був екстремальним елементом для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо існування функціонала $f^* \in X^*$ такого, що

1) $\left\|f^*\right\| \leq 1 \ \left(f^* \in S^*\right)$,

2) $f^*\left(x^* - y^*\right) = \left\|x^* - y^*\right\|$,

3) $f^*\left(x^*\right) = \inf\limits_{x \in A} f^*(x)$,

4) $f^*\left(y^*\right) = \sup\limits_{y \in B} f^*(y) = 0$.

Доведення. Необхідність. Нехай $\left(x^*, y^*\right)$ є екстремальним елементом для величини (1). Згідно з теоремою 4 існує функціонал $f^* \in X^*$, який задовольняє умовам 1)–3) теореми та для якого

$$f^*\left(y^*\right) = \sup_{y \in B} f^*(y). \tag{12}$$

З урахування рівності (12) і того, що B є конусом з вершиною в точці 0, робимо висновок, що $f^*(y) \leq 0$, $y \in B$, а

$$f^*\left(y^*\right) = \sup_{y \in B} f^*(y) = 0.$$

Необхідність доведено.

Достатність умов наслідку для екстремальності елемента $\left(x^*, y^*\right)$ безпосередньо випливає з умов 1)–4) та теореми 4.

Наслідок 6. Нехай в задачі відшукання величини (1) A є опуклим конусом з вершиною в точці 0, а B є опуклою множиною. Для того щоб елемент $\left(x^*, y^*\right)$ був екстремальним елементом для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо існування функціонала $f^* \in X^*$ такого, що

1) $\left\|f^*\right\| \leq 1 \ \left(f^* \in S^*\right)$,

2) $f^*\left(x^* - y^*\right) = \left\|x^* - y^*\right\|$,

3) $f^*\left(x^*\right) = \inf\limits_{x \in A} f^*(x) = 0$,

4) $f^*\left(y^*\right)=\sup\limits_{y\in B} f^*\left(y\right)$.

Наслідок 7. Нехай в задачі відшукання величини (1) A є опуклою множиною, а B є підпростором простору X. Для того щоб елемент $\left(x^*,y^*\right)$ був екстремальним елементом для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо існування функціонала $f^*\in X^*$ такого, що

1) $\left\|f^*\right\|\le 1$ $\left(f^*\in S^*\right)$,

2) $f^*\left(x^*-y^*\right)=\left\|x^*-y^*\right\|$,

3) $f^*\left(x^*\right)=\inf\limits_{x\in A} f^*\left(x\right)$,

4) $f^*\left(y\right)=0$, $y\in B$.

Наслідок 8. Нехай в задачі відшукання величини (1) A є підпростором простору X, а B є опуклою множиною. Для того щоб елемент $\left(x^*,y^*\right)\in A\times B$ був екстремальним елементом для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо існування функціонала $f^*\in X^*$ такого, що

1) $\left\|f^*\right\|\le 1$ $\left(f^*\in S^*\right)$,

2) $f^*\left(x^*-y^*\right)=\left\|x^*-y^*\right\|$,

3) $f^*\left(x\right)=0, x\in A$,

4) $f^*\left(y^*\right)=\sup\limits_{y\in B} f^*\left(y\right)$.

Висновки. Для задачі відшукання відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору встановлено співвідношення двоїстості та критерії екстремальності елемента, отримані результати використано для дослідження задач про відшукання відстані між двома кулями та між кулею і гіперплощиною лінійного нормованого простору.

Список використаних джерел:

1. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 544 с.
2. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. — М. : Наука, 1965. — 407 с.
3. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций / В. К. Дзядык. — М. : Наука, 1977. — 510 с.

4. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения / Н. П. Корнейчук. — М. : Наука, 1976. — 320 с.
5. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
6. Степанец А. И. Методы теории приближений / А. И. Степанец. — К. : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. I. — 427 с.
7. Степанец А. И. Методы теории приближений / А. И. Степанец. — К. : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. II. — 468 с.
8. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений / В. М. Тихомиров. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 307 с.
9. Арутюнов А. В. Лекции по выпуклому и многозначному анализу : учебное пособие / А.В. Арутюнов. — М. : Физматлит, 2014. — 184 с.

THE RELATION OF DUALITY AND THE CRITERION OF THE EXTREMALITY OF AN ELEMENT FOR THE PROBLEM OF FINDING THE DISTANCE BETWEEN TWO CONVEX SETS OF LINEAR NORMED SPACE

P. L. Chebyshov started the conception of the best approximation of a continuous function on a segment using algebraic polynomials of some order at the middle of the XIX century.

Later, the notion of the best approximation was considered for the case of general linear normed spaces. Over time, it became clear that a many tasks of best approximation are partial consequence of the problem of the best approximation of an element of a linear normed space by a convex set. This task is called the problem of finding the distance from the given element of the linear normed space to the convex plurality of this space as well. Important questions of the study of this problem are the establishment of the relation of duality and the criterion of the extremality of its element, the specification of this relation and the criterion for some partial cases and their application.

M. P. Korniichuk and V. M. Tikhomirov established the general relation of duality and criterion of the extremality of an element for the problem of the best approximation of an element of a linear normed space by a convex set based on the dual interrelation.

An important problem, the partial case of which is the problem of the best approximation of an element of a linear normed space by a convex set of this space, is the problem of finding the distance between two convex sets of linear normed space, which is considered in this paper. In the article establishes the relation of duality for this problem, which reduces this problem to the problem of evaluationing the upper bound in the conjugate space. The obtained relation is used to obtain the criterion of the extremality of an element. Thes results are used to find the distance between two bullets and between the bullet and the hyperplane of the linear normed space.

Key words: t*he linear normed space, the convex set, the distance between sets, the relation of duality, the criterion of the extremality of an element.*

Отримано: 14.11.2018