УДК 517.958:532.5;517.957;681.513.8;001.891.57:53
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.47-53

А. М. Крот, д-р техн. наук, профессор

Объединенный институт проблем информатики
НАН Беларуси, г. Минск, Республика Беларусь

МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СЛОЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ МАТРИЧНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

В работе разработана общая модель возникновения и эволюции хаотических волновых процессов в сложных системах на основе предложенного метода матричной декомпозиции операторов нелинейных систем. Предложенная модель показала, что эффект самоорганизации в сложных системах различной физической природы (на примерах гидродинамической, электронной и космогонической систем) заключается во взаимодействии нелинейных процессов высших порядков, приводящей к стабилизации (к конечной величине) амплитуды хаотического волнового процесса. Математически это выражается в синхронном «противодействии» нелинейных процессов чётных и нечётных порядков в общей векторно-матричной модели сложной системы, находящейся в хаотическом режиме. Реализация векторно-матричной декомпозиции посредством вычислительных экспериментов показала, что модель Л. Д. Ландау достаточно хорошо описывает сценарий возникновения хаотических режимов в сложных системах. Отмечено, что режим жесткого самовозбуждения нелинейных колебаний в сложных системах приводит к появлению хаотического аттрактора в пространстве состояний. Вместе с тем предложенная векторно-матричная модель позволила найти более общие условия возникновения и эволюции хаотических волновых процессов и, как следствие, объяснить возникновение согласованных нелинейных явлений в сложных системах.

Ключевые слова: *сложная динамическая система, пространство состояний, хаотический аттрактор, матричный ряд в пространстве состояний, общая векторно-матричная модель хаотических волновых процессов, режим жесткого самовозбуждения нелинейных колебаний, стабилизация амплитуды хаотического процесса.*

Введение. Развитие теории хаотических волновых процессов (в частности, теории турбулентности в аэрогидродинамических потоках) важно с точки зрения понимания процессов самоорганизации в сложных динамических системах. Л. Д. Ландау в своей статье [1] разработал теорию *начальной турбулентности*, в рамках которой показал, что первоначальная неустойчивость нестационарного движения не растет неограниченно, а стремится к некоторому конечному пределу. В работе [2] предложена модель дискретной *квазистационарной* линейной динамической системы на основе обобщенного спектрального представления в базисе собственных функций, соответствующих собственным значениям оператора этой системы. Э. Лоренц [3], исследуя динамическое поведение вязкой жидкости в условиях конвенкции (течение Рэлея–Бенара), предложил модель турбулентности, для построения которой использовался метод Галёркина с целью редуцирования системы уравнений Навье–Стокса и теплопроводности. В результате *редуцированная модель Лоренца*, описываемая тремя обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями, позволила выявить хаотическое поведение системы, приведшее к открытию *хаотического* (странного) *аттрактора* в пространстве состояний. Математически понятие «хаотического аттрактора» сформулировано Д. Рюэлем и Ф. Такенсом [4] как ключевой элемент в интерпретации иррегулярного поведения, описываемого детерминистскими уравнениями для понимания главным образом турбулентности. Тем самым было положено начало исследованиям того, что теперь именуется *детерминированным хаосом* [5, 6]. Несмотря на достигнутые успехи, вместе с тем остаются не до конца выясненными вопросы, касающиеся *стабилизации* хаотических волновых процессов, позволяющей достаточно долго поддерживать незатухающие хаотические колебания в сложных системах при неизменности их *управляющих параметров.*

Построение общей модели возникновения хаотических волновых процессов с использованием метода матричной декомпозиции. Известно [5, 6], что хаотические волновые процессы возникают в сложных системах самой различной физической природы (например, в планетарных, электродинамических, химических и физиологических системах). В этой связи попытаемся построить общую модель возникновения и стабилизации хаотических волновых процессов с использованием теории матричной декомпозиции в пространстве состояний сложной системы [7–10]. В векторно-матричном виде система обыкновенных дифференциальных уравнений может рассматриваться как задача Коши в N-мерном пространстве состояний U сложной НДС:

$$\dot{\vec{u}} = \vec{f}\left(\vec{u}(t),\ \vec{u}_0, \{c_l\}\right),\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0,\ \vec{u}(t) \in U, \qquad (1)$$

где $\vec{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_N(t))^T$, T — символ транспонирования, $\vec{u}_0$ — вектор начальных данных, $\{c_l\}$ — множество параметров системы. Решение $\vec{u}(t)$ уравнения (1) задаёт некоторую кривую в пространстве состояний (фазовом пространстве) $U = \Re^N$, называемую *фазовой траекторией*. Для исследования поведения решения уравнения (1) вблизи конкретного стандартного состояния $\vec{u}^*$ рассматриваем невозмущённое решение (1), постоянно возмущаемое внешними воздействиями (или внутренними флуктуациями) на величину $\vec{v} = \vec{v}(t)$ [5]. В результате вместо $\vec{u}^*$ возникает новое решение

$$\vec{u} = \vec{u}^* + \vec{v}(t) . \tag{2}$$

С учетом (2) запишем систему (1) относительно $\vec{v}(t)$:

$$\dot{\vec{v}} = \Delta\vec{f}(\vec{v}(t),\ \vec{u}^*, \{c_l\}) , \tag{3}$$

где $\vec{v}(t) = (v_1(t), \ldots, v_N(t))^T$, $\Delta\vec{f}$ — приращение векторной функции, $\vec{u}^*$ — вектор невозмущённого (стандартного) состояния, $\{c_l\}$ — набор параметров системы. Согласно теории матричной декомпозиции, приращение векторной функции $\Delta\vec{f}$ сложной НДС в пространстве состояний описывается матричным рядом вида [7–10]:

$$\begin{gathered}\Delta\vec{f}(\vec{v},\vec{u}^*) = \vec{f}(\vec{u}^* + \vec{v}) - \vec{f}(\vec{u}^*) = L^{(1)}_{N\times N}\vec{v} + \frac{1}{2!}L^{(2)}_{N\times N^2}(\vec{v}\otimes\vec{v}) + \\ + \frac{1}{3!}L^{(3)}_{N\times N^3}(\vec{v}\otimes\vec{v}\otimes\vec{v}) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}L^{(k)}_{N\times N^k}\cdot\vec{v}^{\otimes k} ,\end{gathered} \tag{4}$$

где $L^{(k)}_{N\times N^k} = \underbrace{(\frac{\partial}{\partial\vec{v}^T}\otimes(\frac{\partial}{\partial\vec{v}^T}\otimes\ldots\otimes(\frac{\partial}{\partial\vec{v}^T}}_{k}\otimes\vec{f})\ldots))_{\vec{u}^*}$ — матричные ядра однородных нелинейных операторов системы, $\vec{v}^{\otimes k} = (\underbrace{\vec{v}\otimes\vec{v}\otimes\ldots\otimes\vec{v}}_{k})$ — k-я кронекеровская степень вектора возмущений $\vec{v}$.

Применяя матричное разложение (4) к правой части уравнения (3), получаем:

$$\dot{\vec{v}} = L^{(1)}_{N\times N}\vec{v} + \frac{1}{2!}L^{(2)}_{N\times N^2}(\vec{v}\otimes\vec{v}) + \frac{1}{3!}L^{(3)}_{N\times N^3}(\vec{v}\otimes\vec{v}\otimes\vec{v}) + \ldots \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что полученное уравнение (5) обобщает как модель Ландау начальной турбулентности [1], так и модель конвекционной турбулентности Лоренца [3], поэтому его можно рассматривать в качестве общей модели возникновения и эволюции хаотических волновых процессов в сложных НДС.

Реализация общей модели возникновения и амплитудной стабилизации незатухающих хаотических волновых процессов. Проведенные вычислительные эксперименты с использованием общей модели (5) возникновения хаотических волновых процессов для конкретных типов сложных НДС указывают на тот факт, что конечные незатухающие хаотические колебания наблюдаются лишь при определённых соотношениях между вкладами линейного $L^{(1)}_{N\times N}$, квадратичного $L^{(2)}_{N\times N^2}$, кубического $L^{(3)}_{N\times N^3}$ и т. д. ядер матричного ряда в общую динамику сложной системы. В случае электронной схемы Чжуа модель (5) хаотических волновых процессов принимает следующий вид:

$$\dot{\vec{v}} = L^{(1)}_{3\times3}\vec{v} + \frac{1}{2!}L^{(2)}_{3\times9}(\vec{v}\otimes\vec{v}) + \frac{1}{3!}L^{(3)}_{3\times27}(\vec{v}\otimes\vec{v}\otimes\vec{v}), \qquad (6)$$

поскольку динамика сложной НДС Чжуа точно описывается на основе только линейного, квадратичного и кубического ядер:

$$L^{(1)}_{3\times3}(\vec{u}^*) = \left[\begin{array}{c|c|c} -(3A\alpha u_1^{*2} + C\alpha) & \alpha & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & -\beta & 0 \end{array}\right];$$

$$L^{(2)}_{3\times9}(\vec{u}^*) = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} -6A\alpha u_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right];$$

$$L^{(3)}_{3\times27}(\vec{u}^*) = \begin{bmatrix} -6A\alpha & 00000000000000000000000000 \\ 0 & 00000000000000000000000000 \\ 0 & 00000000000000000000000000 \end{bmatrix}.$$

Более того, вычислительное моделирование сигналов на выходах кубического и квадратичного ядер в хаотических режимах работы схемы Чжуа при выборе параметров системы, равных $\alpha = 15,6$, $\beta = 28$, $A = 0,002$, $C = -1,3$, $u_1^* = -1,5$, выявило подобие их эволюции во времени, но с противоположным знаком и неодинаковой амплитудой (рис. 1).

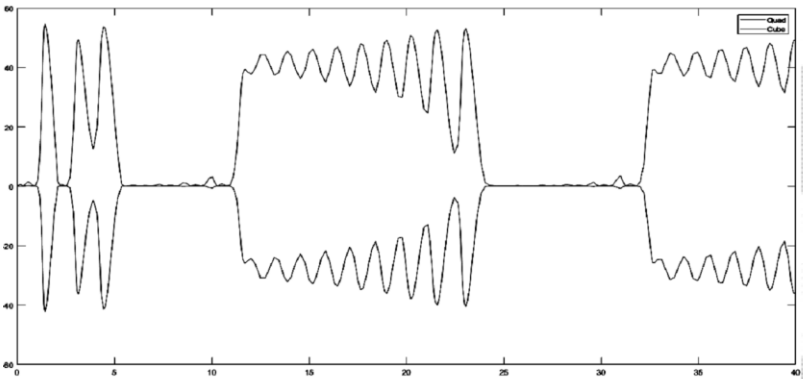

Рис. 1. *Вид сигналов, порождёнными квадратичным $L^{(2)}_{N\times N^2}$ и кубическим $L^{(3)}_{N\times N^3}$ ядрами в общей модели (5) возникновения хаотических волновых процессов в сложной НДС типа схемы Чжуа*

Другими словами, когда электронная схема Чжуа функционирует в хаотическом режиме, выходные сигналы от кубического и квадратичного ядер, находясь в противофазе, частично компенсируют друг друга, что в целом приводит к *стабилизации амплитуды хаотического волнового процесса* к конечной величине. В этом проявляется *эффект самоорганизации процессов* в сложной НДС типа схемы Чжуа, заключающийся во взаимодействии нелинейностей 2-го и 3-го порядков с последующей их синхронизацией.

При таких условиях наблюдается скачкообразный переход от стационарного режима сложной НДС к нестационарному, сопровождающийся возникновением двух частот ω_1 и ω_2, определяющих два цикла в пространстве состояний схемы Чжуа. Полученный результат находит свое объяснение и с точки зрения теории Рюэля–Такенса [4, 6]. При появлении дополнительной частоты ω_3 незначительные возмущения могут разрушить регулярные циклы, образующие тор T^3, и преобразовать его в хаотический аттрактор [5] (например, типа «двойной завиток» в пространстве состояний схемы Чжуа), что и было подтверждено вычислительными экспериментами, результат которых показан на рис. 2.

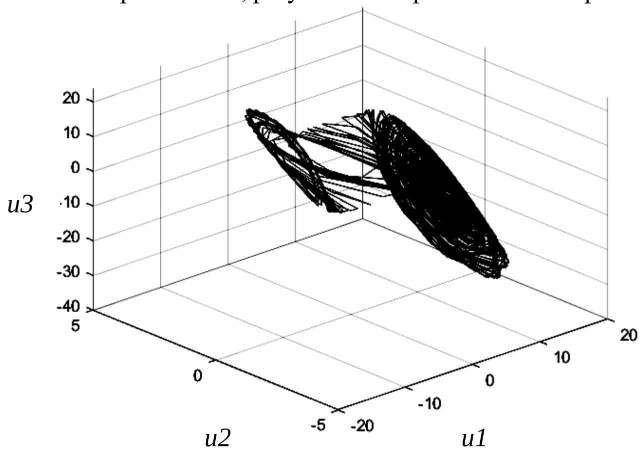

Рис. 2. *Вид хаотического аттрактора типа «двойной завиток» в пространстве состояний схемы Чжуа*

Модель возникновения хаотических волновых процессов в сложной НДС Фитц–Хью [9] имеет вид

$$\dot{\vec{v}} = L^{(1)}_{2\times2}\vec{v} + \frac{1}{2!}L^{(2)}_{2\times4}(\vec{v}\otimes\vec{v}) + \frac{1}{3!}L^{(3)}_{2\times8}(\vec{v}\otimes\vec{v}\otimes\vec{v}), \tag{7}$$

т. е. аналогично системе Чжуа динамика сложной НДС Фитц–Хью также описывается на основе лишь линейного, квадратичного и кубического ядер [8, 9]:

$$L_{2x2}^{(1)}(\vec{u}^*) = \left[\begin{array}{c:c} c - c\,u_1^{*2} & c \\ \hdashline -\dfrac{1}{c} & \dfrac{b}{c} \end{array}\right], \; L_{2x4}^{(2)}(\vec{u}^*) = \left[\begin{array}{c:c:c:c} -2cu_1^* & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$L_{2x8}^{(3)}(\vec{u}^*) = \left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c:c:c} -2c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

В этом случае наблюдается переход от стационарного режима сложной НДС к нестационарному с возникновением сначала частоты ω_1, а затем второй частоты ω_2, в последующем определяющих два цикла хаотического аттрактора в пространстве состояний системы Фитц–Хью.

Выводы. Предложенная модель показала, что эффект самоорганизации в сложной НДС различной физической природы (на примерах гидродинамической, электронной и физиологической систем) заключается во взаимодействии нелинейных процессов высших порядков, приводящей к стабилизации (к конечной величине) амплитуды хаотического волнового процесса.

Благодарность. Работа выполнена в рамках предоставленного гранта Президента Республики Беларусь в науке на 2019 год.

Acknowledgements. This work has been supported by the grant of President of Republic of Belarus in science (2019).

Список использованных источников:

1. Ландау Л. Д. К проблеме турбулентности. *Доклады АН СССР.* 1944. Т. 44, № 8. С. 339–342.
2. Крот А. М. О классе дискретных квазистационарных линейных динамических систем. *Доклады АН СССР.* 1990. Т. 313, № 6. С. 1376–1380.
3. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences.* 1963. Vol.20, March. P. 130–141.
4. Ruelle D. On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics.* 1971. Vol. 20. P. 167–192.
5. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах: От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. М. : Мир, 1979. 512 с.
6. Берже П. Порядок в хаосе: о детерминистском подходе к турбулентности. М. : Мир, 1991. 368 с.
7. Krot A. M. The decomposition of vector functions in vector-matrix series into state-space of nonlinear dynamic system. *EUSIPCO–2000: Proc. X European Signal Processing Conf.*, Tampere, Finland, Sep. 4–8, 2000. Tampere, 2000. Vol. 3. P. 2453–2456.
8. Krot A. M. Matrix decompositions of vector functions and shift operators on the trajectories of a nonlinear dynamical system. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2001. Vol. 4, № 2. P. 106–115.

9. Крот А. М. Анализ аттракторов сложных нелинейных динамических систем на основе матричных рядов в пространстве состояний. *Информатика*. 2004. № 1 (1). С. 7–16.
10. Krot A.M. The development of matrix decomposition theory for nonlinear analysis of chaotic attractors of complex systems and signals. *DSP–2009: Proc. 16th IEEE Intern. Conf. on Digital Signal Processing*, Thira, Santorini, Greece, July 5–7, 2009. Santorini, 2009. P. 1–5. https://doi.org/10.1109/icdsp.2009.5201123

A MODEL OF EVOLUTION OF CHAOTIC WAVE PROCESSES IN COMPLEX DYNAMICAL SYSTEMS ON THE BASIS OF THE MATRIX DECOMPOSITION THEORY

A general model of the origin and evolution of chaotic wave processes in complex systems based on the proposed method of matrix decomposition of operators of nonlinear systems is developed in the article. The proposed model shows that the effect of self-organization in complex systems of different physical nature is based on the interaction of nonlinear processes of higher orders leading to stabilization (to the finite value) of the amplitude of chaotic wave process. Mathematically, this means the synchronous «counteraction» of nonlinear processes of even and odd orders in a general vector-matrix model of a complex system being in a chaotic mode. The implementation of the vector-matrix decomposition by means of computational experiments shows that the model of L. D. Landau describes the scenario of the occurrence of chaotic modes in complex systems quite well. It is noted that the regime of hard self-excitation of nonlinear oscillations in complex systems leads to the appearance of a chaotic attractor in the state-space. Moreover, the proposed vector-matrix model permits to find more general conditions for the origin and evolution of chaotic wave processes and, as a result, to explain the appearance of coherent nonlinear phenomena in complex systems.

Key words: *complex nonlinear dynamical system, state-space, chaotic attractor, matrix series in state-space, general vector-matrix model of chaotic wave processes, mode of hard self-excitation of nonlinear oscillations, stabilization of the amplitude of chaotic process.*

Получено 21.01.2019