УДК 519.853
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.54-60

Ю. П. Лаптин, д-р физ.-мат. наук,
Т. А. Бардадым, канд. физ.-мат. наук
Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины, г. Киев

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТОЧНЫХ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

Предложены упрощенные процедуры уточнения штрафных коэффициентов. Приводятся результаты вычислительных экспериментов на случайно генерируемых задачах линейного программирования.

Ключевые слова: *точные штрафные функции, структурированные задачи оптимизации, методы декомпозиции.*

Введение. Точные штрафные функции давно уже стали общепринятым инструментом решения задач оптимизации. Однако при решении задач большой размерности с использованием схем декомпозиции допустимым подходом оказывается приближенное оценивание штрафных коэффициентов. Для построения упрощенных процедур уточнения штрафных коэффициентов предлагаются вспомогательные задачи. Данный подход развивает результаты, полученные в [1–3].

Рассматриваются задачи, представимые в виде: найти

$$f_0^* = \min\left\{ f_0(x):\ x \in C,\ x \in M \right\}, \tag{1}$$

где $C = \{x : f_i(x) \le 0,\ i = 1,\dots,m,\ x \in R^n\}$, $f_i : R^n \to R$, $i = 0,\dots,m$ — выпуклые функции, M — некоторое (простое) выпуклое множество, $M \subseteq R^n$. В качестве множества M обычно используется положительный ортант пространства R^n, другие множества простой структуры. Положим

$$\Phi_\beta(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i f_i^+(x),\ F_\lambda(x) = f_0(x) + \lambda \cdot h^+(x),$$

$$\lambda, \beta_i \ge 0,\ i = 1,\dots,m,$$

где $f^+(x) = \max\left\{0, f(x)\right\}$, $h(x) = \max\left\{ f_i(x),\ i = 1,\dots,m\right\}$,

$$\Phi_\beta^* = \min\left\{\Phi_\beta(x) : x \in M\right\}, \tag{2}$$

$$F_\lambda^* = \min\left\{F_\lambda(x) : x \in M\right\}. \tag{3}$$

Далее предполагается, что задача (1) имеет решение. Функцию $\Phi_\beta(x)$ (или $F_\lambda(x)$) будем называть точной штрафной функцией, если решения задач (1) и (2) (соответственно (3)) совпадают. Условия, при которых функции $\Phi_{\beta}(x)$ $F_{\lambda}(x)$ являются точными, исследовались, например, в [1].

Оценивание коэффициентов функции $\Phi_{\beta}(x)$. Сформулируем вспомогательные оптимизационные задачи, приближенные решения которых позволяют оценивать значения коэффициентов точных штрафных функций. Под приближенным решением понимается точка допустимого множества вспомогательной задачи, получаемая в результате применения некоторых упрощенных процедур поиска.

Существующие методы негладкой оптимизации, например, r-алгоритм Н. З. Шора [1, 4], мало чувствительны к завышенным значениям коэффициентов штрафных функций, поэтому высокая точность приближенных решений вспомогательных задач не требуется.

Лемма. **[5]** Пусть M — компактное множество, $\tilde{x}$ — решение задачи (2), значения штрафных коэффициентов фиксированы. Заданы числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и последовательность точек $x_k \in M$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к $\tilde{x}$. Пусть каждой x_k по некоторому правилу R_i поставлены в соответствие точки $z_{ki} = R_i(x_k) \in M$, $i = 1, \ldots, m$, такие, что

$$f_i(z_{ki}) \le \left(f_i(x_k) - \delta \right)^+,$$

выполняются неравенства

$$\Phi_{\beta}(x_k) \ge \Phi_{\beta}(z_{ki}) + \varepsilon \left\| z_{ki} - x_k \right\|, \text{ если } f_i(x_k) > 0. \tag{4}$$

Тогда $\tilde{x} \in C$.

Лемма позволяет формулировать процедуры уточнения штрафных коэффициентов при решении задачи (2) каким-либо сходящимся алгоритмом. Пусть правила R_i, $i = 1, \ldots, m$ фиксированы, а на некоторой итерации k для индекса $p \in \{1, \ldots, m\}$ неравенство (4) нарушено. Тогда значение коэффициента β_p необходимо увеличить, чтобы это неравенство выполнялось. Обозначив $\chi_p(x) = f_0(x) + \sum_{i \ne p} \beta_i f_i^+(x)$,

$\zeta_p(z, x_k) = \dfrac{\chi_p(z) + \varepsilon \left\| z - x_k \right\|^2 - \chi_p(x_k)}{f_p^+(x_k) - f_p^+(z)}$, можно получить условие, которому должен удовлетворять коэффициент β_p:

$$\beta_p \ge \zeta_p(z_{kp}, x_k). \tag{5}$$

При нарушении этого условия коэффициент β_p уточняется, т. е. можно полагать $\beta_p = \zeta_p(z_{kp}, x_k)$.

Значение коэффициента β_p существенно зависит от правил $R_i,\ i=1,...,m$. Для выбора правил построения точки $z_{kp}=R_p(x_k)$ в [5] рассматривались различные оценочные задачи, в частности,

$$\min_z \left\{\chi_p(z)+\varepsilon\left\|z-x_k\right\|^2 : z\in \bar{C}_p(x_k)\right\}, \tag{6}$$

$$\min_z \left\{ f_0(z)+\varepsilon\left\|z-x_k\right\|^2 : z\in \bar{C}_p(x_k)\right\}, \tag{7}$$

где

$$\bar{C}_p(x_k)=\{z:\ f_p(z)\le (f_p(x_k)-\delta)^+,\ f_i(z)\le f_i^+(x_k),\ i\ne p,$$
$$i\ne p,\ i=1,...,m, z\in M\}.$$

В качестве точки z_{kp} может использоваться любое допустимое решение задачи (6) или (7). Заметим, что поиск допустимого решения этих задач может представлять существенную проблему. Сужение допустимой области задач (6) или (7) приводит к увеличению соответствующих оптимальных значений (и к увеличению оценок штрафных коэффициентов) и может использоваться для упрощения получаемых задач.

Процедура упрощенного направленного поиска. Будем рассматривать исходную задачу (1) и штрафную функцию $F_\lambda(x)$. Предполагается, что $M=R^n$ и для множества C выполняется условие Слейтера. Для функции $F_\lambda(x)$ и фиксированной точки $x_k\in R^n$ задачу (7) можно записать как

$$\min_z \left\{ f_0(z)+\varepsilon\left\|z-x_k\right\|^2 : h(z)\le \left(h(x_k)-\delta\right)^+\right\}, \tag{8}$$

неравенство (5), которому в данном случае должен удовлетворять коэффициент λ, принимает вид

$$\lambda\ge\zeta(z_k,x_k)=\frac{f_0(z_k)-f_0(x_k)+\varepsilon\left\|z_k-x_k\right\|^2}{h^+(x_k)-h^+(z_k)}, \tag{9}$$

где в качестве точки z_k будем использовать приближенное решение задачи (8).

Будем считать заданной базовую точку $y_0\in C$, такую что $h(y_0)<0$. Для $y\in R^n$ положим

$$z(y)=\arg\min_{t\in R}\left\{ f_0(z)+\varepsilon\left\|z-x_k\right\|^2 : z=y+t(y_0-y), h(z)\le\left(h(x_k)-\delta\right)^+\right\}. \tag{10}$$

Задача одномерного поиска (10) имеет решение при любом y, а точка $z(x_k)$ — это приближенное решение задачи (8). В дальнейшем при определении точки z_k будем использовать приближенное решение $\tilde{z}(x_k)$ задачи (10), для которого выполняется

$$h(\tilde{z}(x_k)) = \left(h(x_k) - \delta\right)^+ , \tag{11}$$

т. е. $z_k = \tilde{z}(x_k)$. Такое правило будем называть **процедурой упрощенного направленного поиска** относительно функции $h\left(x\right)$ и точки x_k. Особенности таких процедур рассматривались в [5].

Процедура проектирования и направленного поиска. Рассмотрим случай, когда допустимое множество исходной задачи (1) имеет вид $C = \{x : Ax = b,\ f_i(x) \le 0,\ i = 1,\dots,m,\ x \in R^n\}$, где A — невырожденная $m_e \times n$-матрица, $b \in R^{m_e}$, m_e — число ограничений-равенств, $m_e < n$. Положим $h_1(x) = \max\left\{\left|A_i x - b_i\right|,\ i = 1,\dots,m_e\right\}$, $h_2(x) = \max\left\{ f_i(x),\ i = 1,\dots,m\right\}$, $h(x) = \max\left\{h_1(x), h_2(x)\right\}$. Будем использовать штрафные функции вида $F_\lambda(x) = f_0(x) + \lambda \cdot h^+(x)$.

Обозначим $X_e = \{x : Ax = b,\ x \in R^n\}$, и рассмотрим задачу проектирования произвольной точки x_k на множество X_e

$$y_e(x_k) = \Pi_{X_e}(x_k) = \arg\min\left\{\frac{1}{2}\left\|x - x_k\right\|^2 : Ax = b,\ x \in R^n\right\}. \tag{12}$$

Решение задачи (12) может быть представлено в виде

$$y_e(x_k) = A^T\left(AA^T\right)^{-1}\left(b - Ax_k\right) + x_k = \bar{b} + \bar{A}x_k ,$$

где $\bar{b} = A^T\left(AA^T\right)^{-1} b$, $\bar{A} = I - A^T\left(AA^T\right)^{-1} A$. Будем предполагать, что задана начальная точка $y_0 \in X_e$, для которой выполняется $h_2(y_0) < 0$. Для уточнения коэффициента λ функции $F_\lambda(x)$ предлагается следующая ***процедура проектирования и направленного поиска:***

Шаг 1. Если $h_1(x_k) \le \left(h(x_k) - \delta\right)^+$, выполнить процедуру упрощенного направленного поиска относительно функции $h_2(x)$ и точки x_k, перейти на шаг 5.

Шаг 2. Определить точку $y_e(x_k) = \Pi_{X_e}(x_k)$ (решить задачу (12)).

Шаг 3. Определить точку y_1 отрезка $\left[y_e(x_k), x_k\right]$, ближайшую к x_k, для которой выполняется $h_1(y_1) = \left(h(x_k) - \delta\right)^+$.

Шаг 4. Выполнить процедуру упрощенного направленного поиска относительно функции $h_2(x)$ и точки y_1.

Шаг 5. Вычислить $\zeta(z_k, x_k)$ в соответствии (9) и, если условие $\lambda \ge \zeta(z_k, x_k)$ не выполняется, увеличить значение λ .

Действия, выполняемые на шагах 2, 3, 4, можно рассматривать как приближенное решение аналога задачи (8) при дополнительном ограничении $z \in aff\,\{a_1, a_2, a_2\}$.

Теорема 1. [5**]** Пусть множество C ограничено, функции f_0 и h_2 удовлетворяют условию Липшица на C . Заданы:

- точка $y_0 \in X_e = \{x : Ax = b\}$, для которой выполняется $h_2(y_0) < 0$,
- последовательность точек, сходящаяся к решению $\tilde{x}$ задачи (3).

Пусть для каждого $k = 1, 2, ...,$ величина $\zeta(z_k, x_k)$ определяется в соответствии с процедурой проектирования и направленного поиска. Тогда существует $\tilde{\zeta} < \infty$, такое, что при выборе $\lambda > \tilde{\zeta}$ штрафная функция $F_\lambda(x)$ — точная.

Для точки y_0 можно полагать $y_0 = \arg\min\,\{h_2(x) : Ax = b\}$.

Вычислительные эксперименты проводились на задачах ЛП:

$$\min\left\{\left\langle c, x\right\rangle : x \in C\right\},$$

где $C = \{x : Ax \le b, A_e x = b_e, -100 \le x^i \le 100, i = 1, ..., n, x \in R^n\}$, $b \in R^m$, $b_e \in R^{m_e}$, $A \in R^{m\times n}$, $A_e \in R^{m_e \times n}$, $m_e < n$, x^i — i -я компонента вектора x . Множество $\{x : Ax \le b,\ x \in R^n\}$ определялось набором m случайных опорных плоскостей к n -мерной сфере с центром в случайной точке x_0 с нормально распределенными координатами и радиусом $r = 1$. Для генерирования таких многогранников использовалась Octave-программа Е. А. Нурминского, приведенная в [6]. Ограничения $A_e x = b_e$ определялись случайными плоскостями, проходящими через точку x_0 . Целевая функция задавалась вектором со случайными коэффициентами. Для решения задачи ЛП использовалась Octave–программа GLPK, что позволяло определять значения двойственных переменных. Для сгенерированной задачи ЛП формировалась штрафная функция $F_\lambda(x)$, для решения задачи безусловной оптимизации (3) использовался r -алгоритм Н. З. Шора [4] (Octave–программа из [7]).

Результаты вычислительных экспериментов по использованию процедуры проектирования и направленного поиска приведены в таблице, где n — число переменных задачи ЛП; m — число ограничений–неравенств; m_e — число ограничений–равенств, λ^* — сумма значений (по абсолютной величине) двойственных переменных, полученных при решении задачи ЛП; $\tilde{\lambda}$ — значение коэффициента λ, полученное при использовании применяемой процедуры уточнения значения штрафного коэффициента; τ — величина сдвига из точки x_0 в направлении случайного вектора p при построении базовой точки $y_0 = x_0 + \tau p$.

В качестве базовой выбиралась точка $y_0(\tau) = x_0 + \tau p$, где $p \in R^n$ — случайный вектор такой, что $Ay_0(\tau) < b$, $A_e y_0(\tau) = b_e$, если $\tau < 1$, при $\tau = 1$ вектор $y_0(\tau)$ принадлежит границе множества C.

Таблица

Результаты вычислительных экспериментов

$m \times n$	m_e	λ^*	$\tilde{\lambda}$			
			$\tau = 0$	$\tau = 0.3$	$\tau = 0.6$	$\tau = 0.9$
20 × 10	3	2.1796	4.5815	6.6127	6.6127	6.6127
100 × 10	3	1.8820	4.6494	4.6494	4.6494	4.6494
100 × 20	7	2.6429	4.6072	4.6072	4.6072	4.6072
100 × 50	17	7.9559	13.476	13.476	16.403	16.403
100 × 100	33	4.8329	27.909	31.711	45.899	45.899
200 × 100	33	8.3726	11.528	11.528	14.239	38.517

Из таблицы следует, что для рассматриваемого класса задач с ограничениями равенствами предложенная процедура проектирования и направленного поиска генерирует приемлемые значения штрафных коэффициентов.

Выводы. Предложены упрощенные процедуры уточнения коэффициентов точных штрафных функций. Приведенные результаты вычислительных экспериментов для задач линейного программирования показали, что штрафные коэффициенты, полученные с использованием предложенных процедур, не слишком сильно отличались от оценок, определяемых оптимальными значениями двойственных переменных.

Рассмотренные процедуры построения приближенных решений вспомогательных задач могут также использоваться для блочных задач со связывающими переменными.

Список использованной литературы:

1. Shor N. Z. Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. Amsterdam ; Dordrecht ; London : Kluwer Academic Publishers. 1998. 381 p.
2. Лаптин Ю. П. Вопросы построения точных штрафных функций. *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика*. 2013. Вып. 4. С. 21–31.
3. Лаптин Ю. П. Точные штрафные функции и выпуклые продолжения функций в схемах декомпозиции по переменным. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. № 1. С. 96–108.

4. Шор Н. З., Журбенко Н. Г. Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов. *Кибернетика*. 1971. № 3. С. 51–59.
5. Лаптин Ю. П., Бардадым Т. А. Проблемы определения коэффициентов точных штрафных функций. *Кибернетика и системный анализ.* 2019.
6. Нурминский Е. А. Проекция на внешне заданные полиэдры. *Вычисл. матем. и матем. физ.* 2008. Т. 48. № 3. С. 387–396.
7. Стецюк П. И. Программа ralgb5 для минимизации овражных выпуклых функций. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем.* 2016. С. 185–197.

ON APPROXIMATE CALCULATION OF THE COEFFICIENTS OF EXACT PENALTY FUNCTIONS

Simplified procedures to specify the penalty coefficients more exactly are proposed. The results of computational experiments on randomly generated linear programming problems are given.

Key words: *exact penalty functions, structured optimization problems, decomposition methods.*

Получено 30.01.2019

УДК 519.9
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.60-64

О. М. Литвин*, д-р фіз.-мат. наук,
О. О. Литвин*, д-р фіз.-мат. наук,
О. В. Ткаченко**, канд. фіз.-мат. наук

*Українська інженерно-педагогічна академія м. Харків,
**ДП «Івченко-Прогрес», м. Запоріжжя

МЕТОД ОДНОЧАСНОГО РІВНОМІРНОГО НАБЛИЖЕННЯ СПЛАЙНАМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ТА ЇХ ПОХІДНИХ

Наведені теореми про найкраще наближення сплайнами тригонометричних функцій та їх похідних, з дотриманням ізогеометричних властивостей.

Ключові слова: *найкраще наближення сплайнами, розривні періодичні сплайни.*

Вступ. На даний час наближення функцій із збереженням ізогеометричних властивостей досліджувалося в багатьох працях Відмітимо, зокрема, роботи [1–5] присвячені наближенню функцій і збереження ізогеометричних властивостей. Використовуються також узагальнені сплайн-функції. У роботах [4, 5] ізогеометричні власти-

