4. Шор Н. З., Журбенко Н. Г. Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов. *Кибернетика*. 1971. № 3. С. 51–59.
5. Лаптин Ю. П., Бардадым Т. А. Проблемы определения коэффициентов точных штрафных функций. *Кибернетика и системный анализ.* 2019.
6. Нурминский Е. А. Проекция на внешне заданные полиэдры. *Вычисл. матем. и матем. физ.* 2008. Т. 48. № 3. С. 387–396.
7. Стецюк П. И. Программа ralgb5 для минимизации овражных выпуклых функций. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем.* 2016. С. 185–197.

ON APPROXIMATE CALCULATION OF THE COEFFICIENTS OF EXACT PENALTY FUNCTIONS

Simplified procedures to specify the penalty coefficients more exactly are proposed. The results of computational experiments on randomly generated linear programming problems are given.

Key words: *exact penalty functions, structured optimization problems, decomposition methods.*

Получено 30.01.2019

УДК 519.9
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.60-64

О. М. Литвин*, д-р фіз.-мат. наук,
О. О. Литвин*, д-р фіз.-мат. наук,
О. В. Ткаченко**, канд. фіз.-мат. наук

*Українська інженерно-педагогічна академія м. Харків,
**ДП «Івченко-Прогрес», м. Запоріжжя

МЕТОД ОДНОЧАСНОГО РІВНОМІРНОГО НАБЛИЖЕННЯ СПЛАЙНАМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ТА ЇХ ПОХІДНИХ

Наведені теореми про найкраще наближення сплайнами тригонометричних функцій та їх похідних, з дотриманням ізогеометричних властивостей.

Ключові слова: *найкраще наближення сплайнами, розривні періодичні сплайни.*

Вступ. На даний час наближення функцій із збереженням ізогеометричних властивостей досліджувалося в багатьох працях Відмітимо, зокрема, роботи [1–5] присвячені наближенню функцій і збереження ізогеометричних властивостей. Використовуються також узагальнені сплайн-функції. У роботах [4, 5] ізогеометричні власти-

 © О. М. Литвин, О. О. Литвин, О. В. Ткаченко, 2019

вості забезпечувалися автоматично формулами інтерлінації із автоматичним збереженням потрібного класу диференційовності.

Зупинимось детальніше на використанні узагальнених сплайнів для наближення функції однієї змінної із збереженням її ізогеометричних властивостей. Як відомо [1], якщо у вузлах сітки $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ задані значення функції $y = f(x)$: $y_i = f(x_i)$ $(i = \overline{0, n})$, то кубічним інтерполяційним сплайном на сітці Δ називається функція $S_3(f, x)$, неперервна на $[a, b]$ разом із своєю першою та другою похідними, яка є кубічним поліномом на кожному з відрізків $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ і задовольняє умови $S_3(f, x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$.

Доведено, що такий сплайн єдиний. Наведемо алгоритм його чисельної побудови. Позначимо $S_3''(f, x_i) = M_i$, $i = \overline{0, n}$. Побудуємо сплайн на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$. Оскільки на цьому відрізку $S_3(f, x)$ — це поліном третього степеня, то його друга похідна є поліномом першого степеня, тобто це лінійна функція, графік якої проходить через точки (x_{i-1}, M_{i-1}) і (x_i, M_i) , $(i = \overline{1, n})$. Користуючись формулою для рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки, можна написати

$$S_3''(f, x) = M_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, h_i = x_i - x_{i-1}. \quad (1)$$

Проінтегруємо двічі рівність (1) і, знайшовши невідомі довільні сталі, що виникають під час інтегрування на відрізку $[x_{i-1}, x_i]$, отримуємо:

$$S'(f, a) = f_a', S'(f, b) = f'_b \quad (2)$$

або

$$S_3''(f, a) = f_a'', S_3''(f, b) = f_b'' \quad (3)$$

Кубічний сплайн на кожному проміжку $[x_i, x_{i+1}]$ сітки є кубічним поліномом, який може бути представлений через значення наближуваної функції і другі похідні на кінцях цього проміжку [a, b]

$$S_3(f, x) = \sigma(x) + \varphi(1-t) h_i^2 M_i + \varphi(t) h_i^2 M_{i+1}, \quad (4)$$

де

$$\sigma(x) = (1-t) f_i + t f_{i+1}, \ \varphi(t) = \frac{t^3 - t}{6}, \ t = \frac{x - x_i}{h_i}, \ M_i = S''(x_i). \quad (5)$$

Невідомі вузлові значення M_i других похідних знаходяться шляхом розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка отримується з умови гладкості сплайна $S_3(f, x)$, відповідних умовам гладкості сплайна класу $S_3(f, x) \in C^2[a, b]$. Відомо [1–3], що у поведінці класичного кубичного сплайна виникають проблеми внаслідок використання функцій *у формулі* $\varphi(t)$ *вище написаної*. Тому в [1–3], використовується функція $\varphi(p,t) \in C^2[0,1]$, яка має вільний параметр p для управління поведінкою сплайна $S_3(f,x)$ і при $p=0$ співпадає з $\varphi(t) = \frac{(t^3-t)}{6}$, що породжує класичний кубічний сплайн.

У роботі пропонується доповнення до методу інтерлінації з автоматичним збереженням ізогеометричних властивостей (монотонного спадання, зростання, опуклості тощо), який досліджується детальніше лише для тригонометричних функцій $\sin 2\pi t$, $\cos 2\pi t$, $0 \le t \le 1$.

Наведені основні твердження методу, основані на використанні основної теореми про найкраще наближення монотонної на інтервалі $[a,b]$ неперервної функції $f(x) \in C[a,b]$ сталою.

Крім того, якщо ми наближуємо $f(x)$ кусково-сталими сплайнами найкращого наближення в нормі $C[a,b]$, то інтеграл від такого сплайна буде сплайном 1-го степеня, який теж дасть найкраще наближення для інтеграла. Тобто наближуючи невідому $f''(x)$ кусково-сталими сплайнами з невідомими значеннями сталих на підінтервалах монотонності, після інтегрування ми отримаємо сплайн 1-го степеня, який найкраще наближує $f(x)$ на $[a,b]$. Далі, інтегруючи цей сплайн 1-го степеня, отримаємо сплайн 2-го степеня, у якому можна вибрати невідомі сталі так, що цей сплайн буде найкраще наближувати $f(x) = \int f'(x)dx + C$.

Наведено аналіз результатів обчислювального експерименту, який підтверджує ефективність запропонованого методу одночасного наближення похідних і функції у припущенні, що нам відомі значення $y_k = f(x_k), k = \overline{1,Q}$, а також інтервали монотонності $f'(x)$ або $f''(x)$.

Означення. Кусково-сталий сплайн [6]

$$S(r,m,t) = \begin{cases} \frac{i}{m}, \; if \;\; t = \frac{1}{2\pi}\arcsin\frac{i}{m}, & i = \overline{0,m}, \\ \frac{i+0,5}{m}, \; if \;\; T_i < t < T_{i+1}, & i = \overline{0,m-1}. \end{cases}$$

Теорема 1. Сплайн $S(-1,n,t)$ будемо називати кусково-сталим сплайном (сплайном степеня 0), який найкраще наближує функцію $y = \sin 2\pi t$ на інтервалі $0 \le t \le 0,25$.

Доведення цієї теореми базується на відомому твердженні: найкраще наближення монотонної на $[a,b]$ функції $f(x)$ сталою C в нормі $C[a,b]$ існує і єдине, і визначається формулою

$$C = \frac{\max\limits_{a \le x \le b} f(x) + \min\limits_{a \le x \le b} f(x)}{2} = \frac{f(a) + f(b)}{2}. \tag{6}$$

При цьому похибка наближення

$$\max\left| f(x) - C \right| \le \frac{M - m0}{2}, \tag{7}$$

де $m0 = \min\limits_{a \le x \le b} f(x)$, $M = \max\limits_{a \le x \le b} f(x)$.

З теореми 1 витікає, що для зменшення похибки наближення в m разів достатньо розбити інтервал монотонності $[a,b]$ на m підінтервалів $\left[x_i\,,\, x_{i+1}\right]$, $i = \overline{0, m-1}$, $x_0 = a$, $x_m = b$, $x_i = a + \frac{b-a}{m} i$ і в кожному з цих підінтервалів наближувати $f(x)$ сталою $C_i = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$. Тоді результуючий сплайн кусково-сталий буде наближувати $f(x)$ в нормі $C[a,b]$ з похибкою $\varepsilon = \frac{\left| f(b) - f(a) \right|}{2m}$. Зауважимо, що точки x_i цього розбиття знаходяться як розв'язки рівнянь $f(x) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{m} i$, $i = \overline{0, m}$, якщо $f(a) < f(b)$ і $f(x) = f(a) - \frac{f(a) - f(b)}{m} i$, $i = \overline{0, m-1}$, якщо $f(a) > f(b)$.

Теорема 2. Сплайн 1-го степеня $S(0,m,t) \in C\left[0, 0.25\right]$, який найкраще наближує $\int f(t)dt + C = -\frac{\cos 2\pi t}{2\pi} + C$, можна представити у вигляді

$$S1(t) = S(0,m,t) = \begin{cases} \int\limits_{x}^{T_m} S0(\tau)d\tau, \quad T_{m-1} \le t \le T_m, \\ \int\limits_{x}^{T_{m-1}} S0(\tau)d\tau + S1(T_{m-1}, \quad T_{m-2} \le t \le T_{m-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \int\limits_{x}^{T_1} S0(\tau)d\tau + S1(T_1), \quad T_0 < t \le T_1. \end{cases} \tag{8}$$

Таким чином, з формули (8) випливає, що $S1(T_m) = 0$, що означає автоматичне виконання відомого співвідношення

$$\left(-\frac{\cos 2\pi t}{2\pi} \right)_{t=0,25} = -\frac{\cos \frac{\pi}{2}}{2\pi} = 0.$$

На рисунку показано графік функції $y = S1(t)$ сплайна 1 степеня, $t \in [0,1]$, який отримується шляхом інтегрування кусково-сталого сплайна найкращого наближення функції $y'(t) = \sin 2\pi t$, $t \in [0,1]$.

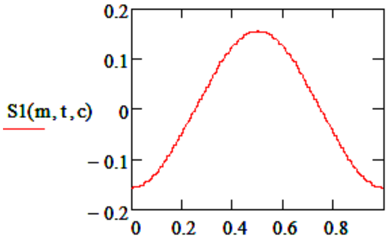

Рисунок.

Висновки. Наведені твердження, які описують метод одночасного рівномірного наближення сплайнами тригонометричних функцій та їх похідних. Показано графік функції, яка отримується шляхом інтегрування кусково-сталого сплайна її похідної.

Список використаних джерел:

1. Квасов Б. И. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006.
2. Spath H. Spline Algorithms for Curves and Surfaces. *Winnipeg: Uni-tas Mathematica Publ*. 1974.
3. Богданов В. В., Волков Ю. С. Выбор параметров обобщённых кубических сплайнов при выпуклой интерполяции. *Сиб. журн. вычисл. математики*. Новосибирск, 2006. Т. 9. № 1. С. 5–22.
4. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Харків : Основа, 2002. 544 с.
5. Сергиенко И. В., Литвин О. Н., Литвин О. О., Ткаченко А. В., Грицай О. Л. Интерлинация эрмитового типа на системе непересекающихся линий (Обзор). *Кибернетика и системный анализ.* 2015. Т. 51, № 2. С. 134–144.
6. Литвин О. М. Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії. *Системний аналіз, управління і інформаційні технології:* Вісн. Харків. держ. політех. ун-ту : зб. наук. праць. 2000. № 125. С. 27–35.

BY THE METHOD OF SIMULTANEOUS UNIFORM APPROXIMATION BY SPLINES OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS AND THEIR DERIVATIVES

Method is presented on the best approximation by splines of trigonometric functions and their derivatives, with respect to isogeometric properties.

Key words: *best approximation by splines, discontinuous periodic splines.*

Одержано 05.02.2019