УДК 519.6
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.78-84

М. О. Недашковський, д-р фіз.-мат. наук

Інститут механіки і прикладної інформатики Університету імені Казимира Великого, м. Бидгощ, Республіка Польща

ОБЧИСЛЕННЯ КОРТЕЖІВ РОЗВ'ЯЗКІВ МАТРИЧНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Наведені схеми для обчислення кортежів розв’язків матричних поліноміальних рівнянь *n*-го порядку.

Ключові слова: *матричні поліноміальні рівняння, кортежі розв’язків.*

Вступ. Розглядаються матричні рівняння загального вигляду

$$A_n X^n + A_{n-1} X^{n-1} + \ldots + A_1 X + A_0 = 0, \qquad (1)$$

де $A_i \in R^{m \times m}$ $(i = \overline{0, n})$ – квадратні ненульові матриці порядку m із дійсними елементами, $X \in R^{m \times m}$ — невідома квадратна матриця.

Найпростіші матричні рівняння розв'язувались ще у другій половині XIX століття [1]. Проблема розкладу на множника глибоко проаналізвана в [2]. Більшість відомих обчислювальних схем описані в [1, 3]. Проте багато задач в цій області ще не розв’язано. Тут зупинимося на схемах обчислення кортежів розв’язків.

Матричні рівняння другого порядку. Розглянемо рівняння

$$AX^2 + BX + C = 0, \qquad (2)$$

де A, B, C і $X \in R^{m \times m}$.

Після перегрупування його членів можна записати

$$X = -\left(B + AX\right)^{-1} C. \qquad (3)$$

На основі (3) можна проводити наступну ітераційну процедуру

$$X_{(i)} = -\left(B + AX_{(i-1)}\right)^{-1} C. \qquad (4)$$

З іншого боку композиція (3) дає наступне розвинення розв’язку (2) в матричний ланцюговий дріб

$$X = -\left(B - A\left(B - A\left(B - A\left(B - \ldots\right)^{-1} C\right)^{-1} C\right)^{-1} C\right)^{-1} C\ . \qquad (5)$$

Існує й інша схема побудови ітераційного методу для обчислення X. У припущенні, що існують обернені матриці A^{-1}, X^{-1} можна для (2) записати рекурентну формулу

$$X = -A^{-1} \cdot B - A^{-1} \cdot C \cdot X^{-1}. \quad (6)$$

Рівність (6) може бути використана для ітераційного процесу

$$X_{(i)} = -A^{-1} \cdot B - A^{-1} \cdot C \cdot X_{(i-1)}^{-1}.$$

А композиція (6) дає інше розвинення X в неперервний дріб

$$X = -A^{-1}B - A^{-1}C(-A^{-1}B - A^{-1}C(-A^{-1}B - ...)^{-1})^{-1})^{-1}, \quad (7)$$

яке може бути збіжне до іншого розв'язку.

Симетричне квадратне рівняння 2-го порядку. Нехай тепер

$$AX + XB + XFX + C = 0, \quad (8)$$

де A, B, C, F і X є матрицями розміру $m \times m$.

Перегрупувавши його члени можна записати

$$X = -F^{-1}B + (A + XF)^{-1} \cdot (AF^{-1}B - C). \quad (9)$$

Із (9) отримуємо ітераційну формулу для обчислення X

$$X_{(i)} = -F^{-1}B + (A + X_{(i-1)}F)^{-1} \cdot (AF^{-1}B - C).$$

На основі (9) можна також подати розв'язок у вигляді МЛД

$$X = -F^{-1}B + (A + (-F^{-1}B + ...) \cdot F)^{-1}(AF^{-1}B - C)) \cdot F)^{-1} \cdot (AF^{-1}B - C). \quad (10)$$

З іншого боку, для рівняння (8) маємо

$$X = -AF^{-1} + (AF^{-1}B - C) \cdot (FX + B)^{-1}. \quad (11)$$

Із рівняння (11) можна також записати рекурентну формулу для обчислення X

$$X_{(i)} = -AF^{-1} + (AF^{-1}B - C) \cdot (FX_{(i-1)} + B)^{-1}.$$

На основі (11) отримуємо ще один розв'язок рівняння у вигляді МЛД

$$X = -AF^{-1} + (AF^{-1}B - C) \cdot (F \cdot (-AF^{-1} +$$
$$+(AF^{-1}B - C) \cdot (F \cdot (-AF^{-1} + ...) + B)^{-1}) + B)^{-1}.$$

Дискретне рівняння Ріккаті. Розглянемо тепер відоме в застосуваннях [1] рівняння виду:

$$A^T XA - X - A^T XB(R + B^T XB)^{-1} B^T XA + Q = 0; \quad (12)$$

де A, B, C, R, Q і X — матриці розмірністю $m \times m$.

В результаті перетворень для рівняння (12) можна записати

$$X = Q + A^T \left(A^{-1}BR^{-1}B^T + A^{-1}X^{-1} \right)^{-1}. \quad (13)$$

Цей вираз можна використати для ітераційного обчислення X :

$$X_{(i)} = Q + A^T \left(A^{-1}BR^{-1}B^T + A^{-1}X_{(i-1)}^{-1} \right)^{-1}. \quad (14)$$

На основі (14) отримуємо розв'язок у вигляді двоперіодичного МЛД

$$X = Q + A^T (A^{-1}BR^{-1}B^T + A^{-1}(Q + A^T (A^{-1}BR^{-1}B^T +$$
$$+A^{-1}(Q + A^T (A^{-1}BR^{-1}B^T + ...)^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1}. \quad (15)$$

З іншого боку для рівняння (12) можна одержати:

$$X = Q + [B^T (A^T)^{-1} + RB^{-1} X^{-1} (A^T)^{-1}]^{-1} RB^{-1} A. \qquad (16)$$

На підставі (16) маємо ітераційну формулу для обчислення розв'язку

$$X_{(i)} = Q + [B^T (A^T)^{-1} + RB^{-1} X_{(i-1)}^{-1} (A^T)^{-1}]^{-1} RB^{-1} A.$$

Із (16) отримується інше розвинення розв'язку у двоперіодичній МЛД

$$\begin{aligned} X = Q + (B^T (A^T)^{-1} + RB^{-1}(Q + (B^T (A^T)^{-1} + \\ + RB^{-1}(Q + \ldots)^{-1} (A^T)^{-1})^{-1} RB^{-1} A)^{-1} (A^T)^{-1})^{-1} RB^{-1} A. \end{aligned} \qquad (17)$$

Таким чином, для кожного з розглянутих рівнянь (2), (8), (12) може бути побудовані свої особливі схеми розвинення розв'язків у МЛД, які дають на практиці кортежі розв'язків.

Матричні рівняння n -го порядку. Виявляється, у цьому випадку можна побудувати деяку загальну схему. Нехай маємо рівняння

$$X^n + A_{n-1} X^{n-1} + A_{n-2} X^{n-2} + \ldots + A_1 X + A_0 = 0, \qquad (18)$$

де матриці $A_i \in \mathrm{R}^{m \times m}$ $(i = \overline{0, n-1})$, $X \in R^{m \times m}$, а $n \geq 2$ — ціле число.

Виявляється, що розв'язок рівняння (18) може бути у вигляді одноперіодичного гіллястого МЛД із $n-1$ вітками розгалуження

$$X = P_0 + \sum_{k=1}^{n-1} P_k (P_0 + \sum_{k=1}^{n-1} P_k (P_0 + \sum_{k=1}^{n-1} P_k (\ldots - Q_k)^{-1} X - Q_k)^{-1} - Q_k)^{-1}. \qquad (19)$$

Він отримується композицією дробово-лінійних виразів вигляду

$$X = P_0 + \sum_{k=1}^{n-1} P_k (X - Q_k)^{-1}, \qquad (20)$$

де $P_k \in R^{m \times m}$ та $Q_k \in R^{m \times m} (k = \overline{0, n-1})$ — квадратні матриці, елементи яких $p_{i,j,k} (i, j = \overline{1, m})$ та $q_{i,j,k} (i, j = \overline{1, m}; k = \overline{1, n-1})$ визначаються із системи рівнянь

$$(-1)^{n-1} Q_1 Q_2 \ldots Q_{n-1} + P_0 = A_1,$$

$$(-1)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{l=1}^{k-1} Q_l \prod_{l=k+1}^{n-1} Q_l - \sum_{k=1}^{n-1} P_k + (-1)^{n-1} P_0 Q_1 Q_2 \ldots Q_{n-1} = A_2;$$

$$\begin{aligned} (-1)^{n-2} \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{l=k+1}^{n-2} (1 - \delta_{kl}) \prod_{r=1}^{k-1} Q_k \prod_{r=k+1}^{l-1} Q_r \prod_{r=l+1}^{n-2} Q_r + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} P_k \prod_{r=1}^{k-1} Q_r \prod_{r=k+1}^{n-1} Q_r + (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{r=1}^{k-1} P_0 Q_r = A_3; \end{aligned}$$

. . . .

$$\sum_{k=1}^{n-1} Q_k + \sum_{k=2}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n-1} P_1 Q_k Q_l + \ldots + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n-1}(1-\delta_{kr})P_r Q_k Q_l +$$

$$+\ldots+(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{r=1}^{k-1} P_{n-1} Q_k Q_l = A_{n-1};$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} P_1 Q_k + \ldots + \sum_{k=1}^{n-1}(1-\delta_{kr})P_r Q_r + \ldots + \sum_{k=1}^{n-2} P_{n-1} Q_k + \sum_{k=1}^{n-1} P_0 Q_k = A_0.$$

Якщо покласти $Q_k = q_k \cdot E$ $(k = \overline{1, n-1})$ і надати усім q_k попарно різні конкретні числові значення, то остання система n матричних рівнянь стане лінійною відносно невідомих P_i для всіх $(i = \overline{0, n-1})$ і буде мати єдиний розв'язок. Для обчислення числового значення розв'язку X на ОС рекурентна формула (20) переписується у вигляді

$$X_{(i)} = P_0 + \sum_{k=1}^{n-1} P_k (X_{(i-1)} - Q_k)^{-1}. \qquad (21)$$

Неканонічне матричне поліноміальне рівняння n-го порядку. Введемо тепер до розгляду

$$X^n + X^{n-1}A_{n-1} + X^{n-2}A_{n-2} + \ldots + XA_1 + A_0 = 0, \qquad (22)$$

де матриці $A_i \in \mathrm{R}^{m\times m}$ $(i = \overline{0, n-1})$, $X \in R^{m\times m}$, а $n \geq 2$ — ціле число.

Для рівняння (22) розв'язок теж може бути записаний у вигляді одноперіодичного гіллястого МЛД із $n-1$ вітками розгалуження

$$X = P_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(P_0 - Q_k + \ldots + \sum_{k_s=1}^{n-1}(P_0 - Q_{k_s} + \ldots P_{k_s})^{-1} P_{k_1})^{-1} P_k.$$

Він отримується композицією дробово-лінійних виразів вигляду

$$X = P_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(X - Q_k)^{-1} P_k, \qquad (23)$$

де $P_k \in R^{m\times m}$ та $Q_k \in R^{m\times m}$ $(k = \overline{0, n-1})$ — квадратні матриці, елементи яких $p_{i,j,k}$ $(i, j = \overline{1, m})$ та $q_{i,j,k}$ $(i, j = \overline{1, m}; k = \overline{1, n-1})$ визначаються із системи рівнянь:

$$(-1)^{n-1} Q_1 Q_2 \ldots Q_{n-1} + P_0 = A_1;$$

$$(-1)^{n-2}\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{l=1}^{k-1} Q_l \prod_{l=k+1}^{n-1} Q_l - \sum_{k=1}^{n-1} P_k + (-1)^{n-1} Q_1 Q_2 \ldots Q_{n-1} P_0 = A_2;$$

$$(-1)^{n-2}\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n-2}(1-\delta_{kl})\prod_{r=1}^{k-1} Q_k \prod_{r=k+1}^{l-1} Q_r \prod_{r=l+1}^{n-2} Q_r +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{r=1}^{k-1}Q_r\prod_{r=k+1}^{n-1}Q_rP_k+(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{r=1}^{k-1}Q_rP_0=A_3;$$

. . ..

$$\sum_{k=1}^{n-1}Q_k+\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n-1}Q_kQ_lP+...+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n-1}(1-\delta_{kr})Q_kQ_lP_r+$$

$$+....+(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{r=1}^{k-1}Q_kQ_lP_{n-1}=A_{n-1},$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}Q_kP_1+....+\sum_{k=1}^{n-1}(1-\delta_{kr})Q_rP_r+...+\sum_{k=1}^{n-2}Q_kP_{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}Q_kP_0=A_0.$$

Якщо покласти $Q_k = q_k \cdot E \quad (k=\overline{1,n-1})$ і надати усім q_k попарно різні конкретні числові значення, то остання система n матричних рівнянь стане лінійною відносно невідомих P_i для всіх $(i=\overline{0,n-1})$ і буде мати єдиний розв'язок. Для обчислення розв'язку X на ОС рекурентну формулу (23) слід переписати у вигляді:

$$X_{(i)}=P_0+\sum_{k=1}^{n-1}(X_{(i-1)}-Q_k)^{-1}P_k. \tag{24}$$

Для неформального розв'язання і дослідження усіх розглянутих рівнянь треба додатково проводити дослідження збіжності до розв'язку і стійкості відповідних гіллястих МЛД.

Умови закінчення ітераційного процесу при розв'язанні матричних рівнянь гіллястими ланцюговими дробами. Тепер розглянемо ознаки збіжності ітераційного процесу до розв'язку та обґрунтування критеріїв закінчення обчислення розв’язків матричних рівнянь із застосуванням апарату гіллястих МЛД. Якщо співставити між собою вирази (16), (20) і (23), то неважко зауважити, що всі матричні ланцюгові дроби ними утворені є частковим випадком наступного закону композиції

$$X_{(i)}=P_0+\sum_{k=1}^{n-1}P_k(X_{(i-1)}-Q_k)^{-1}R_k. \tag{25}$$

Власне самі ознаки збіжності для гіллястих МЛД вже подані [4], але важливе ще і одержання надійних критеріїв закінчення ітерацій та збіжності процесу саме до розв'язку конкретного рівняння.

Ознаки збіжності матричних гіллястих ланцюгових дробів до розв’язків. Припускається, що розв'язок цього рівняння на деякому інтервалі знаходиться за ітераційною процедурою вигляду

$$X_{(i+1)}=P_0+\sum_{k=1}^{n-1}P_k(-Q_k+X_{(i)})^{-1}R_k. \tag{25}$$

Матричні елементи P_0, P_k, Q_k, R_k $(k = \overline{1, n-1})$ визначаються із системи лінійних рівнянь складеної із коефіцієнтів даного рівняння. Тоді розв'язок $X = \lim\limits_{i \to \infty} X_{(i)}$ може бути поданий як розвинення у нескінчений одноперіодичний матричний ланцюговий дріб

$$X = P_0 + \sum_{k=1}^{n-1} P_k (P_0 - Q_k + \sum_{k=1}^{n-1} P_k (P_0 - Q_k + ...R_k)^{-1} R_k)^{-1} R_k. \qquad (26)$$

Звичайно, цей дріб буде збіжним, і тим більше, збіжним до розв’язу лише за певних умов. Для вивчення проблеми збіжності до розв'язку подібних розвинень, розглянемо далі неканонічний МГЛД

$$D = b_0 + \underset{s=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{k_{(s)}=1}^{n} a_{k_{(s)}} b_{k_{(s)}}^{-1} c_{k_{(s)}} \qquad (27)$$

та сформулюємо критерії для прийняття рішення про закінчення ітерацій та збіжності процесу саме до розв'язку конкретних рівнянь.

Теорема 1. Якщо в інтервалі $[-n, n]$ існує, причому лише один розв'язок поліноміального матричного рівняння то його розвинення (26) за ітераційною процедурою (25) у МГЛД з елементами, що задовольняють умовам [4]

$$\left\| b_{k(s)}^{-1} \right\| \le \frac{1}{\left\| a_{k(s)} \right\| \left\| c_{k(s)} \right\| + n} (1 \le k_s \le n; s = 1, 2, 3, ...) \qquad (28)$$

збігається до цього розв'язку.

Теорема 2. Якщо в інтервалі $\left[-\sum_{k_1=1}^{n} \left\| a_{k_1} \right\| \left\| c_{k_1} \right\|, \sum_{k_1=1}^{n} \left\| a_{k_1} \right\| \left\| c_{k_1} \right\| \right]$ існує, причому лише один розв'язок поліноміального матричного рівняння, то його розвинення (26) за ітераційною процедурою (25) у МГЛД з елементами, що задовольняють умовам [4]

$$\left\| b_{k_{(s)}}^{-1} \right\| \le \frac{1}{1 + \sum_{k_{s+1}=1}^{n} \left\| a_{k_{(s+1)}} \right\| \left\| c_{k_{(s+1)}} \right\|}, \ (s = 1, 2, 3...) \qquad (29)$$

збігається до цього розв'язку.

Слід зауважити, що на практиці ітераційні процеси обчисленя $X_{(k)}$ нерідко є збіжними при значно менш жорстких умовах. Так в одному з тестових рівнянь 3-го порядку виду (22) $\left\| Q_0^{-1} \right\| = 0.09671109$ в той же час $1/(1 + \left\| P_1 \right\| + \left\| P_2 \right\|) = 0,003842229$. Тобто, умова збіжності не виконується навіть наближено. Але процес обчислення розв'язку все одно достатньо швидко збігається і для різних наборів Q_i $(i=\overline{1,n})$ вдається обчислити кортеж із 4-х розв'язків.

Висновки. Отже, наведені підходи для обчислення кортежів розв'язків матричних поліноміальних рівнянь, сформульовано достатні критерії закінчення ітераційних процесів та збіжності їх до розв'язку.

Список використаних джерел:

1. Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений. М. : Наука, 1984. 192 с.
2. Казимірський П. С. Розклад матричних многочленів на множники. Київ : Наук. думка, 1983. 247 с.
3. Кублановская В. Н. К спектральной задаче для полиномиальных пучков матриц. *Зап. науч. семинаров Ленигр. отд. Мат. ин-та АН СССР*, 1978. Т. 80. С. 83–97.
4. Недашковський М. О. Ознаки збіжності матричних гіллястих ланцюгових дробів. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* Львів, 2003. Т. 46, № 4. С. 50–56.

CALCULATION OF CORTEGES OF SOLUTIONS OF MATRIX POLYNOMIAL EQUATIONS

The schemes are presented for calculating the corteges of solutions of matrix polynomial equations.

Key words: *matrix polynomial equations, corteges of solutions.*

Одержано 21.01.2019