УДК 519.6
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.98-104

Ю. І. Першина*, д-р фіз.-мат. наук,
В. О. Пасічник**, канд. техн. наук

*Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків,
**Харківська державна академія дизайну і мистецтв, м. Харків

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ВІДНОВЛЕННЯ РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ МЕТОДОМ МІНІМАКСА

Запропоновано метод, за допомогою якого можна наблизити функції однієї та двох змінних з розривами першого роду в точках чи на лініях розривними апроксимаційними сплайнами. У двовимірному випадку область визначення досліджуваної функції розбивається на прямокутні елементи. Для розв'язування цієї задачі в даній роботі будується розривний білінійний апроксимаційний сплайн, невідомі параметри якого знаходяться методом мінімакса, тобто будується такий сплайн, який на кожному інтервалі чи прямокутному елементі має найменше максимальне відхилення від наближуваної функції. Як експериментальні дані виступають односторонні границі досліджуваної функції у заданих вузлах. Запропонований метод дозволяє уникати явище Гіббса, яке виникає при наближенні розривних функцій класичними неперервними конструкціями. В роботі детально описаний чисельний експеримент, який підтверджує ефективність запропонованого методу. Автори вважають перспективним розвиток теорії наближення розривних функцій багатьох змінних розривними сплайнами та побудову математичних моделей розривних процесів на основі розробленої теорії, оскільки існує багато практично важливих наукових та технічних галузей, в яких об'єкти дослідження математично описуються розривними. В подальшому планується узагальнити цей метод на випадок, коли вузли розривного сплайну не співпадають з точками розриву досліджуваної функції. Запропонований метод можна буде використати для відновлення внутрішньої структури об'єктів, що мають різну щільність, в медичних, геологічних, космічних та інших дослідженнях; в методах цифрової радіографії, обчислювальної томографії для визначення місця розташування і геометричних розмірів прихованих дефектів у контрольованому виробі, а також для контролю виробів у реальному масштабі часу його технологічного виготовлення.

Ключові слова: *розривні функції, розривний сплайн, апроксимація, інтерполяція, мінімакс*.

Вступ. Існує багато практично важливих наукових та технічних галузей, в яких об'єкти дослідження математично описуються величинами, що зазнають розрив. Такі об'єкти часто виникають у задачах, які використовують дистанційні методи і, зокрема, в задачах томографії. В багатьох задачах геофізики встановлення місця розташування границь, що розділяють блоки з різними фізичними властивостями, є першим етапом у подальших дослідженнях, направлених на визначення фізичних величин, що характеризують внутрішню будову Землі. В комп'ютерній томографії при дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність у різних частинах тіла.

Той факт, що на сьогоднішній день не існує загальної теорії описів вказаних явищ та процесів, говорить про актуальність створення теорії наближення розривних функцій розривними конструкціями та розробки методів виявлення точок або ліній розриву функції.

Аналіз останніх досліджень. Задача наближення неперервних функцій неперервними сплайнами з достатньою повнотою описана у багатьох роботах. Існують багато технічних задач, в яких наближуюча функція не обов'язково є гладкою, іноді допустима її розривність — лише б похибка наближення була достатньо мала. Наближення такого типу раніше детально не розглядалося, існують тільки підходи до розв'язання такого типу задач, які працюють для частинних випадків. Існують методи розв'язання крайових задач з розривними розв'язками, в розвиток яких внесли значний вклад такі вчені, як І. В. Сергієнко, В. С. Дейнека, В. В. Скопецький, О. М. Литвин та інші [1]. У роботі А. Л. Агеева, Т. В. Антонової [2] запропонований метод визначення числа точок розриву та їх положення на основі використання явища Гіббса. Але для цього потрібна додаткова інформація: найменша та найбільша величини стрибків наближуючої функції. Крім того припускається, що інтервали, в яких знаходяться явища Гіббса, не перетинаються, тобто неможливо відділити точки розриву, що знаходяться близько один від одного. У роботі [3] розроблені методи відновлення ліній розриву за допомогою вейвлетів. Ці методи відновлення використовують полігармонійні вейвлети, які мають нескінченний носій. Такого типу конструкції, узагалі кажучи, можуть привести до згладжування сигналу, який досліджується, і вимагати додаткового аналізу отриманих результатів. У роботі автори пропонують загальну теорію побудови розривних сплайнів, множина яких, як частинний випадок, включають множину неперервних та неперервно-диференційовних до заданого порядку сплайнів, які можуть мати розриви першого роду в заданих точках або на заданій множині ліній ε -границь елементів.

У роботі [4] авторами запропонований метод відновлення розривної лінійної функції однієї змінної та алгоритм виявлення точок ε -розриву. В статті [5] запропонований метод наближення розривної функції однієї змінної розривним сплайном, використовуючи метод мінімакса. Дана робота присвячена узагальненню статті [5] на випадок наближення розривної функції двох змінних.

Метод наближення розривної функції однієї змінної. Нехай задано функцію однієї змінної $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ з можливими розривами першого роду в точках x_k, $k=\overline{1,n-1}$. Припускаємо, що хоча б в одному вузлі x_k функція має розрив. Задані вузли розбивають інтервал $[a,b]$ на $n-1$ частин.

Визначення 1. Розривним інтерполяційним лінійним сплайном на відрізку $[x_k, x_{k+1}], k=\overline{1,n-1}$ називається функція:

$$S(x) = Sp_k(x,C) = C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k},\ k=\overline{1,n-1}, \qquad (1)$$

де C_k^+, C_{k+1}^-, $k=\overline{1,n-1}$ — параметри сплайну $S(x)$, що визначаються у вигляді односторонніх границь

$$C_k^+ = \lim_{x \to x_k + 0} f(x),\quad C_{k+1}^- = \lim_{x \to x_{k+1} - 0} f(x).$$

Треба знайти такі параметри C_k^+, C_{k+1}^-, $k=\overline{1,n-1}$ у сплайні (1), щоб наближення було найкращим у тому чи іншому сенсі. Для розв'язування цієї задачі використовуємо методом мінімакса.

Сплайном найкращого наближення будемо вважати сплайн, який на кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{1,n-1}$ має найменше максимальне відхилення від наближуваної функції $f(x)$.

Теорема 1. Якщо на кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{1,n-1}$ невідомі параметри C_k^+, C_{k+1}^-, $k=\overline{1,n-1}$ знаходити з умови

$$\max_{1 \le k \le n-1} \left| f(x) - Sp_k(x) \right| \to \min_C, \qquad (2)$$

то отримаємо розривний сплайн найкращого наближення.

Теорема 2. Якщо наближувана функція $f(x)$ є розривною лінійною функцією з точками розриву $x = x_k, k=\overline{1,n}$ і наближуємо її лінійним розривним сплайном $S(x)$, що визначається формулами (1), і невідомі параметри-елементи C_k^+, C_{k+1}^-, $k=\overline{1,n-1}$ знаходимо з умови (2), то отримаємо точно наближувану функцію, тобто $S(x) = f(x)$.

Точки розриву функції збігаються з точками розриву наближувального сплайна і найкраще наближення сплайна до функції виконуємо аналітично. На кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{1,n-1}$ знаходимо максимальне значення відхилення сплайна від функції, яке буде дорівнювати одному із значень:

$$J_{[x_k,x_{k+1}]}(C)=\max_{[x_k,x_{k+1}]}\{\left|f_k(x_k)-Sp_k(x_k,C)\right|,\left|f_k(x_{k+1})-Sp_k(x_{k+1},C)\right|,$$
$$\left|f_k(a_2)-Sp_k(a_1,C)\right|,\ldots,\left|f_k(a_m)-Sp_k(a_m,C)\right|\}, \tag{3}$$

де a_l, $l=\overline{1,m}$ — стаціонарні точки функції $J_k(x,C)=f_k(x)-Sp_k(x,C)$ на інтервалі $[x_k,x_{k+1}]$, $k=\overline{1,n-1}$.

Потім знаходимо мінімум від отриманого максимуму по всіх інтервалах:

$$W=\min_{1\le k\le n-1}(J_{[x_k,x_{k+1}]}(C))=\min_{1\le k\le n-1}(\max_{a\le x\le b}\left|f(x)-Sp_k(x,C)\right|).$$

Отримуємо матрицю W, яка і представляє собою шукану матрицю параметрів C_k^+,C_{k+1}^-, $k=\overline{1,n-1}$.

Метод наближення розривної функції двох змінних. Нехай в області $D=[0,1]^2$ задано розривну функцію $f(x,y)$ та деяке розбиття на елементи (прямокутники) $\Pi_{i,j}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$, $0=x_1<$ $<x_2<\ldots<x_m=1$, $0=y_1<y_2<\ldots<y_n=1$. Вважаємо, що в кожній точці (x_i,y_j) може бути задано чотири різних значення досліджуваної функції:

$$C_{i,j}^{++}=\lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j+0}}f(x,y),\ C_{i,j}^{-+}=\lim_{\substack{x\to x_i-0\\ y\to y_j+0}}f(x,y),$$
$$C_{i,j}^{+-}=\lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j-0}}f(x,y),\ C_{i,j}^{--}=\lim_{\substack{x\to x_i-0\\ y\to y_j-0}}f(x,y).$$

Визначення 2. Будемо називати розривним білінійним інтерполяційним сплайном на прямокутній сітці сплайн вигляду

$$S(x,y)=p_{ij}(x,y,C)=C_{i,j}^{++}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}}+C_{i+1,j}^{-+}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}}+$$
$$+C_{i,j+1}^{+-}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}+C_{i+1,j+1}^{--}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}, \tag{4}$$
$$(x,y)\in\Pi_{i,j}, i=\overline{1,m-1},\ \ j=\overline{1,n-1}.$$

Треба знайти такі параметри: $C_{i,j}^{++},C_{i,j}^{-+}$, $C_{i,j+1}^{+-},C_{i,j+1}^{--}$ у сплайні (1), щоб наближення було найкращим у тому чи іншому сенсі. Для розв'язування цієї задачі використовуємо методом мінімакса [6].

Теорема 3. Якщо на кожному з прямокутних елементів $\Pi_{i,j}$, $i=\overline{1,m-1}$, $j=\overline{1,n-1}$ невідомі параметри $C_{i,j}^{++},C_{i,j}^{-+}$, $C_{i,j+1}^{+-},C_{i,j+1}^{--}$ знаходити з умови

$$\max_{\substack{1\le i\le m-1\\ 1\le j\le n-1}} \left| f(x,y) - p_{ij}(x,y) \right| \to \min_{C}, \qquad (5)$$

то отримаємо розривний сплайн найкращого наближення.

Теорема 4. Якщо наближувана функція $f(x,y)$ є розривною лінійною функцією з лініями розриву $x = x_i, i = \overline{1,m},\ y = y_j, j = \overline{1,n}$ і наближуємо її лінійним розривним сплайном $S(x,y)$, що визначається формулами (4), і невідомі параметри-елементи $C_{i,j}^{++}, C_{i,j}^{-+}, C_{i,j+1}^{+-}, C_{i,j+1}^{--}$ знаходимо з умови (5), то отримаємо точно наближувану функцію, тобто $S(x,y) = f(x,y)$.

Точки розриву функції збігаються з точками розриву наближуваного сплайна. Знайдемо найкраще наближення сплайна до функції. На кожному з прямокутних елементів $\Pi_{i,j},\ i = \overline{1,m-1},\ j = \overline{1,n-1}$ знаходимо максимальне значення відхилення сплайна від функції, яке буде дорівнювати одному із значень:

$$J_{\Pi_{i,j}}(C) = \max_{\substack{[x_i, x_{i+1}]\\ [y_j, y_{j+1}]}} \{ \left| f(x_i, y_j) - p_{ij}(x_k, y_j, C) \right|, \left| f(x_i, y_{j+1}) - p_{ij}(x_i, y_{j+1}, C) \right|,$$
$$\left| f(x_{i+1}, y_j) - p_{ij}(x_{i+1}, y_j, C) \right|, \left| f(x_{i+1}, y_{j+1}) - p_{ij}(x_{i+1}, y_{j+1}, C) \right|$$
$$\left| f(D_1) - p_{ij}(D_1, C) \right|, \ldots, \left| f(D_k) - p_{ij}(D_k, C) \right|,\ \left| f(B_1) - p_{ij}(B_1, C) \right|, \ldots, \qquad (6)$$
$$\left| f(B_\ell) - p_{ij}(B_\ell, C) \right| \},$$

де $D_k,\ k = \overline{1,(m-1)\cdot(n-1)}$ — стаціонарні точки функції $J_{\Pi_{ij}}(x,y,C) = f(x,y) - p_{ij}(x,y,C)$ всередині прямокутного елемента $\Pi_{i,j},\ i = \overline{1,m-1},\ j = \overline{1,n-1}$, $B_\ell,\ \ell = \overline{1,L}$ — критичні точки функції $J_{\Pi_{ij}}(x,y,C)$ на сторонах прямокутного елемента $\Pi_{i,j},\ i = \overline{1,m-1}$, $j = \overline{1,n-1}$, L — кількість критичних точок.

Потім знаходимо мінімум від отриманого максимуму по всіх прямокутних елементах:

$$W = \min_{\substack{1\le i\le m-1\\ 1\le j\le n-1}} (J_{\Pi_{ij}}(C)) = \min_{\substack{1\le i\le m-1\\ 1\le j\le n-1}} (\max_{x\in D} \left| f(x,y) - p_{ij}(x,y,C) \right|).$$

Отримуємо матрицю W, яка і представляє собою шукану матрицю параметрів $C_{i,j}^{++}, C_{i,j}^{-+}, C_{i,j+1}^{+-}, C_{i,j+1}^{--}$.

Приклад. Нехай задано функцію $f(x,y)$, яка є нелінійною, на області $[0;\pi]\times[0;1]$ з однією лінією розриву:

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\ 0\le y\le 1,\\ \sin(x+y), & \dfrac{\pi}{2}< x\le \pi,\ 0\le y\le 1. \end{cases}$$

Обираємо сітку вузлів: $x_1=0,\ x_2=-\pi/2, x_3=\pi$, $y_1=0,\ y_2=1$. Наближуємо сплайном вигляду (4). У цьому випадку маємо дві точки, в яких побудована функція має розриви першого роду:

$$f^{-+}\left(\frac{\pi}{2};0\right)=1,57;\ f^{++}\left(\frac{\pi}{2};0\right)=0;\ f^{--}\left(\frac{\pi}{2};1\right)=2,57;\ f^{+-}\left(\frac{\pi}{2};1\right)=-0.9.$$

За допомогою системи комп'ютерної математики MathCad була отримана наступна матриця коефіцієнтів:

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 1.57 & 1 & 2.57\\ 0 & 0 & -0.9 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

Тобто найкраще наближення заданої функції $f(x,y)$ має вигляд:

$$S(x,y)=\begin{cases} x+y, & (x,y)\in \Pi_{11},\\ 1,16xy-2,73y, & (x,y)\in \Pi_{21}. \end{cases}$$

Висновки. Таким чином, в роботі запропонований метод, за допомогою якого можна наблизити функцію однієї та двох змінних з розривами першого роду розривним сплайном, використовуючи метод мінімакса. В подальшому планується узагальнити цей метод на випадок, коли вузли сплайна не співпадають з точками розриву функції.

Як вже зазначалося, цей метод можна буде використати для відновлення внутрішньої структури об'єктів, що мають різну щільність, у медичних, геологічних, космічних та інших дослідженнях.

Список використаних джерел:

1. Дейнека В. С., Сергиенко И. В. Анализ многокомпонентных распределенных систем и оптимальное управление : монография. Киев : Наук. думка, 2007. 703 с.
2. Агеев А. Л., Антонова Т. В. Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных. *Сибирский журнал индустриальной математики*. Новосибирск, 2012. Т.15, № 1(49). С. 3–13.
3. Rossini M. Detecting discontinuities in two-dimensional signals sampled on a grid. *Journal of Numerical Analysis, Industrial and Apply Mathematics*. 2007. Vol. 1, № 1. P. 1–13.
4. Першина Ю. І., Пасічник В. О. Чисельна реалізація методу виявлення точок розриву першого роду функції однієї змінної. *Вісник ХНТУ*. Херсон, 2017. № 3 (62), Т. 1. С. 80–84.
5. Першина Ю. І, Пасічник В. О. Наближення розривних функцій розривними сплайнами методом мінімакса. *Вісник ХНТУ*. Херсон, 2018. № 3(66), Т. 2. С. 82–87.

6. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. Москва : Наука, 1972. 368 с.

SOLUTION OF THE PROBLEM OF RESTORING DISCONTINUOUS FUNCTIONS BY THE MINIMAX

The article suggests a method for approximating a function of one and two variables with discontinuities of the first kind by a discontinuous approximation spline. The experimental data are the one-sided boundaries of the given nodes. To solve this problem in this paper, we use the minimax method.

Key words: *discontinuous functions, discontinuous spline, approximation, interpolation, minimax.*

Одержано 14.02.2019

УДК 519.1
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.104-111

В. І. Петренюк, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Центральноукраїнський національний технічний університет, м. Кропивницький

СТРУКТУРА 20-ТИ 9-ТИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЇ ТОРА

Досліджено структуру решти 9-ти вершинних графів-обструкцій для тору.

Ключові слова: *граф-обструкція, тор, φ-перетворення графів.*

Вступ. Основні визначення та позначення взято з [1]. У роботі [2] запропоновано спосіб побудови графів-обструкцій обмеженого орієнтованого роду як φ-образу двох графів, один з яких має бути квазізіркою, з'єднаних шляхом ототожнення пар вершин, для випадку несуттєвості порядку ототожнення зазначених пар точок; тобто один із підграфів породжених підмножинами точок допускатиме перестановку довільної пари тачок з'єднання, наприклад, є повним. Цей підхід може видавати такі графи, які набуватимуть статус обструкцій після стискання в точку усіх лишніх ребер-променів квазізірки, саме так побудовані зазначені графи. Однак не всі графи-обструкції для тору можливо отримати цим способом. Однією з причин відсутності лишніх ребер є наявність двостороннього доступу до деяких точок із тих пар точок, що підлягають ототожненню в точку-вершину графа.

Задача полягатиме у завершенні розпочатої в [4] роботи по вивченню структури 9-ти вершинних графів-обструкцій для тору, наве-

