

The necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of a generating linear homogeneous equation bounded on the entire axis are obtained. The corresponding set of solutions is represented by the constructed Green operator. For a nonlinear Navier–Stokes equation, we introduce the operator equation for generating elements. Using the operator equation for the generating elements, we obtain the necessary condition for the bifurcation of the solutions of the Navier–Stokes equation. It is necessary to find such a solution of the system of equations that is bounded on the entire axis, which transforms into a generating bounded solution of the corresponding homogeneous equation when  $\varepsilon = 0$ . In this paper we obtain a sufficient condition for the existence of a solution of the Navier–Stokes equation bounded on the entire axis. An iterative Newton-Kantorovich type algorithm for its finding was constructed. With the help of representation, estimates of the corresponding solutions in the spaces of integrable functions are established.

**Key words:** *Navier–Stokes equation, homoclinic chaos, Moore–Penrose pseudoinverse operator.*

Одержано 24.01.2019

УДК 519.7

DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.118-124

**О. Д. Поліщук**, канд. фіз.-мат. наук

Інститут прикладних проблем механіки і математики  
імені Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів

## ЦЕНТРАЛЬНІСТЬ У СКЛАДНИХ МЕРЕЖАХ ТА ПОСЕРЕДНИЦТВО У МЕРЕЖЕВИХ СИСТЕМАХ

Аналізуються концепції центральності та впливу вузлів складних мереж для визначення їх важливості у структурі системи. Вводяться поняття міри, області та потужності посередництва вузлів та ребер мережі для ідентифікації їх важливості у процесі функціонування мережесистем. Ці показники кількісно виражають ступінь сприяння відповідного елемента рухові потоків у системі та визначають втрати, які її очікують у разі блокування цього вузла або ребра чи цілеспрямованої атаки на нього. Аналогічні поняття посередництва вводяться для визначення функціональної важливості окремих підсистем мережесистем. Наводяться приклади практичного застосування отриманих результатів.

**Ключові слова:** *складна мережа, мережева система, центральність, посередництво.*

**Вступ.** Однією з основних концепцій теорії складних мереж є так звана центральність (centrality) вузла, яка дозволяє визначати його важливість у мережі: найбільш впливові особи у соціальних мережах,

ключові вузли у Інтернеті та транспортних мережах тощо [1, 2]. Однак, поняття «важливість» може мати різний зміст, що призвело до появи багатьох визначень терміну «центральність». Перерахуємо найбільш вживані показники центральності вузла в складній мережі (СМ):

- центральність за ступенем (degree centrality) визначається кількістю ребер, які безпосередньо поєднують даний вузол з іншими вузлами мережі (був першим та локальним показником центральності) [3];
- центральність близькості (closeness centrality) обчислюється, як середня довжина найкоротшого шляху між вузлом та всіма іншими вузлами мережі [4];
- центральність посередництва (betweenness centrality) обчислюється, як відношення кількості найкоротших шляхів між всіма вузлами, які проходять через даний вузол, до загальної кількості найкоротших шляхів мережі [5];
- власна центральність або центральність за власним вектором (eigenvector centrality) визначається через власні значення матриці суміжності бінарної мережі, яка описує структуру СМ [1];
- перколяційна центральність (percolation centrality) визначається важливістю вузла для сприяння перколяції мережі [6];
- крос-клік (cross-clique) центральність обчислюється кількістю клік, з якими пов'язаний вузол (кліка — підмережа у якій кожний вузол пов'язаний зі всіма іншими вузлами цієї підмережі) [7].

Можна назвати ще цілу низку визначень центральності вузла в мережі — подібні власній центральності Катца (Katz) [8] та PageRank [9], подібна центральності близькості гармонійна (harmonic) центральність [10], центральність Фрімана (Freeman) та альфа (alpha) центральність [3] тощо. При цьому одне значення центральності може суперечити іншому та центральність, важлива для однієї задачі, може бути несуттєвою для іншої. Цей феномен був яскраво підтверджений Д. Кракхардом [11], який навів приклад простої мережі, до складу якої входить 10 вузлів, для яких центральність за ступенем, посередництвом та близькістю приймали абсолютно різні значення, тобто дали три різні вибори найбільш важливих вузлів у її структурі. Звідси слідує, що перераховані вище визначення центральності вузла мають достатньо відносне значення. Це стало причиною введення поряд із поняттями центральності пов'язаних з ними показників впливу вузлів на мережеву структуру. Основними показниками впливу вузла є його доступність (accessibility) та очікувана сила (expected force) [12]. Доступність вузла визначається кількістю вузлів до яких з нього можна перейти за визначений проміжок часу. Очікувана сила впливу вузла визначається кількістю вузлів, до яких можна з нього перейти за два або більше кроків руху (крок — перехід одним ребром мережі). Очевидно, що показники

центральності та впливу вузла визначаються виключно властивостями структури та є характеристиками цієї структури, а не системи загалом.

У праці [13] як показники функціональної важливості вузла мережевої системи (МС) були введені параметри вхідного та вихідного впливу вузла на систему, які визначаються обсягами потоків, які приймаються вузлом або генеруються у ньому, областей та потужностей вхідного та вихідного впливу, які визначаються множинами вузлів-приймачів та генераторів потоків з даного вузла СМ та кількістю елементів цих областей. Ці поняття дозволяють кількісно оцінити участь окремого вузла як приймача або генератора потоків в процесі функціонування системи та його участь у цьому процесі. Інший показник важливості взаємодії вузла з МС, який вводиться та досліджується у цій статті, є мірою його сприяння транзиту потоків мережею.

**Посередництво елементів мережевих систем.** Однією з найбільш вживаних поряд із центральною за ступенем (або ступенем вузла) у теорії складних мереж є центральність посередництва. Можливо термін «посередництво» є найбільш вдалим для визначення участі елемента МС у процесі спільного функціонування та взаємодії усіх вузлів мережі або певної її частини. Тому для визначення функціональної важливості вузла або ребра СМ в системі вживатимемо саме термін «посередництво».

Нехай  $\mathbf{V} = \{v_{ij}\}_{i,j=1}^N$  — потокова матриця суміжності МС [13], значення елементів якої є рівними обсягами потоків, які проходять ребром мережі, яке пов'язує вузли  $n_i$  та  $n_j$  за період  $[0, T]$ ,  $N$  — кількість вузлів мережі. Позначимо  $P_{ij}^{K_j} = \{p_{ij}^k\}_{k=1}^{K_j}$  — сукупність шляхів, які поєднують вузли-генератори та вузли-приймачі потоків МС, та містять, як елемент, ребро  $(n_i, n_j)$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ . Нехай  $v_{ij}^k$  — обсяг потоків, які пройшли шляхом  $p_{ij}^k$  від вузла-генератора до вузла-приймача, а отже і ребром  $(n_i, n_j)$ , за період  $[0, T]$ . Тоді величина

$$V_{ij}^{K_j} = \sum_{k=1}^{K_j} v_{ij}^k$$

визначає сумарний обсяг потоків, які пройшли сукупністю шляхів  $P_{ij}^{K_j}$ , а отже і ребром  $(n_i, n_j)$ , за цей же проміжок часу. Величину

$$\Phi_{ij} = V_{ij}^{K_j} / s(\mathbf{V}), \quad s(\mathbf{V}) = \sum_{i,j=1}^N v_{ij},$$

яка визначає питому вагу потоків, що проходять ребром  $(n_i, n_j)$  за період  $[0, T]$ , називатимемо мірою посередництва цього ребра в процесі функціонування МС.

Множину  $L_{ij}$  усіх вузлів СМ, які лежать на шляхах із сукупності  $P_{ij}^{K_{ij}}$ , називатимемо областю посередництва, а кількість  $\eta_{ij}$  цих вузлів — потужністю посередництва ребра  $(n_i, n_j)$  (рис. 1).

Параметри міри, області та потужності посередництва ребра  $(n_i, n_j)$  є глобальними характеристиками його важливості у процесі функціонування МС,  $i, j = \overline{1, N}$ . Вони, зокрема, визначають, яким чином блокування цього ребра вплине на роботу області його посередництва, величину цієї області і, внаслідок цього, — всієї системи [14].

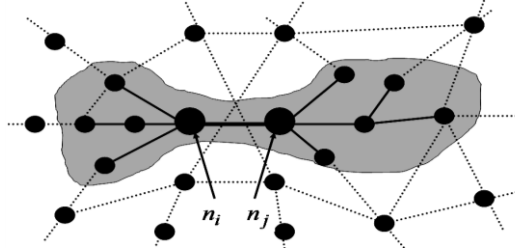


Рис. 1. Область посередництва ребра  $(n_i, n_j)$  у процесі функціонування МС

Позначимо  $P_i^{K_i} = \{p_i^k\}_{k=1}^{K_i}$  — сукупність шляхів, які поєднують вузли-генератори та вузли-приймачі потоків МС, та проходять через вузол  $n_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Нехай  $v_i^k$  — обсяг потоків, які пройшли шляхом  $p_i^k$  від вузла-генератора до вузла-приймача, а отже і через вузол  $n_i$ , за період  $[0, T]$ . Тоді величина

$$V_i^{K_i} = \sum_{k=1}^{K_i} v_i^k$$

визначає сумарний обсяг потоків, які пройшли сукупністю шляхів  $P_i^{K_i}$ , а отже і через вузол  $n_i$ , за цей же проміжок часу. Величину

$$\Phi_i = V_i^{K_i} / s(\mathbf{V}),$$

яка визначає питому вагу потоків, що проходять через вузол  $n_i$  за період  $[0, T]$ , називатимемо мірою посередництва цього вузла в процесі функціонування МС. Множину  $M_i$  усіх вузлів СМ, які лежать на шляхах із сукупності  $P_i^{K_i}$ , називатимемо областю посередництва, а кількість  $\eta_i$  цих вузлів — потужністю посередництва вузла  $n_i$ .

Параметри міри, області та потужності посередництва вузла  $n_i$  є глобальними характеристиками його важливості у процесі функціо-

нування МС,  $i = \overline{1, N}$ . Вони, зокрема, визначають, яким чином блокування цього вузла вплине на роботу області його посередництва, величину цієї області  $i$ , внаслідок цього, — всієї системи.

**Посередництво підсистем мережевих систем.** Не менш важливими для аналізу процесу функціонування МС є параметри посередництва окремих її підсистем, які визначимо наступним чином. Позначимо  $P_S^{K_s} = \{P_S^k\}_{k=1}^{K_s}$  — сукупність шляхів, які поєднують вузли-генератори та вузли-приймачі потоків МС, та проходять через елементи підсистеми  $S$ . Нехай  $v_S^k$  — обсяг потоків, які пройшли шляхом  $P_S^k$  від вузла-генератора до вузла-приймача, а отже і через елементи підсистеми  $S$ , за період  $[0, T]$ . Тоді величина

$$V_S^{K_s}(t) = \sum_{k=1}^{K_s} v_S^k(t)$$

визначає сумарний обсяг потоків, які пройшли сукупністю шляхів  $P_S^{K_s}$ , а отже і через елементи підсистеми  $S$ , за цей же проміжок часу. Величину

$$\Psi_S = V_S^{K_s}(t) / s(\mathbf{V}(t)),$$

яка визначає питому вагу потоків, що проходять через елементи підсистеми  $S$  за період  $[0, T]$ , називатимемо мірою посередництва цієї підсистеми в процесі функціонування МС.

Множину  $M_S$  усіх вузлів МС, які лежать на шляхах із сукупності  $P_S^{K_s}$ , називатимемо областю посередництва (рис. 2), а кількість  $\eta_S$  цих вузлів — потужністю посередництва підсистеми  $S$ .

Параметри міри, області та потужності посередництва підсистеми  $S$  є глобальними характеристиками її важливості у процесі функціонування МС. Вони зокрема визначають, яким чином блокування цієї підсистеми вплине на роботу області її посередництва, величину цієї області  $i$ , внаслідок цього, — всієї системи. Окрім того, невеликі значення параметрів посередництва підсистеми  $S$  також можуть свідчити про те, що вона утворює спільноту в межах МС.

Поведінка похідних параметрів посередництва елементів та підсистем МС дозволяє визначати тенденції та швидкість зростання або падіння їх важливості у процесі функціонування МС. Для глибшого дослідження параметрів посередництва складових системи доцільно використовувати методи коротко- та довгострокового прогнозування їх поведінки [15].

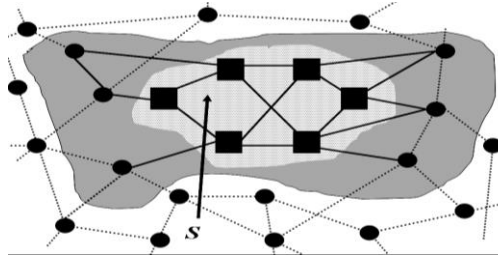


Рис. 2. Область посередництва підсистеми  $S$  в процесі функціонування МС

**Висновки.** Визначені у статті параметри посередництва складових мережевих систем дозволяють ідентифікувати найважливіші для роботи МС елементи і підсистеми та сприяють кращому розумінню процесів, які перебігають у них. Ці параметри дають можливість скласти значно реалістичніші сценарії потенційних атак на систему та будувати надійніші засоби її захисту. Отримані результати можуть бути використані для зменшення уразливості МС від негативних зовнішніх та внутрішніх впливів, розробки новітніх методів захисту інформаційних та безпекових систем, підвищення ефективності функціонування транспортних і промислових мереж різного типу та призначення і т. ін.

#### Список використаних джерел:

1. Bonacich P. Power and Centrality: A Family of Measures. *American Journal of Sociology*. 1987. Vol. 92 (5). P. 1170–1182.
2. Borgatti S. P. Centrality and network flow. *Social Networks*. 2005. Vol. 27 (1). P. 55–71.
3. Freeman L. C. Centrality in social networks conceptual clarification. *Social networks*. 1979. Vol. 1 (3). P. 215–239.
4. Bavelas A. Communication patterns in task-oriented groups. *Journal of American Acoustic Society*. 1950. Vol. 22 (6). P. 725–730.
5. Freeman L. C. A set of measures of centrality based upon betweenness. *Sociometry*. 1977. Vol. 40. P. 35–41.
6. Piraveenan M. Percolation Centrality: Quantifying Graph-Theoretic Impact of Nodes during Percolation in Networks. *PLOS ONE*. 2013. Vol. 8 (1). e53095.
7. Faghani M., Nguyen U. T. A Study of XSS Worm Propagation and Detection Mechanisms in Online Social Networks. *IEEE Trans. Inf. Forensics and Security*. 2013. Vol. 8 (11). P. 1815–1826.
8. Katz L. A New Status Index Derived from Sociometric Index. *Psychometrika*. 1953. Vol. 18 (1). P. 39–43.
9. Bonacich P., Lloyd P. Eigenvector-like measures of centrality for asymmetric relations. *Social Networks*. 2001. Vol. 23 (3). P. 191–201.
10. Marchiori M., Latora V. Harmony in the small-world. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2000. Vol. 285 (3–4). P. 539–546.
11. Krackhardt D. Assessing the Political Landscape: Structure, Cognition, and Power in Organizations. *Administrative Science Quarterly*. 1990. Vol. 35 (2). P. 342–369.

12. Glenn L. Understanding the influence of all nodes in a network. *Scientific Reports*. 2015. Vol. 5. 8665.
13. Polishchuk O. Flow Models of Complex Network Systems. *Intern. Scientific-Practical Conf. on Problems of Infocommunications. Science and Technology*. 2018. P. 317–322.
14. Polishchuk O., Polishchuk D. Monitoring of flow in transport networks with partially ordered motion. *XXIII Conf. Carpenko physics and mechanics institute, NASU*. 2013. P. 326–329.
15. Polishchuk D., Polishchuk O., Yadzhak M. About complex evaluation of hierarchically-network systems. *IV<sup>th</sup> Conf. «Knowledge — Ontology — Theory»*. 2013. P.68–79.

### **CENTRALITY IN COMPLEX NETWORKS AND BETWEENNESS IN NETWORK SYSTEMS**

The concepts of centrality and influence of complex network nodes are analyzed for the purpose of determining their importance in the systems structure. The notions of measure, domain and power of betweenness of network nodes and edges are introduced to identify their importance in the operation process of network systems. These indicators quantitatively express the degree of assistance of the corresponding element for the motion of flows in the system and determine the losses that are expected in the case of blocking this node or edge or targeted attack on it. Similar notions of betweenness are introduced to determine the functional importance of separate subsystems of network systems. Examples of practical use of the obtained results are given.

**Key words:** *complex network, network system, centrality, betweenness.*

Одержано 21.01.2019