УДК 517.988
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.132-137

В. В. Семёнов, д-р физ.-мат. наук

Киевский национальный университет
имени Тараса Шевченко, г. Киев

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД С ДИВЕРГЕНЦИЕЙ БРЭГМАНА ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Предложен новый метод экстраградиентного типа для решения вариационных неравенств с псевдомонотонными и липшицевыми операторами, действующими в конечномерном линейном нормированном пространстве. Доказана теорема сходимости метода и для случая монотонного оператора получены неасимптотические оценки эффективности метода.

Ключевые слова: *вариационное неравенство, монотонность, псевдомонотонность, условие Липшица, экстраградиентный метод, дивергенция Брэгмана.*

Введение. Наиболее известным обобщением метода проекции градиента для вариационных неравенств является экстраградиентный метод Г. М. Корпелевич [1]. Исследованию этого алгоритма посвящено большое количество публикаций. В частности, предлагались модификации алгоритма Г. М. Корпелевич с одним метрическим проектированием на допустимое множество [2–5]. Для вариационных неравенств одним из современных вариантов экстраградиентного метода является проксимальный зеркальный метод А. С. Немировского [6].

Настоящее сообщение посвящено изучению нового метода экстраградиентного типа для приближенного решения вариационных неравенств с псевдомонотонными и липшицевыми операторами, действующими в конечномерном линейном нормированном пространстве. Данный метод является модификацией субградиентного экстраградиентного алгоритма [3–5] с использованием дивергеции Брэгмана вместо евклидового расстояния. К предлагаемой схеме можно прийти и путем замены допустимого множества на специальные опорные для него полупространства во втором этапе проксимального зеркального метода А. С. Немировского [6]. Доказана теорема сходимости метода. А для случая монотонного оператора и компактного допустимого множества получены неасимптотические оценки эффективности.

Модифицированный экстраградиентный метод. Всюду далее работаем в конечномерном действительном линейном пространстве, обозначаемом буквой E . Это пространство снабдим нормой $\|\cdot\|$ (не обязательно евклидовой). Двойственное пространство обозначим E^*. Для $a \in E^*$ и $b \in E$ будем обозначать через (a,b) значение линейной функции a в точке b. Двойственную норму на E^* обозначим $\|\cdot\|_*$.

Пусть C — непустое подмножество пространства E, A — оператор, действующий из E в E^*. Рассмотрим вариационное неравенство:

$$\text{найти } x \in C: \ (Ax, y-x) \ge 0 \quad \forall y \in C, \tag{1}$$

множество решений которого обозначим S.

Предположим, что выполнены следующие условия:

- множество $C \subseteq E$ — выпуклое и замкнутое;
- оператор $A: E \to E^*$ — псевдомонотонный и липшицевый с константой $L > 0$;
- множество S не пусто.

Заметим, что при данных условиях множество S выпуклое и замкнутое.

Введем необходимые для формулировки алгоритма конструкции. Пусть функция $\varphi: E \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ удовлетворяет условия:

- $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi \subseteq E$ непустое выпуклое множество;
- φ непрерывно дифференцируема на $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$;
- если $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi \ni x_n \to x \in \operatorname{bd}\operatorname{dom}\varphi$, то $\|\nabla\varphi(x_n)\|_* \to +\infty$;
- φ сильно выпукла относительно нормы $\|\cdot\|$ с константой сильной выпуклости $\sigma > 0$:

$$\varphi(a) \ge \varphi(b) - (\nabla\varphi(b), a-b) + \tfrac{\sigma}{2}\|a-b\|^2 \quad \forall a \in \operatorname{dom}\varphi,\ b \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi.$$

Дивергенция Брэгмана задается формулой

$$V(a,b) = \varphi(a) - \varphi(b) - (\nabla\varphi(b), a-b) \quad \forall a \in \operatorname{dom}\varphi,\ b \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi.$$

Имеет место полезное 3-точечное тождество

$$V(a,c) = V(a,b) + V(b,c) + (\nabla\varphi(b) - \nabla\varphi(c), a-b).$$

Из сильной выпуклости функции φ следует оценка

$$V(a,b) \ge \tfrac{\sigma}{2}\|a-b\|^2 \quad \forall a \in \operatorname{dom}\varphi,\ b \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi.$$

Пусть $K \subseteq \operatorname{dom}\varphi$ непустое замкнутое выпуклое множество, причем $K \cap \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi \ne \varnothing$. Рассмотрим сильно выпуклые задачи минимизации вида

$$P_x^K(a) = \arg\min_{y\in K}\{-(a, y-x) + V(y,x)\},\ a \in E^*,\ x \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi. \tag{2}$$

Известно, что задача (2) имеет единственное решение $z \in K \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} \varphi$, причем

$$-(a, y-z)+(\nabla \varphi(z)-\nabla \varphi(x), y-z) \geq 0 \quad \forall y \in K .$$

Точка $P_x^K(a)$ в евклидовом случае совпадает с евклидовой метрической проекцией

$$P_K(x+a)=\arg \min_{y \in K}\|y-(x+a)\|_2 .$$

Опишем предлагаемый алгоритм для решения вариационного неравенства (1).

Алгоритм 1. Выбираем элемент $x_1 \in E$ и последовательность положительных чисел (λ_n). Полагаем $n=1$.

Шаг 1. Вычислить

$$y_n=P_{x_n}^C(-\lambda_n A x_n) .$$

Шаг 2. Если $y_n=x_n$, то СТОП, иначе вычислить

$$x_{n+1}=P_{x_n}^{T_n}(-\lambda_n A y_n),$$

где

$$T_n=\left\{z \in E:\ (\nabla \varphi(x_n)-\lambda_n A x_n-\nabla \varphi(y_n), z-y_n) \leq 0\right\} .$$

Положить $n:=n+1$ и перейти на шаг 1.

Замечание 1. Имеем $C \subseteq T_n$. Действительно, если предположить существование точки $w \in C \setminus T_n$, то неравенство

$$(\nabla \varphi(x_n)-\lambda_n A x_n-\nabla \varphi(y_n), w-y_n)>0$$

противоречит равенству $y_n=P_{x_n}^C(-\lambda_n A x_n)$.

Замечание 2. Если $\varphi(\cdot)=\frac{1}{2}\|\cdot\|_2^2$, то алгоритм 1 принимает вид субградиентного экстраградиентного метода [3, 4]:

$$\begin{cases} y_n=P_C(x_n-\lambda_n A x_n), \\ T_n=\left\{z \in H:(x_n-\lambda_n A x_n-y_n, z-y_n) \leq 0\right\}, \\ x_{n+1}=P_{T_n}(x_n-\lambda_n A y_n). \end{cases}$$

Имеет место.

Лемма 1. Если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ в алгоритме 1 имеем $y_n=x_n$, то $x_n \in S$.

Далее будем предполагать, что для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ условие $y_n=x_n$ не имеет места и перейдем к обоснованию сходимости алгоритма 1.

Лемма 2. Для последовательностей (x_n), (y_n), порожденных алгоритмом 1, имеет место неравенство

$$V(z, x_{n+1}) \le V(z, x_n) - \left(1 - \lambda_n \frac{L}{\sigma}\right) \cdot V(y_n, x_n) - \left(1 - \lambda_n \frac{L}{\sigma}\right) \cdot V(x_{n+1}, y_n),$$

где $z \in S$.

Сходимость и оценки эффективности. Сформулируем один из основных результатов работы.

Теорема 1. Пусть множество $C \subseteq E$ — выпуклое и замкнутое, оператор $A : E \to E^*$ — псевдомонотонный и липшицевый с константой $L > 0$, $S \neq \varnothing$ и $\lambda_n \in [a, b]$, где a, $b \in (0, \sigma L^{-1})$. Тогда последовательности (x_n) и (y_n), порожденные алгоритмом 1, сходятся к некоторой точке $\bar{z} \in S$.

Рассмотрим вариационное неравенство (1) с монотонным липшицевым оператором A и выпуклым компактным множеством C. Получим для этого случая неасимптотические оценки эффективности алгоритма 1.

Функцией разрыва называют функцию вида

$$G(x) = \max_{y \in C} (Ay, x - y), \ x \in C.$$

Функция разрыва выпукла, неотрицательна и принимает нулевое значение в точке $x \in C$ тогда и только тогда, когда эта точка принадлежит множеству S. Она применяется для оценки качества приближенного решения вариационых неравенств.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $\lambda_n \in (0, \sigma L^{-1}]$. Тогда имеет место неравенство

$$G(z_N) = \max_{y \in C} (Ay, z_N - y) \le R_C(x_1) \left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \right)^{-1},$$

где $R_C(x_1) = \max_{y \in C} V(y, x_1)$, $z_N = \left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n y_n \right) \left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \right)^{-1}$.

Следствие 1. Пусть $\lambda_n = \lambda = \dfrac{\sigma}{\alpha L}$, где $\alpha \ge 1$. Тогда имеет место неравенство

$$G(z_N) = \max_{y \in C} (Ay, z_N - y) \le \alpha \cdot L \cdot R_C(x_1) \cdot \sigma^{-1} \cdot \frac{1}{N},$$

где $z_N = \dfrac{\sum_{n=1}^{N} y_n}{N}$.

Следствие 2. Пусть необходимо решить задачу (1) при помощи алгоритма 1 в условиях следствия 1 и $\varepsilon > 0$. Тогда после

$$N = \left\lceil \frac{R_C\left(x_1\right)}{\lambda\varepsilon} \right\rceil = \left\lceil \frac{\alpha L R_C\left(x_1\right)}{\sigma\varepsilon} \right\rceil$$

итераций имеет место оценка

$$G\left(z_N\right) = \max_{y\in C}\left(Ay, z_N - y\right) \le \varepsilon ,$$

где $z_N = \dfrac{\sum_{n=1}^{N} y_n}{N}$ — усредненный выход работы алгоритма 1 за N итераций.

Замечание 3. В ближайшей работе планируется для алгоритма [7] изучить аналог с брэгмановскими проекциями на специально подобранные опорные к допустимому множеству полупространства. А именно, вместо итераций вида

$$\begin{cases} x_{n+1} = P_{x_n}^{C}\left(-\lambda A y_n\right), \\ y_{n+1} = P_{x_{n+1}}^{C}\left(-\lambda A y_n\right), \end{cases}$$

предлагается рассмотреть процесс

$$\begin{cases} x_{n+1} = P_{x_n}^{H_n}\left(-\lambda A y_n\right), \\ y_{n+1} = P_{x_{n+1}}^{C}\left(-\lambda A y_n\right), \end{cases}$$

где $H_n = \left\{ z \in E :\ \left(\nabla\varphi\left(x_n\right) - \lambda A y_{n-1} - \nabla\varphi\left(y_n\right), z - y_n\right) \le 0 \right\}$.

Список использованных источников:

1. Korpelevich G. M. The extragradient method for finding saddle points and other problems. *Ekonomika i Matematicheskie Metody*. 1976. Vol. 12. № 4. P. 747–756.
2. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2000. Vol. 38. P. 431–446.
3. Censor Y., Gibali A., Reich S. The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2011. Vol. 148. P. 318–335.
4. Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T. A. Low-cost modification of Korpelevich’s methods for monotone equilibrium problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2011. Vol. 47. P. 631–639.
5. Denisov S. V., Semenov V. V., Chabak L. M. Convergence of the Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51. P. 757–765.

6. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence O(1/t) for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. *SIAM Journal on Optimization*. 2004. Vol. 15. P. 229–251.
7. Semenov V.V. A Version of the Mirror descent Method to Solve Variational Inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53. P. 234–243.

A MODIFIED EXTRA-GRADIENT METHOD WITH BREGMAN DIVERGENCE FOR VARITIONAL INEQUALITIES

A new method of extra-gradient type for the approximate solution of variational inequalities with pseudo-monotone and Lipschitz-continuous operators acting in a finite-dimensional linear normed space is proposed. A theorem on the convergence of the method is proved and, in the case of a monotone operator, non-asymptotic estimates of the effectiveness of the method are obtained.

Key words: *variational inequality problem, monotonicity, pseudo-monotonicity, Lipschitz condition, extra-gradient method, Bregman divergence.*

Получено 12.02.2019

УДК 519.615.7
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.137-141

В. Ю. Семенов*, канд. фіз.-мат. наук,
Є. В. Семенова**, канд. фіз.-мат. наук

*****Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України;
ТОВ «Дельта СПЕ», м. Київ,
******Інститут математики НАН України, м. Київ

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ БІТОВИХ РІВНЯНЬ НА ОСНОВІ ПРИНЦИПУ ГІЛОК ТА ГРАНИЦЬ

Розв'язання систем рівнянь над бітовими полями є актуальною задачею для галузей криптографії, теорії завадостійкого кодування інформації, робототехніки, астрофізики та інших областей. У даній статті запропоновано метод розв'язування бітових рівнянь, що базується на методології гілок та границь (branch-and-bound). Запропонована методологія вже буда використана авторами для розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь. Метод може бути використаний не тільки для систем бітових рівнянь, а також і для розв'язання систем бітових рівнянь над довільними скінченними полями Галуа *GF*(*n*). Важливою особливістю запропонованого методу є те, що він дозволяє знайти усі розв'язки системи бітових рівнянь при будь-якому співвідношенні кількості змінних та кількості рівнянь. У статті наведено алгоритм, що реалізує послідовність дій, необхідну для реалізації запропонованого методу розв'язування систем бітових рівнянь. Алгоритм виконує послідовне зниження порядку системи (кількості змінних). Запропонована методика є спорідненою до методики