УДК 519.85
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.5-11

Т. М. Барболіна, канд. фіз.-мат. наук

Полтавський національний педагогічний університет
імені В. Г. Короленка, м. Полтава

ВЛАСТИВОСТІ ЕВКЛІДОВИХ ЗАДАЧ ЛЕКСИКОГРАФІЧНОЇ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ

Розглядаються евклідові задачі лексикографічної комбінаторної оптимізації, які передбачають знаходження лексикографічно мінімальної (для задач мінімізації) чи лексикографічно максимальної (для задач максимізації) точки серед тих, які надають екстремум цільовій функції на заданій евклідовій комбінаторній множині. Обґрунтовано властивості лінійних та дробово-лінійних задач лексикографічної комбінаторної оптимізації на загальній множині розміщень без додаткових обмежень. Отримані в роботі результати спираються на відомі раніше критерії екстремалей лінійної та дробово-лінійної функцій на розміщеннях: будь-яка екстремаль є елементом певної множини полірозміщень (для лінійних задач вигляд множини екстремалей встановлений явно, для дробово-лінійних задач множина полірозміщень формується на основі деякої відомої екстремалі). У роботі встановлено вигляд точок, які є лексикографічною мінімаллю та лексикографічною максималлю лінійної функції на загальній множині розміщень. Зокрема, якщо елементи мультимножини упорядковані за неспаданням, а коефіцієнти цільової функції — за незростанням, причому s — найменший індекс такий, що відповідний коефіцієнт цільової функції є від'ємним, то лексикографічна мінімаль формується як упорядковані за неспаданням $s-1$ перших та $k-s+1$ (k — вимірність простору) останніх елементів мультимножини. Для задач з дробово-лінійною цільовою функцією встановлений спосіб формування розв'язку задачі лексикографічної комбінаторної оптимізації на розміщеннях, якщо відома будь-яка з мінімалей (для задач мінімізації) чи максималей (для задач максимізації) цільової функції на заданій множині розміщень. Упорядкування компонент екстремалі у цьому випадку здійснюється з урахуванням упорядкування за незростанням коефіцієнтів лінійної функції спеціального вигляду.

Ключові слова: *комбінаторна оптимізація, евклідові задачі лексикографічної комбінаторної оптимізації, оптимізаційні задачі на розміщеннях.*

Вступ. Оптимізаційні задачі з обмеженнями комбінаторного характеру привертають увагу багатьох дослідників [1–6]. Такий інтерес зумовив виокремлення задач на так званих евклідових комбінаторних множинах. Важливий клас евклідових задач комбінаторної оптимізації становлять задачі на розміщеннях, дослідженню яких присвячені, серед іншого, роботи [3–6]. Зокрема, встановлено достатню [3] та необхідну [5] умови екстремалі лінійної цільової функції на загальній множині розміщень, спосіб формування множини мінімалей (максималей) дробово-лінійної функції на множині розміщень, якщо відома одна з них [5]. З іншого боку, у [6] запропоновано формулювання задач комбінаторної оптимізації, яке передбачає знаходження не довільної екстремалі, а лексикографічно максимальної (мінімальної) точки серед тих, які надають максимум (мінімум) цільовій функції. Такі задачі називаються евклідовими задачами лексикографічної комбінаторної оптимізації.

Мета роботи — обґрунтування властивостей деяких класів задач лексикографічної комбінаторної оптимізації на загальній множині розміщень.

Розглянемо спочатку необхідні позначення та факти. Позначимо $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $J_n^m = \{m, m+1, \dots, n\}$. Термінологію стосовно евклідових задач комбінаторної оптимізації використовуватимемо переважно з [3]. Зокрема, під мультимножиною розуміємо сукупність елементів, серед яких можуть бути однакові. Загальною множиною розміщень з елементів мультимножини $G = \{g_1, g_2, ..., g_\eta\}$ називають множину всіх упорядкованих k-вибірок з мультимножини G вигляду $(g_{i_1}, g_{i_2}, ..., g_{i_k})$, де $g_{i_j} \in G$, $i_j \neq i_t$ $\forall i_j, i_t \in J_\eta$, $\forall j, t \in J_k$.

Розглянемо упорядковане розбиття множини J_η на σ множин $N_1, N_2, \dots, N_\sigma$, яке задовольняє умови $N_i \cap N_j = \varnothing$, $N_i \neq \varnothing$ $\forall i \in J_\sigma$, а також упорядковане розбиття числа k на σ доданків $k_1, k_2, ..., k_\sigma$, що задовольняє умови $1 \le k_i \le |N_i|$ $\forall i \in J_\sigma$. Нехай H — множина всіх k-вибірок з множини J_η вигляду

$$\pi = (\pi(1), ..., \pi(k)) = (\pi_{11}, ..., \pi_{1k_1}, ..., \pi_{\sigma 1}, ..., \pi_{\sigma k_\sigma}) = (\pi^1, ..., \pi^\sigma), \quad (1)$$

де $\pi^i = (\pi_{i1}, ..., \pi_{ik_i})$ — довільна k_i-вибірка з множини N_i $\forall i \in J_\sigma$. Множина $E_{\eta n}^{k\sigma}(G, H) = \{(g_{\pi(1)}, ..., g_{\pi(k)}) \mid \forall \pi \in H\}$ називається загальною множиною поліроміщень.

Розглянемо розв'язування лінійної безумовної задачі лексикографічної комбінаторної мінімізації на розміщеннях, тобто задачу знаходження на множині $E_\eta^k(G)$ мінімуму та лексикографічної мінімалі (лексикографічно мінімальної точки серед тих, що надають цільовій функції мінімуму) функції

$$C(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \ . \tag{2}$$

Вважатимемо, що елементи мультимножини G задовольняють умову

$$g_1 \le g_2 \le \ldots \le g_\eta \, , \tag{3}$$

а коефіцієнти цільової функції — умову

$$c_{t_1} = \ldots = c_{t_2 - 1} > c_{t_2} = \ldots = c_{t_3 - 1} > \ldots > c_{t_\sigma} = \ldots = c_k \ . \tag{4}$$

Теорема 1 (критерій лексикографічної мінімалі лінійної функції на загальній множині розміщень). Нехай s — найменший індекс такий, що $c_{t_s} < 0$. Лексикографічною мінімаллю функції (2) на загальній множині розміщень $E_\eta^k(G)$ є точка x^*, для якої

$$x_j^* = g_j \quad \forall j \in J_{t_s - 1} \, , \ x_j^* = g_{\eta - k + j} \quad \forall j \in J_k^{t_s} \ . \tag{5}$$

Доведення. Як випливає з критерію мінімалі лінійної цільової функції на розміщеннях (теорема 3 [5]), точка x^* є мінімаллю функції (2) на множині $E_\eta^k(G)$ тоді і лише тоді, коли вона задовольняє умові $x^* \in E_{\eta n}^{ks}(G, H)$, де H — множина k-вибірок з множини J_η вигляду (1), при формуванні яких $k = \overline{t}_1 + \overline{t}_2 + \ldots + \overline{t}_\sigma$ ($\overline{t}_w = t_{w+1} - t_w$), а множини N_w визначаються таким чином:

$$N_w = \begin{cases} \{t_w, \ldots, t_{w+1} - 1\}, \text{ якщо } c_{t_w} > 0, \\ \{\eta - k + t_w, \ldots, \eta - k + t_{w+1} - 1\}, \text{ якщо } c_{t_w} < 0, \\ J_\eta \setminus \bigcup\limits_{v \in W} N_v, \text{ якщо } c_{t_w} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Очевидно, що лексикографічно мінімальною упорядкованою $\overline{t}_w$-вибіркою з множини N_w при $w \in J_\sigma^s$ є вибірка $(\eta - k + t_w, \eta - k + t_w + 1, \ldots, \eta - k + t_{w+1} - 1)$, а при $w \in J_r$ (r — найбільший індекс такий, що $c_{t_r} > 0$) — вибірка $(t_w, t_w + 1, \ldots, t_{w+1} - 1)$. Також, якщо $r \ne s - 1$, тобто $r + 1 = s - 1$, то лексикографічно мінімальною упорядкованою $\overline{t}_{r+1}$-вибіркою з множини N_{r+1} є $(t_{r+1}, t_{r+1} + 1, \ldots, t_s - 1)$. Таким чином, лексикографічно мінімальною k-вибіркою вигляду (1) є $(1, 2, \ldots, s - 1, \eta - k + s, \eta - k + s + 1, \ldots \eta)$. Оскільки елементи мультимножини G задовольняють умові (3), то лексикографічна мінімаль функції (2) на множині $E_\eta^k(G)$ задовольняє умові (5). **Теорема доведена.**

Аналогічно доводиться теорема для випадку максимізації.

Теорема 2 (критерій лексикографічної максималі лінійної функції на загальній множині розміщень). Нехай s — найбільший індекс такий, що $c_{t_s} < 0$. Лексикографічною максималлю функції (2) на загальній множині розміщень $E_\eta^k(G)$ є точка x^*, для якої

$$x_j^* = g_{\eta-j+1} \quad \forall j \in J_{t_s-1}, \; x_j^* = g_{k-j+1} \quad \forall j \in J_k^{t_s}. \tag{7}$$

Розглянемо тепер безумовну задачу лексикографічної комбінаторної оптимізації на розміщеннях з дробово-лінійною цільовою функцією

$$\Phi(x) = \frac{\sum_{j=1}^{k} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{k} d_j x_j + d_0}. \tag{8}$$

У роботі [5] встановлено спосіб формування множини мінімалей (максималей) функції (8) на загальній множині розміщень $E_\eta^k(G)$, якщо відома одна з них (для пошуку такої мінімалі може бути використаний поліноміальний метод, розроблений у [6]). Розглянемо знаходження розв'язку задачі лексикографічної комбінаторної оптимізації дробово-лінійної функції на розміщеннях. Нехай x' — мінімаль функції (8) на множині $E_\eta^k(G)$, $\Phi^* = \Phi(x')$. Перенумеруємо змінні таким чином, щоб виконувалася умова

$$c_{q_1} - \Phi^* d_{q_1} \ge c_{q_2} - \Phi^* d_{q_2} \ge \ldots \ge c_{q_k} - \Phi^* d_{q_k}, \tag{9}$$

причому якщо $c_{q_i} - \Phi^* d_{q_i} = c_{q_j} - \Phi^* d_{q_j}$ і $i < j$, то $q_i < q_j$.

Позначимо $c'_j = c_{q_j} - \Phi^* d_{q_j}$, $y_j = x_{q_j}$ для всіх $j \in J_k$. Нехай індекси p_i $i \in J_k$ такі, що виконується умова

$$c'_{p_1} = \ldots = c'_{p_2-1} > c'_{p_2} = \ldots = c'_{p_3-1} > \ldots > c'_{p_u} = \ldots = c'_k. \tag{10}$$

Позначимо $I = \left\{ i \in J_u \,\middle|\, c_{p_i} \ne 0 \right\}$, $k_i = p_{i+1} - p_i$ $\forall i \in J_u$ і розглянемо розбиття числа k на u доданків $k = \overline{p}_1 + \overline{p}_2 + \ldots + \overline{p}_u$ і розбиття множини J_η на u підмножин N'_i за правилом:

$$N'_i = \begin{cases} \left\{ l_j \,\middle|\, j \in \overline{N}_i \right\}, \text{ де } \overline{N}_i = \left\{ q_{p_i}, \ldots, q_{p_{i+1}-1} \right\}, \text{ якщо } i \in I, \\ J_\eta \setminus \bigcup\limits_{j \in I} N'_j, \text{ якщо } c_{p_i} = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Розглянемо множину полірозміщень $E_{\eta n}^{ku}\left(G,H\right)$, де H — множина вибірок вигляду (1), $\pi^{i}=(\pi_{i1},\pi_{i2},...,\pi_{ik_i})$ — довільна k_i -вибірка із множини N_i' $\forall i\in J_u$.

Теорема 3 (критерій лексикографічної мінімалі дробово-лінійної функції на загальній множині розміщень). Нехай індекси r_{ij} такі, що для всіх $i\in J_u$, $j\in J_{|N_i'|-1}$ виконуються нерівності $l_{r_{ij}}<l_{r_{u,j+1}}$. Точка x^* є лексикографічною мінімаллю функції (8) на загальній множині розміщень $E_{\eta}^{k}\left(G\right)$ тоді і лише тоді, коли $x_{q_j}^*=y_j^*$ $\forall j\in J_k$, де $\left(y_1^*,y_2^*,...,y_k^*\right)$ — такий елемент множини полірозміщень $E_{\eta n}^{ku}\left(G,H\right)$, що для всіх $i\in J_u$ вибірки $\pi^{i}=(\pi_{i1},\pi_{i2},...,\pi_{ik_i})$ формуються за правилом $\pi_{ij=l_{r_{ij}}}$ $\forall j\in J_{k_i}$.

Доведення. Припустимо існує така мінімаль $\tilde{x}$ функції (8) на множині $E_{\eta}^{k}\left(G\right)$, що $\tilde{x}<_l x^*$ (тут і далі $<_l$ — символ лексикографічного порядку). Позначимо t — найменший індекс такий, що $\tilde{x}_t\neq x_t^*$ (тобто $\tilde{x}_t<x_t^*$).

Згідно з критерієм екстремалі дробово-лінійної функції на загальній множині розміщень (теорема 5 [5]) існує таке $\tilde{y}\in E_{\eta n}^{ku}\left(G,H\right)$, що $\tilde{y}_j=\tilde{x}_{q_j}$ $\forall j\in J_k$. Нехай v — таке, що $q_v=t$, f визначається з нерівності $p_f\le v<p_{f+1}$. З умови теореми випливає, що π^f є лексикографічно мінімальною k_f -вибіркою з множини N_f'. Враховуючи, що елементи мультимножини G задовольняють умові (3), отримуємо, що для будь-якого

$$y\in E_{\eta n}^{ku}\left(G,H\right)\ \left(y_{p_f}^*,y_{p_f+1}^*,\dots,y_{p_{f+1}-1}^*\right)\le_l\left(y_{p_f},y_{p_f+1},\dots,y_{p_{f+1}-1}\right).$$

Зокрема,

$$\left(y_{p_f}^*,y_{p_f+1}^*,\dots,y_{p_{f+1}-1}^*\right)\le_l\left(\tilde{y}_{p_f},\tilde{y}_{p_f+1},\dots,\tilde{y}_{p_{f+1}-1}\right). \qquad (12)$$

Оскільки $y_v^*=x_{q_v}^*=x_t^*>\tilde{x}_t=\tilde{y}_v$, то рівність в умові (12) місця не має і знайдеться такий індекс $p_f\le\tau<v<p_{f+1}$, що $y_\tau^*<\tilde{y}_\tau$. А тоді також $x_{q_\tau}^*<\tilde{x}_{q_\tau}$, причому зі способу упорядкування величин $c_{q_i}-\Phi^*d_{q_i}$ випливає, що $q_\tau < q_\nu = t$ (оскільки $c_{q_\tau} - \Phi^* d_{q_\tau} = c_{q_\nu} - \Phi^* d_{q_\nu}$ і $\tau < \nu$). Отримали суперечність з тим фактом, що t — найменший індекс такий, що $\tilde{x}_t \neq x_t^*$. **Теорема доведена.**

Аналогічна теорема має місце і для випадку максимізації.

Висновки. У роботі обґрунтовано критерії лексикографічної екстремалі лінійної та дробово-лінійної функцій на загальній множині розміщень. Отримані властивості можуть використовуватися при дослідженні інших класів оптимізаційних задач, у тому числі з різними видами невизначеності.

Список використаних джерел:

1. Сергиенко И. В., Шило В. П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. Киев : Наук. думка, 2003. 261 с.
2. Згуровский М. З., Павлов А. А. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами. Киев : Наук. думка. 2010. 573 с.
3. Стоян Ю. Г., Ємець О. О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Київ : Інститут системних досліджень освіти, 1993. 188 с.
4. Емец О. А., Барболина Т. Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. Київ : Наук. думка, 2008. 159 с.
5. Емец О. А., Барболина Т. Н. Свойства комбинаторных оптимизационных безусловных задач на размещениях с линейной и дробно-линейной целевыми функциями. *Проблемы управления и информатики.* 2017. № 1. С. 66–76.
6. Емец О. А., Барболина Т. Н. Полиномиальный метод решения безусловной дробно-линейной задачи комбинаторной оптимизации на размещениях. *Проблемы управления и информатики.* 2017. № 2. С. 27–36.

PROPERTIES OF EUCLIDEAN PROBLEMS OF LEXICOGRAPHIC COMBINATORIAL OPTIMIZATION ON ARRANGEMENTS

In the paper Euclidean problems of lexicographic combinatorial; optimization are discussed. These problems are to find lexicographically minimal (for minimization problems) or lexicographically maximal (for maximization problems) points among those that give the extremum of the objective function on a given Euclidean combinatorial set. The properties of linear and linear-fractional problems of lexicographic combinatorial optimization on a general set of arrangements are substantiated. The results obtained in the work are based on the previously known criteria of extremals of linear and linear-fractional functions on arrangements: any extremal is an element of certain set of polyarrangements (for linear problems the form of the extremal set is established explicitly, for linear-fractional problems the polyarrangement set is formed on the basis of some known extremal). In the paper we substantiate the form of points that are an lexicographic minimal and lexicographic maximal of linear function on the general set of arrangements. In particular if elements of multiset are in nondecreasing order, coefficients of objective function are in nonincreasing order and *s* is the least index such that corresponding coefficient of objective function is negative, tehn lexicographic minimal if formed as $s-1$ first and $k-s+1$ (k is the dimension of space) last elements of multiset which are in nondecreasing order. For problems with linear-fractional function we obtain the method of forming solution of lexicographic combinatorial problem on arrangements, if any minimal (for minimization problems) or any maximal (for maximization problems) of objective function on given set of arrangements is known. In this case ordering of components of the extremal is carried out taking into account ordering for nonincreasing of coefficients of special linear function.

Key words: *combinatorial optimization, Euclidean problems of lexicographic combinatorial optimization, optimization problems on arrangements.*

Одержано 31.01.2019

УДК 512.61:519.61
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.11-17

Є. Ф. Галба, д-р фіз.-мат. наук,
Н. А. Варенюк, канд. фіз.-мат. наук,
Н. І. Тукалевська, канд. фіз.-мат. наук

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, м. Київ

ЗВАЖЕНЕ СИНГУЛЯРНЕ РОЗВИНЕННЯ МАТРИЦЬ ТА МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗВАЖЕНОЇ ПСЕВДОІНВЕРСІЇ З ВИРОДЖЕНИМИ ВАГАМИ

На основі зваженого сингулярного розвинення матриць з виродженими вагами отримано зображення зважених псевдообернених матриць з виродженими вагами та їх розвинення в матричні степеневі ряди і матричні степеневі добутки. Отримано граничні зображення зважених псевдообернених матриць, на основі яких побудовано та досліджено регуляризовані методи обчислення зважених нормальних псевдорозв'язків з виродженими вагами.

Ключові слова: *зважене сингулярне розвинення матриць з виродженими вагами, зважені псевдообернені матриці.*

Вступ. Вперше сингулярне розвинення матриць отримано у монографії [1]. У роботах [2, 3] отримано зважене сингулярне розвинення матриць з додатно-означеними вагами. У ряді робіт (див. [4, 5] та наявну там бібліографію) отримано зважене сингулярне розвинення матриць з виродженими вагами на основі ортогональних, зважених ортогональних та зважених псевдоортогональних матриць. У цих роботах визначені достатні умови існування запропонованих варіантів зваженого сингулярного розвинення матриць з виродженими вагами, а у роботі [4] визначено необхідні та достатні умови, при яких існує побудоване зважене сингулярне розвинення матриць з виродженими вагами на основі ортогональних матриць.