УДК 519.64;519.65
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.22-28

В. К. Задірака, д-р фіз.-мат. наук, професор, академік НАН України,
Л. В. Луц, канд. фіз.-мат. наук

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, м. Київ

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ ШВИДКООСЦИЛЮЮЧИХ ФУНКЦІЙ НА КЛАСАХ ФУНКЦІЙ

Наведені елементи теорії побудови (при даній інформації про підінтегральну функцію) оптимальних за точністю квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій для певних класів підінтегральних функцій.

Як осцилюючі функції розглядаються: $e^{-i\omega x}$, $e^{i\omega g(x)}$, $\sin\omega x$, $\cos\omega x$, вейвлет-функція $\psi(x)$ з компактним носієм, $J_m(\omega x)$ — функції Бесселя першого роду порядку m.

Отримані результати для перелічених осцилюючих функцій дали змогу створити теорію оптимального інтегрування швидкоосцилюючих функцій як у класичній постановці, так і для інерполяційних класів функцій.

Значна увага приділена виявленню та уточненню апріорної інформації про підінтегральну функцію та її використання для звуження звичайних (класичних) класів підінтегральних функцій до інтерполяційних [1]. Функції, які входять у такі (інтерполяційні) класи, не розрізняються квадратурними формулами (для всіх них наближене значення інтегралу буде одне і те ж саме).

Друга особливість результатів полягає (на відміну від результатів усіх інших авторів) в припущенні наближеного задання вхідної інформації про підінтегральну функцію. Розгляд інтерполяційних класів дозволяє підвищити потенційну спроможність квадратурних формул.

Аналізуються комп`ютерні технології (КТ) інтегрування швидкоосцилюючих функцій з заданою точністю.

Ключові слова: *квадратурна формула, метод капелюхів, метод граничних функцій, апріорна інформація, функції Бесселя, комп`ютерна технологія.*

Вступ. При розв`язанні ряду важливих класів задач, таких як задачі математичної фізики, цифрової обробки сигналів і зображень, прикладної статистики, моделювання оптичних систем та синтезованих голограм, аналіз і синтез мовних сигналів, математичного моделювання, інформаційної безпеки, виникає необхідність в обчисленні швидкоосцилюючих інтегралів вигляду

$$I(\omega) = \int_a^b f(x) \begin{Bmatrix} e^{-i\omega x} \\ e^{i\omega g(x)} \\ \sin \omega x \\ \cos \omega x \\ \psi\left(\frac{x-t}{s}\right) \\ J_m(\omega x) \end{Bmatrix} dx \tag{1}$$

у припущенні, що $f(x) \in F$, F — деякий[1] клас функцій, заданих на відрізку $[a,b]$, $|\omega| \geq 2\pi(b-a)$, інформація про значення $f(x)$ задається не більше ніж в N вузлових точках $\{x_i\}_0^{N-1}$ з $[a,b]$.

Відмінність отриманих результатів від результатів Л. Файлона, Л. Коллатца, В. І. Крилова, М. В. Ніколаєвої, В. Л. Рвачова, М. С. Бахвалова, Я. М. Жилєйкіна, Б. Ейнарсона та інших дослідників полягає у наступному:

- інформація про $f(x)$ задана наближено;
- $f(x)$ занурюється у більш вузькі інтерполяційні класи функцій F_N, $F_{N,\varepsilon}$;
- використовуються алгоритми виявлення та уточнення апріорної інформації (гладкість, області монотонності, кількість точок перегину, опуклість, константа та показник Гельдера та ін.) [3];
- для деяких класів вдалося побудувати оптимальні за точністю або асимптотично оптимальні квадратурні формули;
- запропоновані КТ розв'язання задач інтегрування швидкоосцилюючих функцій.

Це дозволяє зменшити чебишевський радіус області невизначеності значень інтегралу та покращити потенційну спроможність квадратурних формул.

Постановка задачі. Позначимо $R = R(f, A, \omega)$ — результат наближеного обчислення $I(\omega)$ за допомогою квадратурної формули A.

Введемо характеристики:

$$V(f, A, \omega) = \rho(I(\omega), R),\ V(F, A, \omega) = \sup_{f \in F} V(f, A, \omega),$$

$$V = V(F, \omega) = \inf_A V(F, A, \omega), \tag{2}$$

[1] Результати отримані для 45 класів підінтегральних функцій F, F_N, $F_{N,\varepsilon}$ [2].

де $\rho\left(I(\omega),R\right)=\left|I-R\right|$ — похибка чисельного інтегрування. Квадратурну формулу A^*, на якій досягається $V=V\left(F,\omega\right)$, назвемо оптимальною за точністю. Якщо для квадратурної формули $\overline{A}$ виконується $V(F,\overline{A},\omega)\le V\left(F,\omega\right)+\eta$, то $\overline{A}$ назвемо оптимальною з точністю до η. Якщо $\eta=o\left[V\left(F,\omega\right)\right]$ або $\eta=O\left[V\left(F,\omega\right)\right]$, то $\overline{A}$ назвемо відповідно асимптотично оптимальною або оптимальною за порядком точності. Для отримання оцінок похибки чисельного інтегрування $I\left(\omega\right)$ на класах підінтегральних функцій F використовується метод «капелюхів» [1]. Він дозволяє отримати оцінку *V*, а не її саму. Це обумовлює застосовність даного методу для побудови лише оптимальної з точністю до η квадратурної формули.

Підвищення «потенційної спроможності» квадратурних формул може бути здійснене шляхом «звуження» відповідного класу *F* на інтерполяційні класи F_N, які визначаються належністю класу *F* та ще 2*N* фіксованими значеннями інформаційного оператора: $\left\{x_i\right\}_0^{N-1}$ і $\left\{f_i\right\}_0^{N-1}$. В цьому випадку можна ввести за аналогією з (2) характеристики:

$$\delta(f,A,\left\{f_i\right\}_0^{N-1},\omega)=\rho(I,R),$$

$$\delta(F_N,A,\left\{f_i\right\}_0^{N-1},\omega)=\sup_{f\in F_N}\delta(f,A,\left\{f_i\right\}_0^{N-1},\omega),$$

$$\delta=\delta(F_N,\left\{f_i\right\}_0^{N-1},\omega)=\inf_{A}\delta(F_N,A,\left\{f_i\right\}_0^{N-1},\omega), \tag{3}$$

і визначити оптимальні за точністю, асимптотично оптимальні і оптимальні за порядком точності квадратурні формули на класі F_N.

Для побудови й обґрунтування оптимальних за точністю і близьких до них квадратурних формул обчислення $I(\omega)$ в класах F_N застосовується метод граничних функцій [1].

Для прикладу розглянемо побудову оптимальних за точністю квадратурних формул обчислення інтегралу $I_1(\omega)=\int\limits_a^b f(x)\sin\omega x dx$ та оцінок їх похибки на класі $C_{L,N}$ ($C_{L,N}$ — інтерполяційний клас визначених на [*a*, *b*] функцій, що задовольняють умові Ліпшиця $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le L\left|x_1-x_2\right|,\ x_1,x_2\in\left[a,b\right]$).

Теорема 1. Нехай $f\left(x\right)\in C_{L,N}$, $\left[\left|\omega\right|\left(b-a\right)/\pi\right]+1$ нулів функції $\sin\omega x$ на $\left[a,\,b\right]$ входять в число вузлів x_i, $i=\overline{0,N-1}$, і $\omega>0$. Тоді для похибки обчислення $I_1(\omega)$ справедлива наступна оцінка знизу:

$$\delta\left(C_{L,N},\{f_\upsilon\}_0^{N-1},\{x_\upsilon\}_0^{N-1},\omega\right)\ge$$

$$\ge\begin{cases}\dfrac{4L}{\omega^2}\sum\limits_{\upsilon=0}^{N-1}\left\{\sin^2\dfrac{\omega\Delta x_\upsilon}{4}-\sin^2\dfrac{\omega|\Delta f_\upsilon|}{4L}\right\}\left|\sin\left(\dfrac{\omega}{2}(x_\upsilon+x_{\upsilon+1})\right)\right|+P(\omega),\ N\ge|\omega|,\\ \dfrac{L}{\omega}\left\{\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{\pi}{\omega+\pi}-\dfrac{4}{\omega}\sum\limits_{\upsilon=0}^{\omega/\pi}\sin^2\dfrac{\omega|\Delta f_\upsilon|}{4L}\right\},\ N=\left[\dfrac{\omega}{\pi}\right]+1,\end{cases} \quad (4)$$

де $P(\omega)=\dfrac{L}{2}\left|\dfrac{2}{\omega}\sin\dfrac{\omega\Delta x_{N-1}}{2}\cos\left(\omega\left(1-\dfrac{\Delta x_{N-1}}{2}\right)\right)-(1-x_{N-1})\cos\omega\right|$, $\Delta f_\upsilon=$ $=f_{\upsilon+1}-f_\upsilon$, причому квадратурна формула

$$R_1(\omega)=\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}f_1^*(x)\sin\omega x\,dx\,, \quad (5)$$

$$f_1^*(x)=\begin{cases}\left.\begin{array}{ll}f_\upsilon\ , & x_\upsilon\le x\le \bar{x}_\upsilon,\\ f_\upsilon+L(x-x_\upsilon)\,sign(\Delta f_\upsilon), & \bar{x}_\upsilon\le x\le \bar{\bar{x}}_\upsilon,\\ f_{\upsilon+1}\ , & \bar{\bar{x}}_\upsilon\le x\le x_{\upsilon+1},\end{array}\right\}x\notin[x_{N-1},x_N]\ ,\\ f_{N-1}\ , \quad x_{N-1}\le x\le x_N,\end{cases}$$

$$\bar{x}_\upsilon=\frac{x_\upsilon+x_{\upsilon+1}}{2}-\frac{|\Delta f_\upsilon|}{2L},\ \bar{\bar{x}}_\upsilon=\frac{x_\upsilon+x_{\upsilon+1}}{2}+\frac{|\Delta f_\upsilon|}{2L},$$

є оптимальною за точністю при $N\ge|\omega|$ і $N=\left[|\omega|/\pi\right]+1$.

Доведення проводиться методом граничних функцій. Спочатку будуються мажоранта і мінoранта $f^{\pm}(x)$ класу $C_{L,N}$. Очевидно, що клас функцій $C_{L,N}$ на кожному $[x_\upsilon\ ,x_{\upsilon+1}]$ обмежений прямими $f_\upsilon\pm L(x-x_\upsilon)$ і $f_{\upsilon+1}\pm L(x_{\upsilon+1}-x)$, які попарно перетинаються в точках $\bar{x}_\upsilon$ и $\bar{\bar{x}}_\upsilon$ (рисунок).

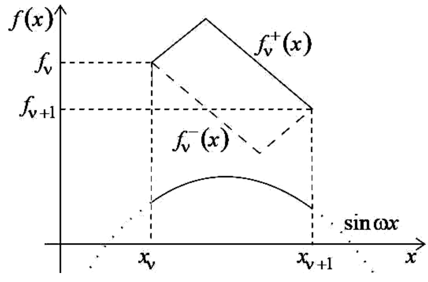

Рисунок. *Загальний вигляд функцій* $f^+(x),\,f^-(x)\in C_{L,N}$

Враховуючи знак функції $\sin\omega x$ на відрізку $\left[x_\upsilon, x_{\upsilon+1}\right]$ та окремо розглядаючи відрізки $\left[x_\upsilon, \bar{x}_\upsilon\right]$, $\left[\bar{x}_\upsilon, \bar{\bar{x}}_\upsilon\right]$, $\left[\bar{\bar{x}}_\upsilon, x_{\upsilon+1}\right]$, знаходимо аналітичні вирази для $f^{\pm}(x)$. Скориставшись ними, будуємо чебишевський центр і чебишевський радіус області невизначеності розв'язку задачі (1), які є відповідно квадратурною формулою $R_1(\omega)$ і оптимальною оцінкою δ її похибки на класі $C_{L,N}$.

Аналогічний результат отриманий для $f(x) \in C_{L,N,\varepsilon}$, де $C_{L,N,\varepsilon}$ — клас функцій $C_{L,N}$ з наближено заданою апріорною інформацією про значення $f(x)$: $\left|\tilde{f}_i - f_i\right| \le \varepsilon_i$, $i = \overline{0, N-1}$. Для побудови граничних функцій $f^{\pm}(x) \in C_{L,N,\varepsilon}$ попередньо проводиться згладжування вхідних даних і уточнення ε_i шляхом розв`язання деякої системи нерівностей [1]. В роботі [4] отримані оцінки повної похибки побудованих квадратурних формул.

При неточно заданій апріорній інформації про клас пропонуються близькі до оптимальних за точністю квадратурні формули обчислення $I(\omega)$ на основі методів нев'язки, квазірозв`язків. У роботі [3] розроблений алгоритм виявлення та уточнення порядку похідної функції, показника Гельдера та константи Ліпшиця, яким вона задовольняє, при сітково заданому інформаційному операторі.

Для випадку чисельного інтегрування перетворення Бесселя

$$I_m(\omega) = \int_a^b f(x) J_m(\omega x)\, dx ,$$

де $J_m(\omega x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{\omega x}{2}\right)^{2k+m}$ — функція Бесселя першого роду порядку m, в [2] при $[a,b] = [0,1]$ запропоновано квадратурні формули типу Файлона

$$I_m(\omega) \approx R_{m,1}(\omega) = \int_0^1 P(x) J_m(\omega x)\, dx , \tag{6}$$

$$I_m(\omega) \approx R_{m,2}(\omega) = \int_0^1 S(x) J_m(\omega x)\, dx , \tag{7}$$

де $P(x)$ — параболічний сплайн, що будується на $[i/N, (i+1)/N]$ у вузлах $c_{1,i} = i/N$, $c_{2,i} = (2i+1)/2N$, $c_{3,i} = (i+1)/N$, $S(x)$ — ермітовий кубічний сплайн, що будується на $[i/N, (i+1)/N]$ у вузлах $c_{1,i} = i/N$, $c_{2,i} = (i+1)/N$, $i = \overline{0, N-1}$. Для квадратурних формул (6) та (7) справедливі такі оцінки похибки відповідно:

$$V\left(f, R_{m,1}, \omega\right) \frac{\sqrt{3}Ah^3}{36\sqrt[3]{\omega}} \max_{0 \le x \le 1} \left| f^{(3)}(x) \right|,$$

$$V\left(f, R_{m,2}, \omega\right) \le \frac{Ah^4}{384\sqrt[3]{\omega}} \max_{0 \le x \le 1} \left| f^{(4)}(x) \right|,$$

де $h = 1/N$, $\omega \ge 1$, A — деяка константа.

У монографії [2] обгрунтовано і покроково описано інформаційно-комп`ютерну технологію обчислення інтеграла (1) з заданими значеннями характеристик якості розв`язку, яка дозволяє залучати і ефективно використовувати для розв`язання задачі (1) необхідні резерви оптимізаціїї обчислень.

Висновки. Наведені елементи теорії побудови оптимальних за точністю квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій (1) на класах функцій, яка, на відміну від інших результатів, відбувається за умов найповнішого врахування апріорної інформації про $f(x)$. Поряд з класами F розглядаються інтерполяційні класи F_N, та класи $F_{N,\varepsilon}$ з наближеним заданням інформації.

Список використаних джерел:

1. Задирака В. К. Теория вычисления преобразования Фурье. Киев : Наук. думка, 1983. 215 с.
2. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М. та ін. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування: у 2 т. Київ : Наук. думка, 2011. Т. 1: Алгоритми. 448 с.; Т. 2.: Застосування. 348 с.
3. Луц Л. В., Задірака В. К. Наближене інтегрування швидкоосцилюючих функцій з виявленням і уточненням апріорної інформації. *Математичне та комп`ютерне моделювання.* 2017. Вип. 15. С. 100–106.
4. Луц Л. В. Оцінка якості деяких квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій. *Штучний інтелект*. 2008. №.4. С. 671–682.

THE ELEMENTS OF THE THEORY OF THE OPTIMAL INTEGRATION OF HIGHLY OSCILLATING FUNCTIONS ON CLASSES OF FUNCTIONS

The elements of the theory of construction (with given information on the integral function) of the optimal quadrature formulas for calculating the integrals of highly oscillatory functions for certain classes of integral functions are presented.

As oscillatory functions are considered: $e^{-i\omega x}$, $e^{i\omega g(x)}$, $\sin \omega x$, $\cos \omega x$, wavelet-function $\psi(x)$ with compact carrier, $J_m(\omega x)$ — Bessel functions of the first kind of order *m*.

The obtained results for the listed oscillatjry functions allowed us to create a theory of optimal integration of highly oscillatory functions both in classical formulation and for interpolation classes of functions.

Considerable attention is paid to the identification and refinement of a priori information about the integral function and its use for narrowing the usual (classical) classes of integral functions to interpolation classes [1]. The functions included in such (interpolation) classes do not differ in quadrature formulas (the approximate integral value will be the same for them all).

The second feature of the results is (in contrast to the results of all other authors) in the assumption of an approximate input of information about the integral function. Examining interpolation classes can increase the potential of quadrature formulas.

Computer technologies (CTs) of the integration of highly oscillatory functions with given accuracy are analyzed.

Key words: *quadrature formula, cap method, method of boundary functions, a priori information, Bessel functions, computer technology*.

Одержано 29.01.2019

УДК 004.056.55
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.28-34

О. Г. Качко*, канд. техн. наук,
С. О. Кандій,** студент,
Є. В. Острянська,** студент

*АТ «Інститут інформаційних технологій», м. Харків,
**Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Харків

ОПТИМІЗАЦІЯ ФУНКЦІЇ МНОЖЕННЯ ПОЛІНОМІВ ДЛЯ ЗВИЧАЙНОЇ ТА PRODUCT ФОРМИ ЗАДАННЯ ОДНОГО З ПОЛІНОМІВ

У роботі проведено дослідження та виконано розробку ефективного алгоритму множення тернарного полінома у кільці $Z_3[x]\left(x^n - x - 1\right)$ з урахуванням його структури. Розглядаються варіанти для поліномів із звичайною структурою з фіксованою кількістю ненульових елементів «1» («–1») та у PRODUCT-формі, у якій поліном є результатом обчислення $F_1 * F_2 + F_3$, де $F_1, F_2, F_3 \in Z_3[x]\left(x^n - x - 1\right)$ та мають відповідно d_1, d_2, d_3 елементів із значеннями «1» та «–1». Приводяться результати оптимізації за допомогою векторизованих наборів інструкцій (а саме, набір інструкцій AVX2), розпаралелювання та спеціальних засобів для мінімізації та компенсування використання не