УДК 518.25
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-20.79-91

Л. М. Семчишин, канд. фіз.-мат. наук,
О. Б. Павелчак-Данилюк, канд. тех. наук

Чортківський навчально-науковий інститут підприємництва і бізнесу
Тернопільський національний економічний університет, м. Чортків

РОЗВ'ЯЗАННЯ БЛОЧНОЇ СИСТЕМИ З ЧИСЛОВИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ В СЕРЕДОВИЩІ MATLAB

У роботі запропоновано новий підхід до блочної системи лінійних алгебраїчних рівнянь із числовими елементами. Розглянено метод розв'язування систем із деякими найхарактернішими способами заповнення. Розв'язок системи знаходимо у вигляді відношення двох поліномів, а невідомі обчислюємо методом невизначених коефіцієнтів. Згрупувавши члени при однакових степенях і для визначення невідомих коефіцієнтів отримано систему, для розв'язування якої використано алгоритм схеми розрізання. Для цього матрицю системи розділено на блоки. Розв'язування отриманих систем вимагало деяких проміжних матричних операцій. Таким чином при повній реалізації алгоритму схеми розрізання для системи виконано ряд арифметичних операцій. Показано високу точність запропонованого методу розв'язання.

Для розв'язання блочної системи лінійних алгебраїчних рівнянь з числовими елементами в середовищі MatLab написана і протестована функція ESSELS. Ця функція реалізує алгоритм розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом відсічених систем. Цей алгоритм дозволяє розв'язати системи рівнянь як у випадку симетричного заповнення (кількість піддіагоналей дорівнює кількості наддіагоналей), так і тоді, коли кількість піддіагоналей та наддігоналей матриці різна. Для порівняння із штатними програмами лінійної алгебри пакета MatLab написано невелику програму**.** Вона реалізує процедуру розв'язання блочної системи лінійних алгебричних рівнянь з числовими елементами засобами MatLab. Проведено результати порівняння в таблиці. Запропоновані алгоритми для даної тестової системи середньої розмірності мають суттєві переваги у порівнянні із стандартними функціями пакету MatLab. Протестовано алгоритм розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь з числовими елементами в середовищі MatLab. У роботі показано ефективність запропонованого алгоритму. Теоретичну та методологічну основу дослідження складають методи оптимізації та математичного моделювання.

Запропонований алгоритм може ефективно використовуватися в системах комп'ютерної алгебри та для аналітично-числового розв'язування інженерних та прикладних задач.

Ключові слова: *блочна система, числові елементи, відношення двох поліномів, метод невизначених коефіцієнтів, складність алгоритму, тестування алгоритму.*

Вступ. Одним із актуальних задач обчислювальної математики є розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Обчислювальна математика вивчає чисельні методи розв'язування різних математичних задач, тобто методи, які ґрунтуються на побудові скінченної послідовності дій над скінченною множиною чисел. Методи обчислення є базовим інструментом математичного моделювання і важливою частиною програмного забезпечення для комп'ютерів усіх поколінь. За умови використання таких обчислювальних методів застосовують математичне моделювання до розв'язку математичної задачі. Тоді розв'язок одержується у вигляді числового результату.

Постановка проблеми. Сьогодні існує й успішно розвивається декілька напрямків і концепцій щодо виконання символьних перетворень. Із комп'ютерних систем універсального характеру широкого розповсюдження набули REDUCE, muMATH, SCRATCHPAD, MATHEMATICA, MAPLE, MatLab, DERIVE, MatCad. З більшим чи меншим успіхом їх можна застосувати для різних задач комп'ютерної алгебри, у тому числі й розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Однак цей розділ ще не настільки високо розвинутий, як методи для блочних систем.

Зупинимося на специфіці побудови ефективних алгоритмів для розв'язання блочної системи з числовими елементами в середовищі MatLab.

Аналіз останніх публікацій. У роботі [5, с. 128–135] запропоновано розв’язання розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами.

Актуальність теми. Розв'язання блочних систем з числовими елементами в середовищі MatLab вимагає застосування ефективних чисельних методів.

Слід зауважити, що питання розв'язання розріджених систем лінійних рівнянь з блочними елементами розглядалися у працях [5, с. 128–135]

Однак, лише в окремих з них розглядаються питання щодо застосування методу відсічених систем в середовищі MatLab [1, 2, 4].

Мета роботи. Метою цієї роботи є дослідження розв’язування блочної системи з числовими елементами. Тестування алгоритмів розв'язання деяких типів систем лінійних алгебраїчних рівнянь з числовими елементами в середовищі MatLab.

Теоретичну та методологічну основу дослідження складають методи оптимізації та математичне моделювання.

Основна частина. Розглянемо метод розв’язування систем із деякими найхарактернішими способами заповнення.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{Y}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)\left[\mathbf{E}-\mathbf{B}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)\right]=\mathbf{C}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m), \qquad (1)$$

в якій $\mathbf{B}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)$ — регулярна матриця розміру $n\times n$ рангу r, елементами якої є многочлени степеня l $\left(l=\overline{1,n}\right)$ від $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$. Кожен мінор k_i -го порядку $(i=\overline{1,m})$ матриці $\mathbf{B}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)$ є поліном. Права частина рівняння є вектор

$$\mathbf{C}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=\left(C_1(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m),C_2(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m),...,C_n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)\right)^{\mathrm{T}}$$

многочленів степеня l від $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$,

$$\mathbf{Y}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=\left(y_1(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m),y_2(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m),...,y_n(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)\right)^{\mathrm{T}}$$

— невідомий вектор.

З метою розв'язання системи (1) розглянемо алгоритм відсічених систем [4], що дозволяє звести системи лінійних алгебраїчних рівнянь з m-мірними λ-матрицями до системи з числовими елементами.

Оскільки $\mathbf{B}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)$ — поліноміальна матриця, а $\mathbf{C}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)$ — вектор, то їх можна подати у вигляді

$$\mathbf{B}(\lambda_1,...,\lambda_m)=\sum_{k_1+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}...\lambda_m^{k_m}\mathbf{B}_{k_1...k_m}$$

та

$$\mathbf{C}(\lambda_1,...,\lambda_m)=\sum_{k_1+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}...\lambda_m^{k_m}\mathbf{C}_{k_1...k_m},$$

де $\mathbf{B}_{k_1...k_m}$ — матриці і $\mathbf{C}_{k_1...k_m}$ — вектори.

Розв'язок системи будемо шукати у вигляді відношення двох поліномів [4]

$$\mathbf{Y}(\lambda_1,...,\lambda_m)=\sum_{k_1+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}...\lambda_m^{k_m}X_{k_1k_2...k_m}\Bigg/\sum_{k_1+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}...\lambda_m^{k_m}Z_{k_1k_2...k_m}, \qquad (2)$$

де $X_{k_1k_2...k_m}$, $Z_{k_1k_2...k_m}$ — скалярні величини.

Невідомі $\mathbf{X}_{k_1k_2...k_m}$ і $Z_{k_1k_2...k_m}$ обчислимо методом невизначених коефіцієнтів. Враховуючи (2), систему (1) запишемо у вигляді

$$\sum_{k_1+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}...\lambda_m^{k_m}X_{k_1...k_m}\left(\mathbf{E}-\sum_{k_1+...+k_m=0}^{nl}\lambda_1^{k_1}...\lambda_m^{k_m}\mathbf{B}_{k_1...k_m}\right)=$$

$$=\sum_{k_1+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}...\lambda_m^{k_m}Z_{k_1...k_m}\sum_{k_1+...+k_m=0}^{nl}\lambda_1^{k_1}...\lambda_m^{k_m}\mathbf{C}_{k_1...k_m}.$$

Звідси матимемо

$$X_{00..0}+\sum_{k_1=1}^{nl}\lambda_1^{k_1}X_{k_10..0}+\ldots+\sum_{k_m=1}^{nl}\lambda_m^{k_m}X_{00..0k_m}+\sum_{k_1+k_2=2}^{nl}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}X_{k_1k_20..0}+\ldots+$$

$$+\sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_t=t\\ t<m}}^{nl}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\ldots\lambda_t^{k_t}X_{k_1k_2..k_t0..0}+\sum_{\substack{k_s+k_r+\ldots+k_p=t\\ t<m}}^{nl}\lambda_s^{k_s}\lambda_r^{k_r}\ldots\lambda_p^{k_p}X_{0..0k_{s..}k_r..k_p0..0}+\ldots+$$

$$+\sum_{\substack{k_{m-t}+\ldots+k_m=t\\ t<m}}^{l}\lambda_{m-t}^{k_{m-t}}\ldots\lambda_m^{k_m}\mathbf{B}_{0..0k_{m-t}k_m}+\ldots+\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=m}^{l}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\ldots\lambda_m^{k_m}\mathbf{B}_{k_1k_2..k_m}=$$

$$=\Bigg[Z_{00..0}+\sum_{k_1=1}^{nl}\lambda_1^{k_1}Z_{k_10..0}+\ldots+\sum_{k_m=1}^{nl}\lambda_m^{k_m}Z_{00..0k_m}+\sum_{k_1+k_2=2}^{nl}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}Z_{k_1k_20..0}+$$

$$+\sum_{\substack{k_{m-t}+\ldots+k_m=t\\ t<m}}^{nl}\lambda_{m-t}^{k_{m-t}}\ldots\lambda_m^{k_m}Z_{0..0k_{m-t}k_m}+\ldots+\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=m}^{nl}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\ldots\lambda_m^{k_m}Z_{k_1k_2..k_m}\Bigg]\times\Big[\mathbf{C}_{00..0}+$$

$$+\sum_{k_1=1}^{l}\lambda_1^{k_1}\mathbf{C}_{k_10..0}+\ldots+\sum_{k_m=1}^{l}\lambda_m^{k_m}\mathbf{C}_{00..0k_m}+\ldots..+\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=m}^{l}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\ldots\lambda_m^{k_m}\mathbf{C}_{k_1k_2..k_m}\Bigg].$$

Якщо згрупувати члени при однакових степенях λ_i, то для визначення невідомих коефіцієнтів $X_{k_1k_2\ldots k_m}$ і $Z_{k_1k_2\ldots k_m}$ одержимо систему

$$X_{00..0}\left(\mathbf{E}-\mathbf{B}_{00..0}\right)-Z_{00..0}\mathbf{C}_{00..0}=0,$$

$$X_{10..0}\left(\mathbf{E}-\mathbf{B}_{00..0}\right)+X_{00..0}\left(\mathbf{E}-\mathbf{B}_{10..0}\right)-\left[Z_{10..0}\mathbf{C}_{00..0}+Z_{00..0}\mathbf{C}_{10..0}\right]=0$$

$$\sum_{k_1=0}^{l}\sum_{\substack{k_2=0\\ k_1+k_2+..+k_m=nl+l}}^{l}\ldots\sum_{k_m=0}^{l}\mathbf{X}_{nl+l-k_1,nl+l-k_2,\ldots,nl+l-k_m}\left(\mathbf{E}-\mathbf{B}_{k_1k_2\ldots k_m}\right)- \quad (3)$$

$$-\sum_{k_1=0}^{l}\sum_{\substack{k_2=0\\ k_1+k_2+..+k_m=nl+l}}^{l}\ldots\sum_{k_m=0}^{l}Z_{nl+l-k_1,nl+l-k_2,\ldots,nl+l-k_m}\mathbf{C}_{k_1k_2\ldots k_m}=0.$$

Для розв'язування отриманої системи (3) використаємо алгоритм схеми розрізання [4]. Для цього систему (3) запишемо у спеціальному вигляді. З цією метою позначимо через $\mathbf{B}_r$ матрицю, елементами якої є матриці $\mathbf{B}_{k_1\ldots k_m}$, сума індексів яких задовольняє умову $\sum_{i=1}^{m}k_i=r\ \left(r=\overline{0,n}\right)$.

Запишемо матриці $\mathbf{B_0}, \mathbf{B_1}, \mathbf{B_2}, ..., \mathbf{B_r}, ..., \mathbf{B_l}$.

Матриця $\mathbf{B_0}$ складається з одного елемента $\mathbf{B_0} = \left(B_{00...0}\right)$.

Матриці $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$ мають розмірність $m \times m$

$$\mathbf{B_1} = \begin{pmatrix} B_{10...0} & 0 & ... & 0 \\ 0 & B_{010...0} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & B_{0...01} \end{pmatrix}, \mathbf{B_2} = \begin{pmatrix} B_{20...0} & B_{110...0} & B_{1010...0} & ... & B_{10...01} \\ 0 & B_{020...0} & B_{0110...0} & ... & B_{010...01} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & B_{0...02} \end{pmatrix}.$$

Матриця $\mathbf{B_3}$ містить m стовпців і $1 + 2 + 3 + \ldots + m = (1 + m)m/2$ рядків

$$\mathbf{B_3} = \begin{pmatrix} B_{30...0} & B_{210...0} & B_{2010...0} & B_{20010...0} & ... & B_{20...010} & B_{20...001} \\ 0 & B_{120...0} & B_{1110...0} & B_{11010...0} & ... & B_{110...010} & B_{110...001} \\ 0 & 0 & B_{1020...0} & B_{10110...0} & ... & B_{1010...010} & B_{1010...01} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & B_{0...030} & B_{0...021} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & B_{0...012} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & B_{0...03} \end{pmatrix}.$$

Аналогічно записуємо матриці $\mathbf{B_4}, \mathbf{B_5}, \mathbf{B_6}, ..., \mathbf{B_l}$, кожна з яких містить m стовпців, а кількість рядків у матриці $\mathbf{B}_l$ не перевищує $(l + m)!/(l!m!)$.

Використовуючи означення тензорного добутку [6], систему (3) запишемо у вигляді

$$\mathbf{X} \otimes \left(\mathbf{E} - \mathbf{B}\right) - \mathbf{Z} \otimes \mathbf{C} = \mathbf{0} \tag{4}$$

або

$$\mathbf{X} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{Z} \otimes \mathbf{C} = \mathbf{0}, \tag{5}$$

де «$\otimes$» — знак тензорного добутку [6].

Систему (5) можна розв'язати за алгоритмом схеми розрізання [1]. Для цього достатньо матрицю системи (5) розділити на блоки $\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix}$, де $\mathbf{M}_{11}$ — квадратна матриця, розміри якої не перевищують $\dfrac{\left(nl + l + m\right)!}{\left(nl + l\right)!m!\left(n+1\right)}$, а $\mathbf{M}_{12}$, $\mathbf{M}_{21}$, $\mathbf{M}_{22}$ — прямокутні матриці відповідних розмірів. Розглядаючи $\left(n+1\right)\dfrac{\left(nl + m\right)!}{\left(nl\right)!m!} - \dfrac{\left(nl + l + m\right)!}{\left(nl + l\right)!m!}$ невідомі як параметри, отримаємо неоднорідну квадратну систему.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

де $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ — вектори, **U** та **V** — невідомі. Порядок цієї системи обмежений числом $\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!}$, а розв'язки дають параметричне сімейство розв'язків системи (6). Таким чином, знаходження невідомих **U** та **V** зводиться до розв'язування двох систем меншого порядку. Вектор **V** визначається з системи

$$\left(\mathbf{M}_{22}-\mathbf{M}_{21}\otimes\left(\mathbf{M}_{11}^{-1}\otimes\mathbf{M}_{12}\right)\right)\otimes\mathbf{V}=\mathbf{N}_2-\mathbf{M}_{21}\otimes\left(\mathbf{M}_{11}^{-1}\otimes\mathbf{N}_1\right), \qquad (7)$$

до того ж $\mathbf{M}_{11}\neq 0$. Невідомий вектор **U** можна знайти з рівнянь

$$\mathbf{M}_{11}\otimes\mathbf{U}=\mathbf{N}_1-\mathbf{M}_{12}\otimes\mathbf{V}.$$

Розв'язування отриманих систем (6) і (7) вимагає деяких проміжних матричних операцій [3]. Для обчислення добутку $\mathbf{M}_{11}^{-1}\otimes\mathbf{N}_1$ достатньо знайти розв'язки систем

$$\begin{bmatrix} B_0 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ B_1 & B_0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & B_0 \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} W_0^{(i)} \\ W_1^{(i)} \\ ... \\ W^{(i)}_{(nl+l+m)!/(nl+l)!m!(n+1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (8)$$

де $i=\overline{0,nl}$. Перш за все, потрібно розв'язати систему для $i=0$, а решта невідомих визначити за співвідношеннями

$$W_0^{(i)}=W_1^{(i)}=...W_{i-1}^{(i)}=0,$$
$$W_i^{(i)}=W_0^{(0)},$$
$$W_{i+1}^{(i)}=W_1^{(0)},$$
$$....................$$
$$W^{(i)}_{\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}}=W^{(0)}_{\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}-1}.$$

$$W_i^{(0)}=B_0^{-1}\times\left[B_i-\sum_{j=1}^{i}B_j\times W_{i-j}^{(0)}\right]\ \left(i=\overline{0,l}\right).$$

Розв'язки системи (8) можна обчислювати за формулами [1]

$$W_i^{(0)}=B_0^{-1}\times\left[B_i-\sum_{j=1}^{i}B_j\times W_{i-j}^{(0)}\right],\ \left(i=\overline{l+1,\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}}\right). \qquad (9)$$

Для знаходження всіх $W_j^{(0)}$ $\left(j=\overline{l+1,\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}}\right)$ треба виконати близько $n^3m\frac{(l+m)!}{l!m!}\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}$ арифметичних операцій.

Обчислення добутків $\mathbf{M}_{21}\times\left(\mathbf{M}_{11}^{-1}\times\mathbf{M}_{12}\right)$ і $\mathbf{M}_{21}\times\left(\mathbf{M}_{11}^{-1}\times\mathbf{N}_{1}\right)$ вимагає виконання $n^3\left[\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}\right]^2$ арифметичних дій. Для визначення невідомих $\mathbf{V}$ з системи $\frac{(nl+l+m)!n}{(nl+l)!m!(n+1)}$ -го порядку треба затратити $O\left(\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!}\right)^{\beta}$ операцій. За алгоритмом відсічених систем $\beta = 3$.

Для знаходження розв’язків системи (8) насамперед треба знайти добуток $\mathbf{M}_{12}\otimes\mathbf{V}$. Для цього необхідно виконати $n^2\left[\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}\right]^2$ операцій, після чого систему можна розв’язати за формулами (9), на що потрібно $n^3\left[\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}\right]^2$ дій. Таким чином, для повної реалізації алгоритму схеми розрізання для системи (8) потрібно виконати

$$n^3\left[\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}\right]^2+O\left(\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!}\right)^{\beta}$$

арифметичних операцій на комп’ютері.

Опис тестування функцією ESSEMP.

Для розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з числовими елементами в середовищі MatLab написана і протестована функція Bl_Essemp. З метою її можливого використання поданий її текст разом з блоком формуванням так званої ε — діагональної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка детально буде описана далі.

```
    ffunction [] =Bl_Essemp( Dimension )
    %-----------------------------------------
    %    << B L E S S E M P >> - процедура для
розв`язання невироджених систем
    % лінійних алгебраїчних рівнянь блочним варіа-
нтом алгоритму відсічених систем.
    % Вхідні параметри:
    % RB - розміри кліток,на які розбита вихідна
матриця системи
    % рівнянь Ax=b;
```

```
    % KB - кількість блоків при розбитті системи;
    % X - одномірний масив розміру RBxKB для збе-
рігання обчислених
    % значень невідомих;
    % Y - одномірний робочий масив довжини N.
    %    -----------------------------------------
    clc
    KB=2; % - кількість блоків системи
    RB=12; % - розмір блоків
    N_Dim=RB*KB;  %  обчислення  загального  порядку
системи
    %   Ввід початкових даних тестової системи
    Epsilon=1;
    for NumEps=1:6
    Epsilon=Epsilon/10
    for i=1 : N_Dim
        for j=1 : N_Dim
            A_sys(i,j)=1.0;
        end
        A_sys(i,i)=1+Epsilon;
        for j=N_Dim+1 : N_Dim+RB
            A_sys(i,N_Dim+j)=0;
        end
        A_sys(i,N_Dim+1)=N_Dim+Epsilon;
    end
    % Тіло програми
    Sum=zeros(RB);
    N=KB;
    N1 =N+1;
    Np=1;
    for i=1 : KB
        for j=1 : KB+1
            i_bgn=(i-1)*RB+1;
            i_end=i*RB;
            j_bgn=(j-1)*RB+1;
            j_end=j*RB;

A(i,j)={A_sys(i_bgn:i_end,j_bgn:j_end)};
            B(i,j)={zeros(RB)};
            X(i,j)={zeros(RB)};
        end
        Y(i)={zeros(RB)};
    end
```

```
    for m=1 : N
              M1 =m-1;
              M2 =m-2;
              MP1=m+1;
              Piv=zeros(RB);
              P=zeros(RB);
              iv =m;
              for i=m : N
                   P=A{i,m};
                   if (m>1)
    for j=1 : M1 P=P-X{j,1}*A{i,j}; end
                   end
    if abs(det(Piv))<abs(det(P))  Piv=P; iv=i; end
                   B{i,m}=P;
              end
              for j=1 : m
                   Sum=B{m,j};
                   B{m,j}=B{iv,j};
                   B{iv,j}=Sum;
              end
              for j=1 : N1
                   Sum=A{m,j};
                   A{m,j}=A{iv,j};
                   A{iv,j}=Sum;
              end
    if   m<N     for   i=MP1   :   N   B{i,m}=B{m,m}^
(-1)*B{i,m}; end
               end
               if m>1  Y{M1}=B{m,M1}; end
               if  m>2 for jr=1 : M2
                             j=m-jr-1;
                             Y{j}=B{m,j};
                             js=j+1;
    for i=js : M1 Y{j}=Y{j}-B{i,j}*Y{i}; end
                           end
                end
                for j=MP1 : N+Np
                      P=A{m,j};
    if m>1  for i=1 : M1  P=P-Y{i}*A{i,j}; end
                end
                      B{m,j}=B{m,m}^(-1)*P;
                end
                X{m,1}=B{m,MP1};
```

```
                  if m>1  for ir=1 :M1
                            i=m-ir;
                            X{i,1}=B{i,MP1};
                            is=i+1;
    for   j=is  :  m   X{i,1}=X{i,1}-B{i,j}*X{j,1};
end
                           end
                  end
                  if m>=N  for j=2 : Np
                              X{m,j}=B{m,N+j};
                              for ir=1 : M1
                                i=m-ir;

X{i,j}=B{i,N+j};
                                is=i+1;
    for  jj=is  :  m  X{i,j}=X{i,j}-B{i,jj}*X{jj,j};
end
                              end
                    end
                  end
    end
    % Вивід результату
     disp('X=');
      for i=1 : KB disp(X{i,1}); end
    end
    end
```

EPSILON-діагональна система лінійних алгебраїчних рівнянь.

Дана система лінійних алгебраїчних рівнянь має матрицю виду:

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+\varepsilon & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Спектральне число обумовленості для даної матриці A_ε є пропорційним величині $1/\varepsilon$. Отже, для достатньо малих значень ε система стає погано обумовленою. Якщо покласти $a_{i,n+1} = n+\varepsilon$ (n - порядок системи), то легко перевірити, що $x_i = 1$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ є точним розв`язком даної системи.

Результати тестування функції ESSEMP для $n = 20$ скопійовані з вікна MatLab і подані в наступній таблиці.

Таблиця 1

Значення ε	**Значення невідомих** x_i
0.1000	1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.000
0.0100	1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.000
1.0000e-003	1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.000
1.0000e-004	1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.000
1.0000e-005	1.0001 1.0001 1.0001 1.0001 1.0001 1.0001 1.0001 1.0001 1.0001 1.0001 1.0001 1.0001 1.0000 0.9999 0.9999 0.9998 0.9999 1.0001 0.9997 1.0001 0.9999 0.9999 0.9999 0.9999
1.0000e-006	0.9948 0.9948 0.9948 0.9948 0.9948 0.9948 0.9948 0.9948 0.9948 0.9948 0.9948 0.9948 1.0222 0.9993 0.9993 0.9888 0.9993 1.0243 1.0076 0.9909 1.0118 1.0118 0.9951 1.0118

Таким чином, невідомі обчислюються достатньо точно і для великих значень спектрального числа обумовленості.

Система лінійних рівнянь з матрицею Дж. Х. Уілкінсона.

Для перевірки наростання похибок заокруглення в методах виключення невідомих за рахунок росту проміжних елементів в процесі перетворення матриці знову скористаємося вже описаною матрицею Дж. Х. Уілкінсона:

$$A_W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

При подібному заповненні матриці в методах виключення невідомих досягається похибка заокруглення порядку $n2^n$. Тут n -порядок системи.

Для спрощення аналізу точності одержаних значень невідомих x_i права частина підібрана таким чином, щоб точний розв'язок був $x_i = i$ для всіх $i = 1, 2, \cdots, n$.

Результати тестування функції Bl_ESSEMP скопійовані з вікна MatLab і подані в наступній таблиці.

Таблиця 2

Порядок n **системи**	**Розмір блоків**	**Значення невідомих** x_i
24	1	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
24	12	1.0e+005 *0.0008 0.0016 0.0031 0.0063 0.0125 0.0250 0.0499 0.0997 0.1992 0.3984 0.7967 1.593412.8269 13.6853 14.4336 14.9931 15.2380 14.9794 13.9656 11.9449 8.9174 5.8899 6.8899 -53.7955

Одержані результати добре узгоджуються з попередніми результатами тестування набору алгоритмів MatLab . Для розмірів блока більших 1 в Bl_ESSEMP використовуються функції MatLab, в яких спостерігається накопичення похибок заокруглення за рахунок значного росту абсолютних величин проміжних результатів обчислень, що характерно для даної матриці.

Висновки. У статті розглянуто новий підхід до розв'язування блочної системи лінійних алгебраїчних рівнянь із числовими елементами. Розв'язок системи отримали у вигляді відношення двох поліномів, а невідомі обчислили методом невизначених коефіцієнтів. Протестовано алгоритм розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь з числовими елементами в середовищі MatLab.

Запропонований алгоритм може ефективно використовуватися в системах комп'ютерної алгебри та для аналітично-числового розв'язування інженерних та прикладних задач.

Список використаних джерел:

1. Воеводин В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы / В. В. Воеводин. — М. : Наука, 1976. — 312 с.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — Москва : Наука, 1967. — 324 с.
3. Дэвенпорт Дж. Компьютерная алгебра / Дж. Дэвенпорт, И. Сирэ, Э. Турнье. — М. : Мир, 1991. — 352 с.
4. Недашковський М. О. Обчислення з λ-матрицями / М. О. Недашковський, О. Я. Ковальчук. — К. : Наук. думка, 2007. — 294 с.
5. Семчишин Л. М. Розв'язання розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами / Л. М. Семчишин // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — Львів, 2007. — Вип. 6. — С. 128–135.
6. Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра / Е. Е. Тыртышников. — М. : Физматлит, 2007. — 480 с.

SOLUTION OF THE BLOCK SYSTEM WITH NUMERICAL ELEMENTS IN THE MATLAB ENVIRONMENT

The new approach to a block system of linear algebraic equations with numerical elements is proposed. A method of unblocking systems with some of the most common ways of filling is considered. We find the solution of the system as the relation of two polynomials, and the unknowns are calculated by the method of uncertain coefficients. By grouping the members at equal degrees and determining unknown coefficients, a system was used to solve them using a cutting scheme algorithm. For this purpose the system matrix is divided into blocks. Unbundling the resulting systems required some intermediate matrix operations. Thus, with the full implementation of the cutting circuit algorithm for the system, a number of arithmetic operations were performed. High accuracy of the proposed method of resolution is shown.

ESSELS has been written and tested to solve a block system of linear algebraic equations with numerical elements in MatLab. This function implements the algorithm for solving systems of linear algebraic equations by the method of truncated systems. This algorithm allows to solve systems of equations in the case of symmetric filling (the number of sub-diagonals is equal to the number of diagonals) and when the number of sub-diagonals and super-diagonals of the matrix is different. A small program is written for comparison with regular MatLab linear algebra programs. It implements the procedure of solving a block system of linear algebraic equations with numerical elements by means of MatLab. The comparison results in the table are given. The proposed algorithms for this medium-sized test system have significant advantages over standard MatLab features. The algorithm for solving a system of linear algebraic equations with numerical elements in the MatLab environment is tested. The efficiency of the proposed algorithm is shown in the paper. The theoretical and methodological basis of the study are the methods of optimization and mathematical modeling.

The proposed algorithm can be effectively used in computer algebra systems and for analytical and numerical solution of engineering and applied problems.

Key words: *sectional system, numerical elements, relation of two polynomials, method of indefinite coefficients, complication of algorithm, testing of algorithm.*

Отримано: 23.08.2019