УДК 517.9
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-20.5-12

С. М. Бак, канд. фіз.-мат. наук

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

ПРО ОБМЕЖЕНІСТЬ ГЛОБАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕСКІНЧЕННОЇ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Стаття присвячена вивченню нескінченновимірної гамільтонової системи, яка описує нескінченну систему лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Ця система представляє собою зчисленну систему звичайних диференціальних рівнянь. Цю систему зручно розглядати як диференціально-операторне рівняння у гільбертовому просторі двохсторонніх послідовностей. Розглядається задача Коші для таких рівнянь у даному просторі. Раніше було доведено, що ця задача за певних умов має єдиний локальний і глобальний розв'язки. Локальна розв'язність випливає зі стандартних результатів для диференціальних рівнянь у банахових просторах. Основними умовами тут є просторова періодичність коефіцієнтів оператора лінійної взаємодії осциляторів та неперервність за Коші нелінійності (яка визначається як похідна зовнішнього потенціалу системи осциляторів). Для встановлення глобальної розв'язності було використано подання даної системи у гамільтоновому вигляді. Нагадаємо, що з фізичної точки зору гамільтоніан представляє собою повну енергію системи, тобто суму кінетичної і потенціальної енергії. Основними умовами, крім згаданих вище, тут є недодатність оператора лінійної взаємодії між осциляторами та напівобмеженість знизу їх потенціалів. Однак, залишилось відкритим питання, чи є глобальний розв'язок обмеженим. У цій статті встановлено, що за тих самих умов існування глобального розв'язку, якщо оператор лінійної взаємодії недодатний, а зовнішній потенціал на нескінченності є нескінченно великим (рівномірно за обома просторовими змінними), або ж оператор лінійної взаємодії є від'ємно визначеним, то цей розв'язок обмежений для будь-яких початкових даних з даного простору послідовностей. Для доведення було використано той факт, що гамільтоніан системи на початкових даних зберігає стале значення.

Ключові слова: *нелінійні осцилятори, двовимірна ґратка, задача Коші, глобальний розв'язок.*

Вступ. Нескінченновимірні гамільтонові системи широко використовуються для моделювання складних квантових явищ. Зокрема, останнім часом значну увагу приділяють моделям, дискретним за просторовою змінною. Серед рівнянь, які описують такі моделі, найбільш відомими є рівняння ланцюгів осциляторів, дискретне рівняння sin-Ґордона, система Фермі-Пасти-Улама, дискретне нелінійне рівняння Шредінгера.

Серед розв'язків таких систем особливої уваги заслуговують біжучі хвилі. У статтях [2; 4; 5; 13; 17; 20; 21] досліджено питання існування біжучих хвиль в системах осциляторів на двовимірній ґратці. В той же час для систем Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці відомі декілька праць [6; 18], в яких отримано умови існування періодичних та відокремлених біжучих хвиль. В статтях [3; 9; 15; 16] вивчались біжучі хвилі для дискретного рівняння sin-Ґордона на двовимірній ґратці.

У статтях [1; 24] вивчалися періодичні розв'язки в системах осциляторів на двовимірній ґратці.

Ще одним важливим класом розв'язків є стоячі хвилі. В статтях [7; 8; 11] досліджувалось питання існування стоячих хвиль для дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера на двовимірній ґратці. В статтях [22] і [23] досліджувалася задача дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера на одновимірній ґратці.

Питання коректності задачі Коші для систем осциляторів вивчалося в статтях [10; 12; 14; 19].

Метою статті є одержання умов обмеженості глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці.

Постановка задачі. У цій статті вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ — узагальнена координата (n,m)-го осцилятора в момент часу t. Передбачається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{n,m} &= -U'_{n,m}(q_{n,m}) + a_{n-1,m}\left(q_{n-1,m} - q_{n,m}\right) - a_{n,m}\left(q_{n,m} - q_{n+1,m}\right) + \\ &+ b_{n,m-1}\left(q_{n,m-1} - q_{n,m}\right) - b_{n,m}\left(q_{n,m} - q_{n,m+1}\right),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь.

Розглядаються такі розв'язки системи (1), що

$$\lim_{n,m\to\pm\infty} q_{n,m}(t) = 0, \tag{2}$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Потенціал $U_{n,m}(r)$ запишемо у вигляді $U_{n,m}(r) = -\dfrac{d_{n,m}}{2} r^2 + V_{n,m}(r)$ і покладемо $c_{n,m} = d_{n,m} - a_{n-1,m} - a_{n,m} - b_{n,m-1} - b_{n,m}$. Тоді рівняння (1) матиме вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + \\ + c_{n,m}q_{n,m} - V'_{n,m}(q_{n,m}),\ (n,\ m) \in \mathbb{Z}^2. \tag{3}$$

Враховуючи граничні умови (2), це рівняння зручно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q), \tag{4}$$

де

$$(Aq)_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m},$$

(такі оператори вивчалися в [6, с. 597]), а нелінійний оператор B визначається формулою

$$(B(q))_{n,m} = V'_{n,m}(q_{n,m}) \tag{5}$$

у просторі $l^2 = l^2(\mathbb{Z}^2)$ дійсних послідовностей $q = \{q_{n,m}\}$ зі скалярним добутком

$$\left(q^{(1)},\ q^{(2)}\right) = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} q^{(1)}_{n,m}\, q^{(2)}_{n,m}.$$

Норму в $l^2 = l^2(\mathbb{Z}^2)$ позначатимемо $\|\cdot\|$.

Далі нам також знадобиться простір l^∞ — банахів простір обмежених послідовностей з нормою

$$\|q\|_{l^\infty} = \sup_{n,m\in\mathbb{Z}} |q_{n,m}|.$$

Зауважимо, що рівняння (3) у просторі l^2 можна подати у гамільтоновому вигляді

$$\begin{cases} \dot{p} = -H'_q(p,q), \\ \dot{q} = H'_p(p,q); \end{cases}$$

з гамільтоніаном

$$H(p,q) = \frac{1}{2}\left(\|p\|^2 - (Aq,q)\right) + \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} V_{n,m}(q_{n,m}),$$

де $p = \dot{q}$.

За означенням, розв'язком рівняння (4) вважається двічі неперервно диференційовна функція від t зі значеннями в l^2.

Припускається, що виконуються умови:

(i) послідовності $\{a_{n,m}\}$ і $\{c_{n,m}\}$ дійсних чисел обмежені;

(ii) $V_{n,m}(r)$ — функція класу C^1 на $\mathbb{R}$, причому $V_{n,m}(0) = V'_{n,m}(0) = 0$ і для будь-якого $R > 0$ існує таке $C = C(R) > 0$, що для всіх $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\left|V'_{n,m}(r_1) - V'_{n,m}(r_2)\right| \le C\left|r_1 - r_2\right|, \quad \left|r_1\right|, \left|r_2\right| \le R. \tag{6}$$

З умови (i) випливає, що A є обмеженим самоспряженим оператором в l^2 (див., наприклад, [6, с. 509]).

Задача Коші для рівняння (4) полягає у знаходженні розв'язку, який задовольняє початкові умови:

$$q(0) = q^{(0)}, \ \dot{q}(0) = q^{(1)}. \tag{7}$$

Основний результат. У статті показано, що за виконання умов (i), (ii), якщо $q(t)$ — розв'язок рівняння (1) зі значеннями в l^2, то $H\left(\dot{q}(t), q(t)\right) = H\left(q^{(1)}, q^{(0)}\right) = const.$

Справедлива така теорема.

Теорема 1. Нехай виконуються умови (i), (ii) та оператор A недодатний, тобто $(Aq, q) \le 0$ для будь-якого $q \in l^2$. Крім того, нехай виконується одна із наступних умов:

(a) $V_{n,m}(r) \ge 0$ для всіх $n, m \in \mathbb{Z}$ і $r \in \mathbb{R}$;

(b) існує така неспадна функція $h(\xi)$, визначена для $\xi \ge 0$, що $\lim\limits_{\xi \to +\infty} h(\xi) = +\infty$ і $V_{n,m}(r) \ge h(|r|)$ для всіх $n, m \in \mathbb{Z}$ і $r \in \mathbb{R}$.

Тоді для будь-яких початкових даних $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$ задача (4), (7) має єдиний розв'язок, визначений при всіх $t \in \mathbb{R}$.

Наступна теорема, яка встановлює обмеженість глобального розв'язку задачі Коші, є основним результатом цієї статті:

Теорема 2. Нехай виконуються умови (i), (ii) та $V_{n,m}(r) \ge 0$ для всіх $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ і $r \in \mathbb{R}$. Тоді

(a) якщо оператор A недодатний та $\lim\limits_{r \to \pm\infty} V_{n,m}(r) = +\infty$ (рівномірно по $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$), то єдиний розв'язок задачі (4), (7) з початковими даними початкових даних $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$ є обмеженою функцією на зі значеннями в l^∞. Крім того, якщо для деякого $s \ge 2$ існують $R > 0$ і $c > 0$ такі, що

$$V_{n,m}(r) \ge c|r|^s, \ \forall r \in [-R, R] \text{ і } (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{8}$$

то розв'язок є обмеженою функцією на $\mathbb{R}$ зі значеннями в l^s.

(b) якщо оператор A від'ємно визначений, тобто то єдиний розв'язок задачі (4), (7) з початковими даними початкових даних є обмеженим на $\mathbb{R}$ зі значеннями в l^2.

Доведення. У випадку (a) маємо

$$H\left(q(t),\dot{q}(t)\right)=\frac{1}{2}\left[\left\|\dot{q}(t)\right\|^2-\left(Aq(t),q(t)\right)\right]+ \\ +\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}V_{n,m}\left(q_{n,m}(t)\right)=H\left(q^{(0)},q^{(1)}\right), \tag{9}$$

оскільки гамільтоніан H зберігає своє значення. Звідси, в силу недодатності оператора A та невід'ємності потенціалу $V_{n,m}$, маємо

$$V_{n,m}\left(q_{n,m}(t)\right)\le H\left(q^{(0)},q^{(1)}\right).$$

А це означає, що існує стала $C>0$ така, що $\left|q_{n,m}(t)\right|\le C$ для всіх $t\in\mathbb{R}$ і $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$, оскільки $\lim\limits_{r\to\pm\infty}V_{n,m}(r)=+\infty$ рівномірно по відношенню до $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$.

Доведемо тепер другу частину твердження (a). Умова $\lim\limits_{r\to\pm\infty}V_{n,m}(r)=+\infty$ означає, що якщо нерівність (8) виконується для деякого $R>0$, то вона виконується і для будь-якого $R>0$ з константою $c>0$, яка залежить від R. За першою частиною твердження існує $R>0$ таке, що $\left\|q(t)\right\|_{l^\infty}\le R$ для всіх $t\in\mathbb{R}$. Таким чином, враховуючи (9) і (8), маємо

$$c\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}\left|q_{n,m}(t)\right|^s\le H\left(q^{(0)},q^{(1)}\right)$$

для всіх $t\in\mathbb{R}$. А це й означає, що $q\in l^s$.

У випадку (b) рівність (9) та від'ємність оператора A означають, що

$$\alpha\left\|q(t)\right\|^2\le H\left(q^{(0)},q^{(1)}\right)$$

для всіх $t\in\mathbb{R}$. А це й означає, що $q\in l^2$. **Теорему доведено.**

Висновки. У статті одержано результат про обмеженість глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці.

Список використаних джерел:

1. Бак С. М. Існування періодичних за часом розв'язків системи осциляторів на двовимірній гратці / С. М. Бак // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т. 4, № 2. — С. 175–196.
2. Бак С. М. Існування відокремлених біжучих хвиль для системи нелінійно зв'язаних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Український математичний журнал. — 2017. — Т. 69, №4. — С. 435–444.
3. Бак С. М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль у системі осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2014. — Т. 57, №3. — С. 45–52.
4. Бак С. М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. — Вип. 10. — С. 17–23.
5. Бак С. М. Існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. — Вип. 12. — С. 5–12.
6. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні студії. — 2012. — Т. 37, №1. — С. 76–88.
7. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2017. — Вип. 16. — С. 21-29.
8. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуванню нелінійністю / С. М. Бак // Математичні студії. — 2010. — Т. 33, №1. — С. 78–84.
9. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні sin-Ґордона на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. — Вип. 9. — С. 5–10.
10. Бак С. М. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці / С. М. Бак, О. О. Баранова, Ю. П. Білик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. — Вип. 4. — С. 18–24.
11. Бак С. М. Стоячі хвилі з періодичною амплітудою в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці / С. М. Бак, Г. М. Ковтонюк, І. В. Печериця // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб.

наук. праць. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. — Вип. 18. — С. 5–13.
12. Бак С. М. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів з кубічним потенціалом на двовимірній ґратці / С. М. Бак, К. Є. Рум’янцева // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. — Вип. 6. — С. 29–36.
13. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. — 2010. — Т. 7, № 2. — С. 154–175.
14. Бак С. М. Існування та єдиність глобального розв’язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. — Вип. 5. — С. 3–9.
15. Bak S. The existence of heteroclinic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on a 2D-lattice / S. Bak // Journal of mathematical physics, analysis, geometry. — 2018. — Vol. 14, № 1. — P. 16–26.
16. Bak S. M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice / S. M. Bak // Journal of Mathematical Sciences, 2016. — Vol. 217, №2 (August). — P. 187–197.
17. Bak S. M. Existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice / S. M. Bak // Ukrainian mathematical Journal. — 2017. — Vol. 4 (69). — P. 509–520.
18. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice / S. M. Bak, G. M. Kovtonyuk // Matematychni Studii. — 2018. — Vol. 50, No.1. — P. 75–87.
19. Bak S. Well-posedness of initial value problem for discrete nonlinear wave equations / S. Bak, G. N’Guerekata, A. Pankov // Communications in Mathematical Analysis. — 2010. — Vol. 8, № 1. — P. 79–86.
20. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. — 2007. — № 20. — P. 319–341.
21. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. — 2003. — Vol. 3, №1 (February). — P. 105–114.
22. Pacciani P. On localized solutions of discrete nonlinear Schrödinger equation: An exact result / P. Pacciani, V. V. Konotop, G. P. Menzala // Physica D. — 2005. — Vol. 204. — P. 122–133.
23. Pankov A. Global well-posedness for discrete non-linear Schrödinger equation / A. Pankov // Applicable Analysis. — 2010. — Vol. 89, № 9. — P. 1513–1521.
24. Srikanth P. On periodic motions of two-dimentional lattices / P. Srikanth // Functional analysis with current applications in science, technology and industry. — 1998. — Vol. 377. — P. 118–122.

ON THE BOUNDEDNESS OF THE GLOBAL SOLUTION OF CAUCHY PROBLEM FOR INFINITE SYSTEM OF NONLINEAR OSCILLATORS ON 2D-LATTICE

This article is devoted to the study of an infinite-dimensional Hamiltonian system, which describes an infinite system of linearly coupled nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice. This system is a counteble system of ordinary differential equations. It is convenient to consider this system as a differential-operator equation in Hilbert space of two-way sequences. The Cauchy problem for such equations in this space is considered. Previously, it has been proven that under certain circumstances this problem has a unique local and global solution. Local resolution follows from the standard results for differential equations in Banach spaces. The basic conditions here are the spatial periodicity of coefficients of the operator of linear interaction of oscillators and the Cauchy continuity of nonlinearity (which is defined as a derivative of the on-site potential of the oscillator system). This system, in Hamilton view, was used to establish global resolution. Recall that from a physical point of view the Hamiltonian represents the total energy of the system, i.e. the sum of kinetic and potential energy. The basic conditions, in addition to those mentioned above, are the non-positivity of the operator of linearly interact between the oscillators and the half-boundary below their potentials. However, the question remains whether the global solution is bounded. In this article it is established that under the same conditions of existence of a global solution, if the linear interaction operator is non-positive and the on-site potential at infinity is infinitely large (uniformly over both spatial variables), or the linear interaction operator is negatively defined, then this solution is bounded to any initial data from a given sequence space. To prove this, the fact that the Hamiltonian of the system retains a constant value on the initial data was used.

Key words: *nonlinear oscillators, 2D–lattice, Cauchy problem, global solution.*

Отримано: 13.08.2019