УДК 517.5
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-20.13-25

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,
В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам’янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

КРИТЕРІЇ ЕКСТРЕМАЛЬНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ ДЛЯ ЗАДАЧІ ВІДШУКАННЯ ВІДСТАНІ МІЖ ДВОМА ОПУКЛИМИ МНОЖИНАМИ ЛІНІЙНОГО НОРМОВАНОГО ПРОСТОРУ

Останнім часом значна увага приділяється дослідженню спеціальних класів екстремальних задач.

Важливий клас таких задач утворюють задачі теорії наближення функції.

Виявилось, що низка задач цієї теорії є частинними випадками задачі найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору, яку ще називають задачею відшукання відстані від елемента лінійного нормованого простору до опуклої множини цього простору.

Загальний критерій екстремального елемента для цієї задачі, оснований на співвідношеннях двоїстості, встановлено М. П. Корнєйчуком та В. М. Тихомировим. Дещо відмінним від цього критерію є критерій колмогоровського типу.

Узагальненням задачі відшукання відстані від точки лінійного нормованого простору до опуклої множини цього простору є задача відшукання відстані між двома його опуклими множинами.

У праці [1] встановлені співвідношення двоїстості та критерії екстремального елемента для цієї задачі, основані на співвідношенні двоїстості.

Однак, множина екстремальних елементів для низки екстремальних задач є порожньою множиною. Для таких задач питання встановлення критеріїв екстремального елемента втрачає сенс.

Водночас будь-яка екстремальна задача , в тому числі і задача відшукання відстані між двома опуклими множинами, має екстремальну послідовність.

У статті для задачі відшукання відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору встановлені критерії екстремальної послідовності для цієї задачі, основані на співвідношенні двоїстості, та критерії екстремальної послідовності колмогоровського типу. Отримані результати конкретизовано на випадок задачі відшукання відстані між замкненими гіперплощинами лінійного нормованого простору.

Ключові слова: *лінійний нормований простір, опукла множина, відстань між множинами, екстремальна послідовність, критерій екстремальної послідовності.*

Вступ. У статті встановлено критерії екстремальної послідовності для задачі відшукання відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору, основані на співвідношенні двоїстості для відповідної екстремальної задачі, та критерії колмогоровського типу. Отримані критерії використано для дослідження задачі відшукання відстані між двома замкненими гіперплощинами лінійного нормованого простору.

Постановка задачі. Нехай X — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір , A , B — опуклі множини простору X .

Задачею відшукання відстані (найкращої) між множинами A та B будемо називати задачу відшукання величини

$$E\left(A,B\right)=\inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}}\left\|x-y\right\| \tag{1}$$

(див., наприклад, [2, с. 65]).

Якщо існує елемент $\left(x^*,y^*\right)\in A\times B$ такий, що

$$E\left(A,B\right)=\inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}}\left\|x-y\right\|=\left\|x^*-y^*\right\|,$$

то згідно з [1] його будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Послідовність $\left\{\left(x_k,y_k\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ елементів $\left(x_k,y_k\right)\in A\times B$, $k=1,2,\ldots$, для якої $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|x_k-y_k\right\|=E\left(A,B\right)$, будемо називати екстремальною послідовністю для величини (1).

Актуальність теми. Відомо, що необхідність наближення складних математичних об'єктів більш простими і зручними у користуванні виникає як при розгляді теоретичних проблем математики, так і при вирішенні проблем практичного характеру.

Однією з центральних галузей теорії наближення є теорія наближення функцій, яка бере свій початок у роботах П. Л. Чебишева, який ще у 50-х роках 19 століття поставив задачу про рівномірне (чебишовське) наближення неперервної на сегменті дійснозначної функції множиною алгебраїчних поліномів степеня, що не перевищує деякого натурального числа.

Ця задача та низка інших задач теорії наближення функцій є частковими випадками задачі найкращого наближення елемента x простору X опуклою множиною B цього простору, тобто задачі відшукання величини

$$E\left(x,B\right)=\inf_{y\in B}\left\|x-y\right\|. \tag{2}$$

Якщо існує елемент $y^* \in B$ такий, що

$$E(x, B) = \left\| x - y^* \right\|,$$

то його називають екстремальним елементом для величини (2).

Основні результати дослідження величини (2) підсумовані, зокрема, у монографіях Н. І. Ахієзера [3], В. К. Дзядика [4], М. П. Корнєйчука [5], П.-Ж. Лорана [6], О. І. Степанця [7, 8], В. М. Тихомирова [9] та ін.

Зрозуміло, що задача відшукання величини (2) є частинним випадком задачі відшукання величини (1) при $A = \{x\}$.

Отже, всі вищезгадані задачі наближення вкладаються у схему постановки задачі (1).

Тому дослідження задачі (1) дозволяє з єдиних позицій розглянути результати дослідження цих задач та використати отримані результати дослідження задачі (1) для дослідження інших задач, які вкладаються у схему її постановки.

У праці [1] встановлено співвідношення двоїстості та основані на ньому критерії екстремального елемента для задачі відшукання величини (1), а також критерії колмогоровського типу екстремального елемента для цієї задачі. Отримані результати конкретизовано на окремі частинні випадки задачі відшукання величини (1) та використано при дослідженні задач відшукання відстані між двома кулями та відстані між кулею і гіперплощиною лінійного нормованого простору.

Проте часто екстремальний елемент для величини (1) не існує (особливо у випадках, коли X є нескінченновимірним простором). Водночас існування екстремальної послідовності для цієї величини гарантовано.

Тому актуальною є проблема встановлення критеріїв екстремальності послідовності $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$, де $(x_k, y_k) \in A \times B$, $k = 1, 2, \dots$, такої, що існує $\lim\limits_{k\to\infty} \left\| x_k - y_k \right\|$, що дозволить розширити можливості застосувань результатів дослідження цієї величини.

Мета роботи. Встановити критерії екстремальної послідовності для задачі відшукання величини (1). Застосувати ці критерії для дослідження задачі про відшукання відстані між двома замкненими гіперплощинами лінійного нормованого простору.

Критерії екстремальної послідовності для величини (1), основані на співвідношенні двоїстості для цієї величини. Будемо позначати через X^* — простір, спряжений з X, а через $S^* = \left\{ f \in X^* : \left\| f \right\| \le 1 \right\}$.

Теорема 1. Нехай $(x_k, y_k) \in A \times B$, $k = 1, 2, \dots$, і послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ така, що існує $\lim\limits_{k\to\infty} \left\| x_k - y_k \right\|$.

Для того щоб послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною послідовністю для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існував функціонала $f_0 \in S^*$ такий, що

$$\inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} f_0\left(x-y\right) = \lim_{k\to\infty} \left\|x_k - y_k\right\|. \tag{3}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1). Згідно з теоремою 1 [1] існує функціонал $f_0 \in S^*$ такий, що

$$\inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} \left\|x-y\right\| = \max_{f\in S^*} \inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} f\left(x-y\right) = \max_{f\in S^*}\left(\inf_{x\in A} f\left(x\right) - \sup_{y\in B} f\left(y\right)\right) =$$

$$= \inf_{x\in A} f_0\left(x\right) - \sup_{y\in B} f_0\left(y\right) = \inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} f_0\left(x-y\right). \tag{4}$$

Оскільки $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1), то з урахуванням (4) отримаємо

$$\lim_{k\to\infty} \left\|x_k - y_k\right\| = \inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} \left\|x-y\right\| = \inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} f_0\left(x-y\right).$$

Отже, для $f_0 \in S^*$ і екстремальної послідовності $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ для величини (1) має місце співвідношення (3).

Необхідність доведено.

Достатність. Припустимо, що для послідовності $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$, де $x_k \in A,\ y_k \in B$, $k = 1, 2, \ldots$, існує $\lim_{k\to\infty} \left\|x_k - y_k\right\|$ та функціонал $f_0 \in S^*$, для якого виконується умова (3).

З урахуванням цієї умови для будь-яких $x \in A$, $y \in B$ будемо мати

$$\lim_{k\to\infty} \left\|x_k - y_k\right\| = \inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} f_0\left(x-y\right) \le f_0\left(x-y\right) \le \left\|f_0\right\| \left\|x-y\right\| \le \left\|x-y\right\|.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{k\to\infty} \left\|x_k - y_k\right\| \le \inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} \left\|x-y\right\|. \tag{5}$$

З іншого боку для всіх $k = 1, 2, \ldots$ $\inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} \left\|x-y\right\| \le \left\|x_k - y_k\right\|$, оскільки $x_k \in A,\ y_k \in B$.

Тому

$$\inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} \|x-y\| \le \lim_{k\to\infty} \|x_k - y_k\| . \tag{6}$$

Із співвідношень (5), (6) випливає рівність

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - y_k\| = \inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} \|x-y\| .$$

Це й означає, що послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною для величини (1).

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Теорема 2. Нехай $(x_k, y_k) \in A\times B$, $k=1,2,\ldots$, і послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ така, що існує $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - y_k\|$.

Для того щоб послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існував функціонал $f_0 \in S^*$ такий, що

1) $\lim\limits_{k\to\infty} f_0\,(x_k - y_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - y_k\|$,

2) $\lim\limits_{k\to\infty} f_0\,(x_k) = \inf\limits_{x\in A} f_0\,(x)$,

3) $\lim\limits_{k\to\infty} f_0\,(y_k) = \sup\limits_{y\in B} f_0\,(y)$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1). Згідно з теоремою 1 існує функціонал $f_0 \in S^*$ такий, що має місце рівність (3). З цієї рівності випливає, що

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - y_k\| = \inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} \|x-y\| = \inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} f_0\,(x-y) = \inf_{x\in A} f_0\,(x) - \sup_{y\in B} f_0\,(y) \le$$

$$\le f_0\,(x_k) - \sup_{y\in B} f_0\,(y) \le f_0\,(x_k) - f_0\,(y_k) = f_0\,(x_k - y_k) \le$$

$$\le \|f_0\| \|x_k - y_k\| \le \|x_k - y_k\|,\ k=1,2,\ldots . \tag{7}$$

Внаслідок (7)

$$\lim_{k\to\infty} f_0\,(x_k - y_k) = \lim_{k\to\infty} \|x_k - y_k\|, \tag{8}$$

$$\lim_{k\to\infty} f_0\,(x_k) = \inf_{x\in A} f_0\,(x), \tag{9}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(f_0\ (x_k) - f_0\ (y_k)\right) = \inf_{x\in A} f_0\ (x) - \sup_{y\in B} f_0\ (y). \qquad (10)$$

З рівностей (9), (10) випливає, що

$$\lim_{k\to\infty} f_0\ (y_k) = \sup_{y\in B} f_0\ (y). \qquad (11)$$

З урахуванням рівностей (8), (9), (11) робимо висновок, що для функціонала $f_0 \in S^*$ виконуються умови 1)–3) теореми.

Необхідність доведено.

Достатність. Припустимо, що для послідовності $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$, де $x_k \in A$, $y_k \in B$, $k = 1, 2, \ldots$, існує $\lim_{k\to\infty}\|x_k - y_k\|$ та функціонал $f_0 \in S^*$, для якого виконуються умови 1)-3) теореми. З цих співвідношень випливає, що

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k - y_k\| = \inf_{x\in A} f_0(x) - \sup_{y\in B} f_0(y) = \inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} f_0(x-y).$$

З урахуванням теореми 1 з цих рівностей робимо висновок, що послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Наслідок 1. Нехай в задачі відшукання величини (1) B є опуклим конусом з вершиною в точці 0, послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$, де $(x_k, y_k) \in A\times B$, $k = 1, 2, \ldots$, така, що існує $\lim_{k\to\infty}\|x_k - y_k\|$.

Для того щоб ця послідовність була екстремальною для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існував функціонала $f_0 \in S^*$ такий, що

1) $\inf_{x\in A} f_0\ (x) = \lim_{k\to\infty}\|x_k - y_k\|$,

2) $\sup_{y\in B} f_0\ (y) = 0$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1). Згідно з теоремою 1 існує функціонал $f_0 \in S^*$ такий, що має місце рівність (3). З цієї рівності випливає, що

$$\inf_{x\in A} f_0(x) - \sup_{y\in B} f_0(y) = \lim_{k\to\infty}\|x_k - y_k\|. \qquad (12)$$

Тому $\sup_{y\in B} f_0(y) \in R$. Оскільки B є конусом з вершиною в точці 0, то $\sup_{y\in B} f_0(y) = 0$ (див., наприклад, доведення наслідку 1 [1]).

З урахуванням цього та рівності (12) приходимо до висновку про справедливість умов 1), 2) наслідку.

Необхідність доведено.

Достатність. Припустимо, що для послідовності $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$, де $x_k \in A$, $y_k \in B$, $k = 1, 2, \ldots$, існує $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - y_k\|$ та функціонал $f_0 \in S^*$, для якого виконуються умови 1), 2) цього наслідку. З цих умов випливає, що

$$\inf_{x\in A} f_0(x) - \sup_{y\in B} f_0(y) = \inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} f_0(x-y) = \lim_{k\to\infty} \|x_k - y_k\|.$$

Згідно з теоремою 1 послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Достатність доведено.

Наслідок доведено.

Наслідок 2. *Н*ехай в задачі відшукання величини (1) A є опуклим конусом з вершиною в точці 0, послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$, де $(x_k, y_k) \in A \times B$, $k = 1, 2, \ldots$, така, що існує $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - y_k\|$.

Для того щоб послідовність була екстремальною для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існував функціонала $f_0 \in S^*$ такий, що

1) $-\sup\limits_{y\in B} f_0(y) = \lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - y_k\|$,

2) $\inf\limits_{x\in A} f_0(x) = 0$.

Зрозуміло, що коли в наслідку 1 (наслідку 2) B є підпростором (A є підпростором), то умова 2) в наслідку 1 (умова 2) в наслідку 2) запишеться у вигляді $f_0(y) = 0$, $y \in B$, ($f_0(x) = 0$, $x \in A$).

Критерії колмогоровського типу екстремальної послідовності для величини (1). Розглянемо деякі критерії колмогоровського типу екстремальності послідовності для задачі відшукання величини (1).

Теорема 3. Нехай $(x_k, y_k) \in A \times B$, $k = 1, 2, \ldots$, і послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ така, що існує $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - y_k\|$.

Для того щоб послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існував функціонал $f_0 \in S^*$ такий, що

1) $\lim\limits_{k\to\infty} f_0\left(x_k - y_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty}\left\|x_k - y_k\right\|$,

2) $\lim\limits_{k\to\infty} f_0\left(x - x_k\right) \ge 0$ для всіх $x \in A$,

3) $\lim\limits_{k\to\infty} f_0\left(y - y_k\right) \le 0$ для всіх $y \in B$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\left\{\left(x_k, y_k\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1). Згідно з теоремою 2 існує функціонал $f_0 \in S^*$, який задовольняє умовам 1)–3) цієї теореми. З цих умов випливає, що для всіх $\left(x, y\right) \in A \times B$:

$$\lim_{k\to\infty} f_0\left(x_k - y_k\right) = \lim_{k\to\infty}\left\|x_k - y_k\right\|;\ y \in B$$

$$\lim_{k\to\infty} f_0\left(x_k\right) = \inf_{x\in A} f_0\left(x\right) \le f_0\left(x\right),\ \lim_{k\to\infty} f_0\left(x - x_k\right) \ge 0;$$

$$\lim_{k\to\infty} f_0\left(y_k\right) = \sup_{y\in B} f_0\left(y\right) \ge f_0\left(y\right),\ \lim_{k\to\infty} f_0\left(y - y_k\right) \le 0.$$

Отже, існує функціонал $f_0 \in S^*$, для якого виконуються умови 1)–3) цієї теореми.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай існує функціонал $f_0 \in S^*$, для якого виконуються умови 1)–3) теореми.

Тоді для будь-якого елемента $\left(x, y\right) \in A \times B$ та $k = 1, 2, \ldots$ маємо, що

$$\left\|x - y\right\| \ge f_0\left(x - y\right) = f_0\left(x - x_k\right) + f_0\left(x_k - y_k\right) + f_0\left(y_k - y\right),$$

$$\left\|x - y\right\| \ge \lim_{k\to\infty} f_0\left(x - x_k\right) + \lim_{k\to\infty} f_0\left(x_k - y_k\right) + \lim_{k\to\infty} f_0\left(y_k - y\right) \ge$$

$$\ge \lim_{k\to\infty} f_0\left(x_k - y_k\right) = \lim_{k\to\infty}\left\|x_k - y_k\right\|.$$

Тому

$$\inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}}\left\|x - y\right\| \ge \lim_{k\to\infty}\left\|x_k - y_k\right\| \ge \inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}}\left\|x - y\right\|,$$

оскільки $x_k \in A$, $y_k \in B$, $k = 1, 2, \ldots$.

З останніх співвідношень випливає, що

$$\inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}}\left\|x - y\right\| = \lim_{k\to\infty}\left\|x_k - y_k\right\|.$$

Це й означає, що послідовність $\left\{\left(x_k, y_k\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Теорема 4. Нехай $(x_k, y_k) \in A \times B$, $k = 1, 2, \ldots$, і послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ така, що існує $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - y_k\|$.

Для того щоб послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $(x, y) \in A \times B$ існувала послідовність $\left\{ f_k^{(x,y)} \right\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k^{(x,y)} \in S^*$, $k = 1, 2, \ldots$, така, що

1) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, f_k^{(x,y)}(x_k - y_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - y_k\|$,

2) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, f_k^{(x,y)}(x - x_k) \geq 0$,

3) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, f_k^{(x,y)}(y - y_k) \leq 0$.

Доведення. *Достатність.* Нехай $(x, y) \in A \times B$. Тоді існує послідовність $\left\{ f_k^{(x,y)} \right\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k^{(x,y)} \in S^*$, $k = 1, 2, \ldots$, для якої виконуються умови 1)–3) цієї теореми. Звідси випливає існування підпослідовності $\left\{ f_{k_l}^{(x,y)} \right\}_{l=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{ f_k^{(x,y)} \right\}_{k=1}^{\infty}$ такої, що

$$\lim_{l\to\infty} f_{k_l}^{(x,y)}\left(x_{k_l} - y_{k_l}\right) = \lim_{l\to\infty} \left\|x_{k_l} - y_{k_l}\right\| = \lim_{k\to\infty} \|x_k - y_k\|, \tag{13}$$

$$\lim_{l\to\infty} f_{k_l}^{(x,y)}\left(x - x_{k_l}\right) \geq 0, \tag{14}$$

$$\lim_{l\to\infty} f_{k_l}^{(x,y)}\left(y - y_{k_l}\right) \leq 0. \tag{15}$$

Маємо, що для $l = 1, 2, \ldots$

$$\|x - y\| \geq f_{k_l}^{(x,y)}(x - y) = f_{k_l}^{(x,y)}\left(x - x_{k_l}\right) + f_{k_l}^{(x,y)}\left(x_{k_l} - y_{k_l}\right) + f_{k_l}^{(x,y)}\left(y_{k_l} - y\right).$$

З урахуванням (13)–(15) звідси одержимо, що

$$\|x - y\| \geq \lim_{l\to\infty} f_{k_l}^{(x,y)}\left(x - x_{k_l}\right) + \lim_{l\to\infty} f_{k_l}^{(x,y)}\left(x_{k_l} - y_{k_l}\right) + \lim_{l\to\infty} f_{k_l}^{(x,y)}\left(y_{k_l} - y\right) \geq$$

$$\geq \lim_{l\to\infty} f_{k_l}^{(x,y)}\left(x_{k_l} - y_{k_l}\right) = \lim_{k\to\infty} \|x_k - y_k\|.$$

Тому

$$\inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} \|x - y\| \geq \lim_{k\to\infty} \|x_k - y_k\| \geq \inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} \|x - y\|,$$

оскільки $x_k \in A$, $y_k \in B$, $k = 1, 2, \dots$.

З останніх співвідношень випливає, що

$$\inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| = \lim_{k \to \infty} \|x_k - y_k\| .$$

Це й означає, що послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною для величини (1).

Достатність доведено.

Необхідність. Нехай послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною для величини (1).

Згідно з теоремою 2 існує функціонал $f_0 \in S^*$, який задовольняє умовам 1)–3) цієї теореми. Для кожного $(x, y) \in A \times B$ покладемо $f_k^{(x,y)} = f_0$. Тоді з умов 1)–3) теореми 2 випливає, що

$$\lim_{k \to \infty} f_k^{(x,y)}(x_k - y_k) = \overline{\lim_{k \to \infty}} f_k^{(x,y)}(x_k - y_k) = \lim_{k \to \infty} \|x_k - y_k\| ,$$

$$\lim_{k \to \infty} f_k^{(x,y)}(x - x_k) = \underline{\lim_{k \to \infty}} f_k^{(x,y)}(x - x_k) \ge 0 ,$$

$$\lim_{k \to \infty} f_k^{(x,y)}(y - y_k) = \overline{\lim_{k \to \infty}} f_k^{(x,y)}(y - y_k) \le 0 ,$$

тобто існує послідовність $\left\{ f_k^{(x,y)} \right\}_{k=1}^{\infty}$ така, що $f_k^{(x,y)} = f_0$, $k = 1, 2, \dots$, для якої виконуються умови 1)–3) теореми.

Необхідність доведено.

Теорему доведено.

Наслідок 3. Нехай $(x_k, y_k) \in A \times B$, $k = 1, 2, \dots$, існує $\lim_{k \to \infty} \|x_k - y_k\|$. Для того щоб послідовність $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ була екстремальною для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $(x, y) \in A \times B$ існував функціонал $f^{(x,y)} \in S^*$, такий, що

1) $\lim_{k \to \infty} f^{(x,y)}(x_k - y_k) = \lim_{k \to \infty} \|x_k - y_k\|$,

2) $\lim_{k \to \infty} f^{(x,y)}(x - x_k) \ge 0$,

3) $\lim_{k \to \infty} f^{(x,y)}(y - y_k) \le 0$.

Доведення. *Достатність.* Нехай для $(x, y) \in A \times B$ існує функціонал $f^{(x,y)} \in S^*$ такий, що виконуються умови 1)–3) цього наслідку. Тоді для послідовності $\left\{ f_k^{(x,y)} \right\}_{k=1}^{\infty}$, де $f_k^{(x,y)} = f^{(x,y)}$, $k = 1, 2, \ldots$, виконуються умови 1)–3) теореми 3. Згідно з цією теоремою послідовність $\left\{ (x_k, y_k) \right\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (1).

Достатність доведено.

Необхідність. Нехай послідовність $\left\{ (x_k, y_k) \right\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною для величини (1). Відповідно до теореми 3 існує функціонал $f_0 \in S^*$, який задовольняє умовам 1)–3) цієї теореми. Для кожного $(x, y) \in A \times B$ покладемо $f^{(x,y)} = f_0$. Тоді з умов 1)–3) теореми 3 випливає справедливість умов 1)–3) цього наслідку.

Необхідність доведено.

Наслідок доведено.

Задача відшукання відстані між двома гіперплощинами лінійного нормованого простору, які не перетинаються.

Теорема 5. Нехай $\varphi \in X^*$, $\varphi \neq 0$; $c_1, c_2 \in R$, $c_1 > c_2$; $A = \left\{ x \in X : \varphi(x) = c_1 \right\}$, $B = \left\{ y \in X : \varphi(y) = c_2 \right\}$ — замкнені гіперплощини простору X, $x_1 \in A$, а $\left\{ y_k \right\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для задачі відшукання

$$\inf_{y \in B} \left\| x_1 - y \right\|.$$

Тоді послідовність $\left\{ (x_1, y_k) \right\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною для задачі відшукання величини

$$E(A, B) = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \left\| x - y \right\|. \tag{16}$$

Має місце рівність

$$E(A, B) = \frac{c_1 - c_2}{\left\| \varphi \right\|}. \tag{17}$$

Доведення. Нехай $f_0 = \dfrac{\varphi}{\left\| \varphi \right\|}$. Зрозуміло, що $\left\| f_0 \right\| = 1$. Тому $f_0 \in S^*$.

Для функціонала f_0 маємо, що

$$\inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} f_0\left(x-y\right)=\inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} \frac{\varphi}{\|\varphi\|}\left(x-y\right)=\inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} \frac{\varphi\left(x\right)-\varphi\left(y\right)}{\|\varphi\|}=\inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} \frac{c_1-c_2}{\|\varphi\|}=\frac{c_1-c_2}{\|\varphi\|}. \quad (18)$$

З іншого боку (див., наприклад, теорему 3[1])

$$\lim_{k\to\infty}\|x_1-y_k\|=\inf_{y\in B}\|x_1-y\|=\frac{\left|\varphi\left(x_1\right)-c_2\right|}{\|\varphi\|}=\frac{\left|c_1-c_2\right|}{\|\varphi\|}=\frac{c_1-c_2}{\|\varphi\|}. \quad (19)$$

З рівностей (18), (19) випливає, що

$$\inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} f_0\left(x-y\right)=\lim_{k\to\infty}\|x_1-y_k\|.$$

Звідси та теореми 1 випливає, що $\left\{\left(x_1,y_k\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (16). Внаслідок цього і рівності (19) робимо висновок про справедливість формули (17).

Теорему доведено.

Висновки. Для задачі відшукання відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору встановлено критерії екстремальної послідовності, основані на співвідношенні двоїстості для цієї задачі, та критерії колмогоровського типу. Ці критерії використано для дослідження задачі відшукання відстані між двома замкненими гіперплощинами лінійного нормованого простору.

Список використаних джерел:

1. Гудима У. В. Співвідношення двоїстості та критерії екстремальності елемента для задачі відшукання відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору / У. В. Гудима, В. О. Гнатюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. — Вип. 18. — С. 65–77.
2. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 544 с.
3. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. — М. : Наука, 1965. — 407 с.
4. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций / В. К. Дзядык. — М. : Наука, 1977. — 510 с.
5. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения / Н. П. Корнейчук. — М. : Наука, 1976. — 320 с.
6. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
7. Степанец А. И. Методы теории приближений / А. И. Степанец. — Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. I. — 427 с.
8. Степанец А. И. Методы теории приближений / А. И. Степанец. — Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. II. — 468 с.
9. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений / В. М. Тихомиров. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 307 с.

THE CRITERIONS OF THE EXTREMALITY OF A SEQUENCE FOR THE PROBLEM OF FINDING THE DISTANCE BETWEEN TWO CONVEX SETS OF THE LINEAR NORMED SPACE

The research and construction of effective methods for decisioning special classes of extreme problems are actual problems of modern mathematics.

In the writings of P. L. Chebyshev investigated a class of problems with non-differentiable functions. These works became the basis of approximation theory.

Many problems of this theory are partial cases of the problem of the best approximation of an element of linear normed space by convex set of this space. Important questions of the study of this problem are establishment of the criterion of the extremality of an element. M. P. Korniichuk and V. M. Tikhomirov established the criterion of the extremality of an element. The basis of thes criterion was relation of duality.

An important problem, the partial case of which is the problem of the best approximation of an element of a linear normed space by a convex set of this space, is the problem of finding the distance between two convex sets of linear normed space. In the article [1] established relation of duality and the criterion of the extremality of an element for this problem.

However, the set of extremal elements for some problems is an empty set. But any extremal problem has an extremal sequence. So research into this sequence is relevant.

In this article established the criterions of the extremal sequence of the basis of which is relation of duality and criterion of the Kolmogorov type for the problem of finding the distance between two convex sets of linear normed space. These results were used for the problem of the find the distance between two closed hyperplanes of the linear normed space.

Key words: *the linear normed space, the convex set, the distance between sets, the extremal sequence, the criterion of the extremality of a sequence.*

Отримано: 19.08.2019