An example of a single-frequency system with integral conditions is constructed, on which the obtained result is illustrated; accuracy estimation and values of the small parameter are obtained.

Key words: *linearly transformed argument, averaging method, small parameter, resonance, integral condition, estimation of accuracy.*

Отримано: 8.10.2020

УДК 517.9
DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.137-144

Ю. В. Теплінський, д-р фіз.-мат. наук, професор

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ МАЙЖЕ-ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ВИЗНАЧЕНИХ НА НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ТОРАХ

Відомо, що велика кількість прикладних задач у різних розділах математики, фізики, техніки потребує досліджень проблем існування коливних розв'язків диференціальних систем, що є їх математичними моделями. У наш час коливними рухами динамічних систем за В. В. Немицьким [1] називають їх рекурентні рухи. Як відомо з теорем Біркгофа, траєкторії таких рухів містять мінімальні компактні множини динамічних систем. До класу рекурентних рухів зокрема належать квазіперіодичні та майже-періодичні рухи. Широко відомі фундаментальні теореми Амеріо і Фавара [2], що стосуються існування майже-періодичних розв'язків нелінійних та лінійних систем. Становить також інтерес дослідження поведінки динамічної системи в околі рекурентної траєкторії. Пізніше стало зрозумілим, що питання існування таких траєкторій тісно пов'язане з існуванням у таких систем інваріантних торів, для побудови яких зручно застосовувати метод функції Гріна-Самойленка [1, 3, 4]. Тут розглядається лінійна система диференціальних рівнянь, яка визначена на нескінченновимірному торі (випадок зліченного частотного базису щодо кутової змінної), причому відносно нормальної змінної ця система може бути як скінченною, так і зліченною. Задача полягає у відшуканні достатніх умов, при яких задана система рівнянь має сім'ю майже-періодичних у сенсі Бора розв'язків, кожен з яких можна наблизити із наперед заданою точністю квазіперіодичним у сенсі Боля розв'язком відповідної укороченої за кутовою змінною системи рівнянь, що визначена на скінченновимірному торі.

Ключові слова: *інваріантний тор, функція Гріна-Самойленка, квазіперіодичні та майже-періодичні функції.*

Вступ. Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega, \quad \frac{dx}{dt}=A(\varphi)x+f(\varphi), \tag{1}$$

де вектор частот $\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ldots)\in \boldsymbol{m}$, $\omega_i>0$ при всіх натуральних i, $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\ldots)$, $A(\varphi)$ — матриця розмірності $n\times n$ з дійсними елементами, $\boldsymbol{m}$ — простір обмежених послідовностей дійсних чисел, $\|\omega\|=\sup_i\{\omega_i\}=\omega_0<\infty$, вектор $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n$, $f(\varphi)=$ $=(f_1(\varphi),f_2(\varphi),\ldots,f_n(\varphi))$ — вектор-функція з дійсними координатами, причому матриця $\mathrm{A}(\varphi)$ та функція $f(\varphi)$ 2π-періодичні відносно φ_i $(i=1,2,3,\ldots)$, що дозволяє вважати їх множиною визначення нескінченновимірний тор $\mathcal{T}_\infty$. Підставивши розв'язок першого рівняння системи (1) $\varphi=\omega t+\phi$, $\varphi(0)=\phi\in\mathcal{T}_\infty$ у друге її рівняння, одержимо систему

$$\frac{dx}{dt}=\mathrm{A}(\omega t+\phi)x+f(\omega t+\phi), \tag{2}$$

залежну від $\phi\in\mathcal{T}_\infty$ як від параметра, $\phi=(\phi_1,\phi_2,\phi_{3,}\ldots)$.

Одночасно будемо розглядати укорочену відносно φ до m-го порядку визначену на m — вимірному торі $\mathcal{T}_m$ систему рівнянь виду

$$\frac{d\varphi^{(m)}}{dt}=\omega^{(m)}, \quad \frac{dx^{(m)}}{dt}=A_0\left(\varphi^{(m)}\right)x^{(m)}+f_0\left(\varphi^{(m)}\right). \tag{3}$$

Аналогічно від системи (3) перейдемо до системи рівнянь

$$\frac{dx^{(m)}}{dt}=A_0\left(\omega^{(m)}t+\phi^{(m)}\right)x^{(m)}+f_0\left(\omega^{(m)}t+\phi^{(m)}\right), \tag{4}$$

де

$$\varphi^{(m)}=(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m),\ \omega^{(m)}=(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_m),$$

$$\phi^{(m)}=(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_m),$$

$$A_0\left(\varphi^{(m)}\right)=A\left(\varphi^{(m)},0,0,\ldots\right),\ f_0\left(\varphi^{(m)}\right)=f\left(\varphi^{(m)},0,0,\ldots\right),$$

причому у позначенні $x^{(m)}$ тут і надалі символ (m) не означає порядку укорочення вектора x, оскільки укорочення здійснюється лише відносно змінної φ.

Задача полягає у відшуканні достатніх умов, при яких система рівнянь (2) має сім'ю майже-періодичних у сенсі Бора [2] розв'язків, залежних від параметра ϕ, кожен з яких можна наблизити із наперед заданою точністю квазіперіодичним у сенсі Боля [4, 5] розв'язком системи рівнянь (4).

Основний результат та його обгрунтування. Множину обмежених за нормою 2π-періодичних по $\varphi_i \left(i = 1, 2, 3, \ldots\right)$ вектор-функцій і матриць виду $f\left(\varphi\right)$ та $A\left(\varphi\right)$ з неперервними відносно φ координатами та елементами будемо позначати через $C^0\left(\mathcal{T}_\infty\right)$. У цій множині виділимо підмножину $C^0_{Lip}\left(\mathcal{T}_\infty\right)$, елементи якої задовольняють умову Ліпшиця відносно φ. Говорять, що функція $w\left(\varphi\right)$ (векторна або матрична) з множини $C^0_{Lip}\left(\mathcal{T}_\infty\right)$ задовольняє посилену умову Коші-Ліпшиця відносно φ з коефіцієнтом $\varepsilon\left(m\right)$, якщо

$$\| w\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \overline{\varphi_{m+1}}, \ldots\right) - w\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \overline{\overline{\varphi_{m+1}}}, \ldots\right) \| \le$$

$$\le \varepsilon\left(m\right) \sup\left\{\left|\overline{\varphi_{m+1}} - \overline{\overline{\varphi_{m+1}}}\right|, \left|\overline{\varphi_{m+2}} - \overline{\overline{\varphi_{m+2}}}\right|, \ldots\right\},$$

де $\varepsilon\left(m\right) \to 0$ при $m \to \infty$, а $\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \overline{\varphi_{m+1}}, \overline{\varphi_{m+2}}, \ldots\right)$ та $\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \overline{\overline{\varphi_{m+1}}}, \overline{\overline{\varphi_{m+2}}}, \ldots\right)$ — довільні точки з $\mathcal{T}_\infty$, перші m відповідних координат яких попарно співпадають. Множину таких функцій позначимо через $C^0_{Lip}\left(\mathcal{T}_\infty\right)$. При цьому норми вектора $f\left(\varphi\right)$ і матриці $A\left(\varphi\right)$ з елементами $a_{ij}\left(\varphi\right)\left(i, j = \overline{1, n}\right)$ визначимо рівностями:

$$\| f\left(\varphi\right) \| = max\left\{\left| f_1\left(\varphi\right)\right|, \left| f_2\left(\varphi\right)\right|, \ldots, \left| f_n\left(\varphi\right)\right|\right\},$$

$$\| \varphi \| = \sup_i \left\{\left|\varphi_i\right|\right\}, \ \| A\left(\varphi\right) \| = sup_i \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\left(\varphi\right)\right|.$$

Надалі вважатимемо, що виконуються нерівності:

$$\| A\left(\varphi\right) \| \le A, \ \| f\left(\varphi\right) \| \le F, \ \| \phi \| \le 2\pi,$$

де A та F — додатні сталі.

Нагадаємо, що інваріантним тором системи рівнянь (2) називають поверхню $\mathrm{T}: x = u\left(\phi\right) = \left\{u_1\left(\phi\right), u_2\left(\phi\right), \ldots, u_n\left(\phi\right)\right\}, \ \phi \in \mathcal{T}_\infty$, якщо $u\left(\phi\right) \in C^0\left(\mathcal{T}_\infty\right)$, функції $u_i\left(\omega t + \phi\right) \left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$ неперервно диференційовні по t і

$$\frac{du(\omega t+\phi)}{dt}=A(\omega t+\phi)u(\omega t+\phi)+f(\omega t+\phi)$$

для всіх $t\in R^1$, $\phi\in\mathcal{T}_\infty$. Поняття інваріантного тору системи рівнянь (4) вводиться цілком аналогічно.

Теорема. Нехай система рівнянь (2) така, що:

1. $\{A(\varphi),\ f(\varphi)\}\subset C^0_{Lip}(\mathcal{T}_\infty)$ з коефіцієнтами $\alpha(m)$ та $\beta(m)$ відповідно.
2. Норми матрицантів $\Omega^t_\tau(\phi)$ та $\tilde{\Omega}^t_\tau\left(\phi^{(m)}\right)$ однорідних систем, що відповідають системам (2) та (4) відповідно в тоці $t=0$ при всіх $\tau\le 0$ не перевищують виразу $Ke^{\gamma\tau}$, де K та γ — додатні сталі, що не залежать від ϕ,τ та m.
3. $\gamma>1$.
4. $\sum_1^\infty k_i\omega_i\ne 0$ для всіх ненульових цілочислових векторів $(k_1,k_2,k_3,\ldots)$.

Тоді система рівнянь (2) має сім'ю майже-періодичних у сенсі Бора розв'язків, залежних від параметра ϕ, кожен з яких можна наблизити із наперед заданою точністю квазіперіодичним у сенсі Боля розв'язком системи рівнянь (4).

Доведення. Легко переконатися, що при виконанні першої умови теореми матриканти $\Omega^t_\tau(\phi)$ та $\tilde{\Omega}^t_\tau\left(\phi^{(m)}\right)$ дійсно існують. Друга умова теореми забезпечує існування для кожної з систем рівнянь (2) та (4) функцій Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори, що мають вигляд

$$G_0(\tau,\phi)=\begin{cases}\Omega^0_\tau(\phi) & \text{при } \tau\le 0,\\ 0 & \text{при } \tau>0\end{cases}$$

та

$$G_0\left(\tau,\phi^{(m)}\right)=\begin{cases}\tilde{\Omega}^0_\tau\left(\phi^{(m)}\right) & \text{при } \tau\le 0,\\ 0 & \text{при } \tau>0.\end{cases}$$

Тоді системи рівнянь (2) та (4) визначають у просторі R^n інваріантні тори T та T_m, що породжуються функціями

$$u(\phi)=\int_{-\infty}^{0}\Omega^0_\tau(\phi)\,f(\omega\tau+\phi)\,d\tau \text{ та}$$

$$\tilde{u}\left(\phi^{(m)}\right)=\int_{-\infty}^{0}\tilde{\Omega}_{\tau}^{0}\left(\phi^{(m)}\right)f_0\left(\omega^{(m)}\tau+\phi^{(m)}\right)d\tau$$

відповідно. При цьому ці тори містять залежні від параметра ϕ множини розв'язків

$$x(t)=u(\omega t+\phi)=\int_{-\infty}^{0}\Omega_{\tau}^{t}(\phi)\,f(\omega\tau+\phi)\,d\tau$$

та

$$x^{(m)}(t)=\tilde{u}(\omega^{(m)}t+\phi^{(m)})=\int_{-\infty}^{0}\tilde{\Omega}_{\tau}^{t}\left(\phi^{(m)}\right)f_0\left(\omega^{(m)}\tau+\phi^{(m)}\right)d\tau$$

систем (2) та (4) відповідно. Зрозуміло, що з четвертої умови теореми випливає квазіперіодичність функцій $x^{(m)}(t)$, починаючи з $m=2$.

Покажемо тепер, що послідовність функцій $\tilde{u}\left(\phi^{(m)}\right)$ при $m\to\infty$ збігається до функції $u(\phi)$ в сенсі векторної норми рівномірно відносно $\phi\in\mathcal{T}_{\infty}$. Очевидно, що справджується оцінка

$$\| u(\phi)-\tilde{u}\left(\phi^{(m)}\right)\|\le I_1+I_2\,, \tag{5}$$

де

$$I_1=\int_{-\infty}^{0}\|\Omega_{\tau}^{0}(\phi)\|\|\,f(\omega\tau+\phi)-f_0\left(\omega^{(m)}\tau+\phi^{(m)}\right)\|d\tau,$$

$$I_2=\int_{-\infty}^{0}\|\Omega_{\tau}^{0}(\phi)-\tilde{\Omega}_{\tau}^{0}\left(\phi^{(m)}\right)\|\|\,f_0\left(\omega^{(m)}\tau+\phi^{(m)}\right)\|d\tau.$$

Для інтеграла I_1 виконуються наступні нерівності:

$$I_1\le\int_{-\infty}^{0}Ke^{\gamma\tau}\beta(m)\|(\omega_{m+1}\tau+\phi_{m+1},\omega_{m+2}\tau+\phi_{m+2},\ldots)\|\,d\tau\le$$

$$\le K\beta(m)\int_{-\infty}^{0}e^{\gamma\tau}(\omega_0|\tau|+2\pi)d\tau\le K\beta(m)\int_{-\infty}^{0}e^{\gamma\tau}(\omega_0+2\pi)e^{|\tau|}\,d\tau\le$$

$$\le K\beta(m)\int_{-\infty}^{0}e^{(\gamma-1)\tau}(\omega_0+2\pi)d\tau\le\beta(m)\frac{K(\omega_0+2\pi)}{\gamma-1}.$$

Поклавши $L(t)=\Omega_{\tau}^{t}(\phi)-\tilde{\Omega}_{\tau}^{t}\left(\phi^{(m)}\right)$ і врахувавши рівність

$$\frac{dL(t)}{dt}=A(\omega t+\phi)L(t)+G(t)\,, \tag{6}$$

в якій

$$G(t)=\left\{A(\omega t+\phi)-A_0\left(\omega^{(m)}t+\phi^{(m)}\right)\right\}\tilde{\Omega}_\tau^t\left(\phi^{(m)}\right),$$

оцінемо норму різниці $L(0)$. Оскільки $L(t)$ є обмеженим розв'язком рівняння (6), то в силу єдиності такого розв'язку, він повинен визначатися рівністю

$$L(t)=\int_{-\infty}^{0}\Omega_s^t(\phi)\,G(s)\,ds=$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\Omega_s^t(\phi)\left\{A(\omega s+\phi)-A_0\left(\omega^{(m)}s+\phi^{(m)}\right)\right\}\tilde{\Omega}_\tau^s\left(\phi^{(m)}\right)ds,$$

звідки

$$L(0)=\int_{-\infty}^{0}\Omega_s^0(\phi)\left\{A(\omega s+\phi)-A_0\left(\omega^{(m)}s+\phi^{(m)}\right)\right\}\tilde{\Omega}_\tau^s\left(\phi^{(m)}\right)ds.$$

Тоді

$$\left\|L(0)\right\|\le\int_{-\infty}^{0}K^2e^{-\gamma|s|-\gamma|s-\tau|}\alpha(m)\left(\omega_0|s|+2\pi\right)ds\le$$

$$\le\alpha(m)K^2\{\int_{-\infty}^{\tau}e^{-\gamma|s|-\gamma|s-\tau|}\left(\omega_0|s|+2\pi\right)ds+\int_{\tau}^{0}e^{-\gamma|s|-\gamma|s-\tau|}\left(\omega_0|s|+2\pi\right)ds\}\le$$

$$\le\alpha(m)K^2(\omega_0+2\pi)\left\{\int_{-\infty}^{\tau}e^{2\gamma s-\gamma\tau-s}ds+\int_{\tau}^{0}e^{\gamma\tau-s}ds\right\}\le$$

$$\le\alpha(m)K^2(\omega_0+2\pi)\left\{\frac{e^{(\gamma-1)\tau}}{2\gamma-1}+e^{(\gamma-1)\tau}\right\}=\alpha(m)\frac{2\gamma K^2(\omega_0+2\pi)}{2\gamma-1}e^{(\gamma-1)\tau}.$$

Таким чином

$$I_2\le\int_{-\infty}^{0}\|L(0)\|\,F\,d\tau\le\alpha(m)\frac{2\gamma K^2F(\omega_0+2\pi)}{(2\gamma-1)(\gamma-1)}.$$

Використавши рівність (5), одержуємо оцінку

$$\|u(\phi)-\tilde{u}\left(\phi^{(m)}\right)\|\le\beta(m)\frac{K(\omega_0+2\pi)}{\gamma-1}+\alpha(m)\frac{2\gamma K^2F(\omega_0+2\pi)}{(2\gamma-1)(\gamma-1)},$$

з якої випливає, що

$$\|u(\phi)-\tilde{u}\left(\phi^{(m)}\right)\|\to 0 \text{ при } m\to\infty$$

рівномірно відносно $\phi\in\mathcal{T}_\infty$. Тоді також рівномірно відносно $t\in R^1$ та $\phi\in\mathcal{T}_\infty$

$$\| x^{(m)}(t) - x(t) \| \to 0 \text{ при } m \to \infty,$$

де $x(t)$ — майже-періодична функція, що завершує доведення теореми.

Цей результат неважко розповсюдити на більш загальний випадок. Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{dx}{dt} = A^*(\varphi)x + f^*(\varphi),$$

що має вигляд системи (1), в якій $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots) \in \boldsymbol{m}$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots)$, $A^*(\varphi) = (a_{ij}(\varphi))_{i,j=1}^{\infty}$ — нескінченна матриця, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \boldsymbol{m}$, $f^*(\varphi) = \left(f_1^*(\varphi), f_2^*(\varphi), \ldots, f_n^*(\varphi), \ldots\right)$ — дійснозначна вектор-функція, причому матриця $A^*(\varphi)$ та функція $f^*(\varphi)$ 2π-періодичні відносно φ_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) та визначені на торі $\mathcal{T}_\infty$.

Аналогічно до рівняння (2) одержимо систему

$$\frac{dx}{dt} = A^*(\omega t + \phi)x + f^*(\omega t + \phi). \tag{7}$$

Норми матриці $A^*(\varphi)$ та функції $f^*(\varphi)$ визначимо рівностями:

$$\| A^*(\varphi) \| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi \in \mathcal{T}_\infty} |a_{ij}(\varphi)|,$$

$$\| f^*(\varphi) \| = \sup_i \left\{ \sup_{\varphi \in \mathcal{T}_\infty} \left| f_i^*(\varphi) \right| \right\}.$$

Ввівши позначення

$$A_0^*\left(\varphi^{(m)}\right) = A_0^*\left(\varphi^{(m)}, 0, 0, \ldots\right), \quad f_0^*\left(\varphi^{(m)}\right) = f_0^*\left(\varphi^{(m)}, 0, 0, \ldots\right),$$

від системи (7) перейдемо до рівняння

$$\frac{dx^{(m)}}{dt} = A_0^*\left(\omega^{(m)}t + \phi^{(m)}\right)x^{(m)} + f_0^*\left(\omega^{(m)}t + \phi^{(m)}\right). \tag{8}$$

Якщо $\left\{A^*(\varphi), f^*(\varphi)\right\} \subset C_{Lip}^0(\mathcal{T}_\infty)$, то існують матриціанти $\Omega_\tau^t(\phi)$ та $\tilde{\Omega}_\tau^t\left(\phi^{(m)}\right)$ однорідних систем, що відповідають системам (7) та (8), але у цьому разі вони є нескінченними матрицями (див. [3]). При виконанні для них другої умови сформульованої вище теореми для вказаних систем існують функції Гріна-Самойленка, породжуючі інваріантні тори систем (7) та (8), що містять залежні від параметра ϕ множини їх розв’язків. Тоді при умовах вказаної теореми система рівнянь (7) має сім’ю майже-періодичних у сенсі Бора розв’язків, залежних від параметра ϕ, кожен з яких можна наблизити із наперед заданою точністю квазіперіодичним у сенсі Боля розв'язком системи рівнянь (8).

Висновки. Робота має теоретичний характер. У ній одержано достатні умови, при яких задана система рівнянь має сім'ю майже-періодичних розв'язків, які можна наблизити квазіперіодичними розв'язками відповідної укороченої за кутовою змінною системи рівнянь, що визначена на скінченновимірному торі. Одержаний в роботі результат можна буде використати при розв'язуванні аналогічної більш складної задачі для випадку, коли задана система рівнянь є нелінійною або квазілінійною.

Список використаних джерел:

1. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний : монография. М. : Наука, 1987. 302 с.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости : монография. М. : Наука, 1967. 472 с.
3. Samoilenko A. M., Teplinskii Yu. V. Countable Systems of Differential Equations : монография. VSP, Utrecht-Boston, 2003. 287 p.
4. Боль П. Г. Избранные труды : монография. Рига : Изд-во АН Латв. ССР, 1961. 238 с.
5. Левитан Б. М. Почти-периодические функции : монография. М. : Гостехиздат, 1953. 396 с.

APPROXIMATE METHOD OF CONSTRUCTION OF ALMOST PERIODIC SOLUTIONS OF LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS, DEFINED ON THE INFINITE-DIMENSIONAL TORUS

It is known that a large number of application problems in different sections of mathematics, physics, technology needs research of the problems of vibratorial solutions of differential systems, which are their mathematical models. In our time, the oscillled motions of dynamical systems by V. V. Nemytsky are called their recurrent movements, including quasi-periodic and almost-periodic movements. The fundamental theorem of Amerio and Favar is widely known, which refers to the existence of nearly-periodic solutions of nonlinear and linear systems. Later it became clear that the issue of such solutions is closely related to the existence of such systems of other facilities, for which construction is convenient to use the method of Green-Samoilenko function. Here the linear system of differential equations is considered, which is defined on the infinite-dimensional Tory (the case of the angular frequency base for the corner variable), and the relative normal variable, this system can be both finite and angular. The problem lies in in finding the sufficient conditions, in which the specified system of equations has almost-periodic family in the sense of Bohr solutions, each of which can be adapted to the predefined accuracy of quasi-periodic in the sense of Bol solution of corresponding shortened by the angular variable of the system of equations, which is defined on a finite-dimensional Tory.

Key words: *the invariant torus, Green-Samoilenko function, quasiperiodic end almost periodic functions.*

Отримано: 23.09.2020