УДК 004.942:619.64
DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.145-163

В. А. Федорчук*, д-р техн. наук, професор,
О. А. Дячук,** канд. техн. наук,
Л. О. Митько*,** канд. фіз.-мат. наук

* Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,
** ДУ «Інститут економіки та прогнозування НАН України», м. Київ,
*** Інститут проблем моделювання в енергетиці
імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ

ЕКВІВАЛЕНТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ В'ЯЗКОПРУЖНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Стаття присвячена задачі отримання ефективних в обчислювальному сенсі математичних моделей динамічних об'єктів з в'язкопружними властивостями на основі еквівалентних перетворень первинних математичних описів у вигляді інтегро-диференціальних рівнянь до інтегральних рівнянь Вольтерри. При цьому враховано значно зростаючі у останні роки можливості обчислювальної техніки та програмної інженерії, а також позитивні властивості інтегральних моделей при їх числовій реалізації: обчислювальна стійкість, хороша збіжність, стійкість до високочастотних спектрів завад, обчислювальна ефективність. Наведено методи перетворення динамічних моделей, що дозволяють зводити інтегро-диференціальні рівняння до інтегральних рівнянь з оператором Вольтерри, що спрощує задачу створення алгоритмів моделювання. Зокрема наведено застосування в задачах комп'ютерного моделювання інтегральних моделей, які отримуються з первинних інтегро-диференціальних моделей за допомогою наступних методів еквівалентних перетворень: методу варіації постійних, методу старшої похідної, модифікованого методу заміни змінних, який при чисельній реалізації з використанням квадратурних формул дає рекурентні співвідношення. Наведено приклад застосування зазначеного методу. Продемонстровано можливість розв'язування прямої та оберненої задачі визначення впливу на багатомасову систему за допомогою інтегральної форми задачі Коші. Показано що проблема розробки більш повних та ґрунтовних математичних моделей динамічних систем, а саме у вигляді інтегро-диференціальних рівнянь, є важливою та актуальною, а їх чисельна реалізація необхідною для широкого кола прикладних задач моделювання.

Ключові слова: *модель в'язкопружного динамічного об'єкту, інтегральна модель, еквівалентні перетворення моделей.*

Вступ. При моделюванні динамічних систем важливим способом виявлення їх особливостей та можливості чисельної реалізації є подання моделей в різних еквівалентних формах [2], що вимагає розвитку методів еквівалентних перетворень. Використання еквівалентних форм математичних моделей динамічних систем є загальноприйнятим підходом [13]. Наприклад, при дослідженнях систем управління широко використовуються аналіз різних властивостей заданої системи [9], а саме: часові моделі — у вигляді диференціальних рівнянь; операторні — у вигляді передатних функцій; частотні — у вигляді амплітудно-частотних характеристик. В більшості випадків зручно отримувати модель в одній формі відштовхуючись від її фізичних властивостей, а для чисельної реалізації використовувати іншу, еквівалентну вихідній.

Щодо в'язкопружних динамічних об'єктів, природньою формою опису яких є інтегро-диференціальні рівняння, важливе прикладне значення мають еквівалентні перетворення вихідної математичної моделі до моделі у вигляді інтегральних рівнянь, методи чисельної реалізації яких добре розвинуті та мають ряд переваг: збіжність, стійкість, ефективність. Крім того, перетворення дозволяє розширити клас обчислювальних методів шляхом застосування швидкозбіжних ітераційних методів з високою стійкістю розв'язування інтегральних рівнянь, наприклад, метод Ньютона-Канторовича [12]. У зв'язку з цим розглянемо декілька варіантів такого еквівалентного переходу.

Розглянемо нелінійне інтегро-диференціальне рівняння [10] вигляду

$$u^{(n)}(x)+\sum_{j=1}^{n-1} b_j(x)u^{(j)}(x)= \\ =\lambda\int_a^x K\left(x,s;u(s),u'(s),\dots,u^{(m)}(s)\right)ds+f(x) \tag{1}$$

з нульовими початковими умовами $u(a) = u'(a) = \ldots = u^{(n-1)}(a) = 0$, де $b_j(x)$ — неперервні функції, $n \ge m$. Нехай $u_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ — фундаментальна система розв'язків однорідного диференціального рівняння.

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння можна записати у вигляді

$$u(x)=C_1(x)u_1(x)+C_2(x)u_2(x)+\dots+C_n(x)u_n(x). \tag{2}$$

Відповідно до методу варіації довільних сталих, коефіцієнти C_i, $i=\overline{1,n}$ визначаються за формулою

$$C_i(x)=\int_a^x \frac{W_{ni}(s)}{W(s)}\varphi(s)\,ds, \tag{3}$$

де $W(s)=\begin{vmatrix} u_1(s) & \vdots & u_n(s) \\ u_1'(s) & \vdots & u_n'(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(s) & \vdots & u_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix}$, $W_{ni}(s)$ — мінор елементу n-го рядка j-го стовпчика визначника $W(s)$.

З урахуванням (3) вираз (2) перетвориться на

$$u(s)=\int_a^x G(x,s)\varphi(s)\,ds\,, \tag{4}$$

де $G(x,s)=\dfrac{W_i(x,s)}{W(s)}$; $W_i(x,s)=\begin{vmatrix} u_1(s) & \dots & u_n(s) \\ u_1'(s) & \dots & u_n'(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(n-2)}(s) & \dots & u_n^{(n-2)}(s) \\ u_1(x) & \dots & u_n(x) \end{vmatrix}$.

Використовуючи вираз (4), рівняння (1) можна привести до вигляду

$$\begin{gathered} u(x)-\lambda\int_a^x G(x,s)\left\{\int_a^x K\left(x,t;u(t),u'(t),\dots,u^{(m)}(t)\right)dt\right\}ds= \\ =\int_a^x G(x,s)\,f(s)\,ds \end{gathered} \tag{5}$$

і після цього, провівши заміну $y(x) = u^{(m)}(x)$, отримуємо з рівняння (1) еквівалентне інтегральне рівняння [8]

$$\begin{gathered} \int_a^x \frac{(x-s)^{(m-1)}}{(m-1)!}\,y(s)\,ds- \\ -\lambda\int_a^x G(x,s)\left\{\int_a^x K\left(x,t;y(t),y_1(t),\dots,y_m(t)\right)dt\right\}ds=\int_a^x G(x,s)\,f(s)\,ds, \end{gathered} \tag{6}$$

де $y_i=\displaystyle\int_a^x \frac{(x-s)^{(n-i-1)}}{(n-i-1)!}\,y(s)\,ds$, $i=\overline{1,m}$.

У випадку ненульових початкових умов $u^{(i)}(a) = c_i$, $i=\overline{0,n-1}$, провівши заміну змінних $u(x)=y(x)+\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\frac{c_i}{i!}(x-a)^i$, задача зводиться до задачі з нульовими початковими умовами.

Іншим методом еквівалентного перетворення динамічних моделей є метод старшої похідної, який за допомогою заміни змінної

$$u^{(n)}(x) = y(x),$$

$$u^{(k)}(x) = \int_a^x \frac{(x-s)^{(n-k-1)}}{(n-k-1)!} y(s)\,ds + \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{(x-s)^j}{j!} u^{(n-j-1)}(a) = y_k(x), \tag{7}$$

де $k = \overline{0, n-1}$, дозволяє перетворити рівняння (1) з початковими умовами $u^{(i)}(a) = c_i$, $i = \overline{0, n-1}$ на еквівалентне інтегральне рівняння Вольтерри [3]

$$y(x) = \int_a^x \tilde{K}(x, s; y(s))\,dt + \varphi(x),$$

де

$$\tilde{K}(x, s; y(s)) = K(x, s; y_1(s), \dots, y_m(s), y(s)) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} b_j(x) \frac{(x-s)^{(n-j-1)}}{(n-j-1)!} y(s);$$

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} b_j(x) \frac{(x-s)^j}{j!} u^{(n-j-1)}(a).$$

Для розв'язування отриманих інтегральних рівнянь існує велика кількість обчислювальних методів [2, 9, 12], в більшості яких лежить заміна інтеграла квадратурними формулами або використання сплайнів [14]. Крім того, широке використання знаходять ітераційні методи [11], методи Рунге-Кутта [7]. Для нелінійних рівнянь, ефективним є використання спеціалізованих ітераційних методів.

Розглянемо наступний метод зведення інтегро-диференціального рівняння до інтегрального рівняння [6]. Якщо виходити з нелінійних залежностей між напруженнями та деформаціями [3], динамічні задачі теорії в'язкопружності можуть бути зведені до системи інтегро-диференціальних рівнянь вигляду:

$$\ddot{U}_i(t) + \omega_i^2 + U_i(t) =$$

$$= X_i \left\{ t, U_1(t), \dots, U_n(t), \int_0^t \varphi_i(t, \tau, U_1(\tau), \dots, U_n(\tau))\,d\tau \right\} \tag{8}$$

з початковими умовами

$$U_i(0) = U_{0i}, \dot{U}_i(0) = \overline{U}_{oi}, \tag{9}$$

де ω_i — стала величина, $i = \overline{1, n}$; $U_i(t)$ — невідомі функції від t; X_i, φ_i — задані функції.

Подвійним інтегруванням системи (8) по t з врахуванням початкових умов (9) отримаємо

$$U_i(t) = U_{0i} + \bar{U}_{0i}t - \omega_i^2 \int_0^t (t-\tau) U_i(\tau)\, d\tau + \\ + \int_0^t (t-\tau) X_i \left\{ \tau, U_1(\tau), \dots, U_n(\tau), \int_0^\tau \varphi_i(\tau, s, U_1(s), \dots, U_n(s))\, d\tau \right\}. \tag{10}$$

Для чисельного розв'язування системи (10) використаємо метод прямої заміни інтегралів квадратурною формулою. Тоді наближені розв'язки системи (10) у вузлах $t_m = (m-1)\Delta t$, $m = 1, 2, 3\dots$, (Δt — крок інтегрування) послідовно визначаються із системи

$$U_{mi} = U_{0i} + \bar{U}_{0i}t_m - \omega_i^2 \sum_{j=1}^{m-1} A_j (t_m - t_j) U_{ji} + \\ + \sum_{j=1}^{m-1} B_j^{(i)} (t_m - t_j) X_i \left\{ t_i, U_{j1}, \dots, U_{jn}, \sum_{k=1}^{j} C_k^{(i)} \varphi_i (t_j, t_k, U_{k1}, \dots U_{kn}) \right\}, \tag{11}$$

де A_j, $B_j^{(i)}$, $C_k^{(i)}$ — коефіцієнти, які не залежать від вибору функцій X_i та φ_i, $i = \overline{1, n}$ та мають різні значення в залежності від використаних квадратурних формул.

Завдяки подвійному інтегруванню вихідної системи по t та використанню квадратурної формули отримано просту рекурентну залежність (11) для знаходження чисельних значень функції $U_i(t)$.

Для системи інтегро-диференціальних рівнянь (8) нижче запропоновано ще один спосіб чисельного розв'язування, заснований на використанні квадратурних формул.

Модифікований метод зведення інтегро-диференціального рівняння до інтегрального рівняння. Використовуючи метод варіації довільних сталих довільна система (8) зводиться до вигляду

$$U_i(t) = U_{0i} \cos \omega_i t + \frac{\bar{U}_{0i}}{\omega_i} \sin \omega_i t + \\ + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t X_i \left\{ \tau, U_1(\tau), \dots, U_n(\tau), \int_0^\tau \varphi_i (\tau, s, U_1(s), \dots U_n(s))\, ds \right\} \times \\ \times \sin \omega_i (t-\tau)\, d\tau. \tag{12}$$

Провівши заміну інтегралів квадратурними формулами наближене значення $U_{mi} = U_i(t_m)$, $m = 2, 3\dots$, як розв'язок системи (12) у точках $t_m = (m-1)\Delta t$ послідовно знаходяться за формулою

$$U_{mi} = U_{0i}\cos\omega_i t_m + \frac{\overline{U}_{0i}}{\omega_i}\sin\omega_i t_m + \frac{1}{\omega_i}\sum_{j=1}^{m-1} A_j X_i \times$$

$$\times\left\{t_j, U_{j1}, \ldots U_{jn}, \sum_{k=1}^{j} B_k^{(i)}\varphi_i\left(t_j, t_k, U_{k1}, \ldots U_{kn}\right)\sin\omega_i\left(t_m - \tau_j\right)\right\}, \qquad (13)$$

$$i = \overline{1, n},\ m = 2, 3, \ldots$$

Формула (13) має рекурентний характер, що дозволяє будувати ефективний комп'ютерний алгоритм її реалізації.

Приклад 1. Розглянемо вертикальні коливання трьох тіл (див. рис. 1) з масами m_1, m_2, m_3, які з'єднані нелінійними в'язкопружними пружинами [4].

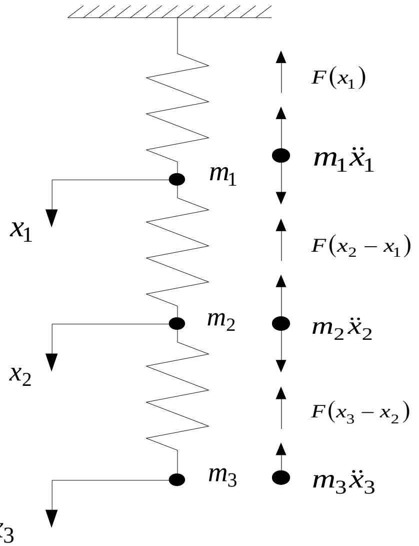

Рис. 1. *Принципова та силова схема задачі*

Позначимо зміщення мас m_1, m_2, m_3 від положення статичної рівноваги через x_1, x_2, x_3 а силу дії пружини на масу — через $F(z)$. Використовуючи принцип Даламбера та розглядаючи уявний стан рівноваги мас до яких прикладені сили інерції та сила відновлення, отримаємо:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + F(x_1) - F(x_2 - x_1) = 0, \\ m_2\ddot{x}_2 + F(x_2 - x_1) - F(x_3 - x_2) = 0, \\ m_3\ddot{x}_3 + F(x_3 - x_2) = 0. \end{cases} \qquad (14)$$

Для функції $F(z)$ візьмемо вираз

$$F(z)=k\left\{z\left(1+\beta z^2\right)-\int_0^t R(t,\tau)z(\tau)\left[1+\beta z^2(\tau)d\tau\right]\right\}, \tag{15}$$

де k — жорсткість пружини; β — коефіцієнт нелінійності, який залежить від фізичних властивостей матеріалу пружини; $R(t, \tau)$ — ядро релаксації.

Якщо k_1, k_2, k_3 — відповідно жорсткість першої, другої та третьої пружин, тоді з урахуванням (15) система (14) отримає вигляд

$$\begin{cases} \ddot{x}_1+\omega_1^2 x_1=\omega_{21}^2\left(x_2-x_1\right)\left[1+\beta_2\left(x_2-x_1\right)^2\right]- \\ -\omega_1^2\beta_1 x_1^3+\omega_1^2\int_0^t R_1(t,\tau)x_1(\tau)\left[1+\beta_1 x_1^2(\tau)\right]d\tau- \\ -\omega_{21}^2\int_0^t R_2(t,\tau)\left[\overset{\circ}{x}_2(\tau)-x_1(\tau)\right]\left\{1+\beta_2\left[x_2(\tau)-x_1(\tau)\right]^2\right\}d\tau, \\ \ddot{x}_2+\omega_2^2 x_2=\omega_2^2 x_1\left[1+\beta_2\left(x_2-x_1\right)^2\right]- \\ \omega_{32}^2\left(x_3-x_2\right)\left[1+\beta_3\left(x_3-x_2\right)^2\right]-\omega_2^2\beta_2 x_2\left(x_2-x_1\right)^2+ \\ +\omega_2^2\int_0^t R_2(t,\tau)\left[x_2(\tau)-x_1(\tau)\right]\left\{1+\beta_2\left[x_2(\tau)-x_1(\tau)\right]^2\right\}d\tau- \\ -\omega_{31}^2\int_0^t R_3(t,\tau)\left[x_3(\tau)-x_2(\tau)\right]\left\{1+\beta_3\left[x_3(\tau)-x_2(\tau)\right]^2\right\}d\tau, \\ \ddot{x}_3+\omega_3^2 x_3=\omega_3^2 x_2\left[1+\beta_3\left(x_3-x_2\right)^2\right]-\omega_3^2\beta_3 x_3\left(x_3-x_2\right)^2+ \\ +\omega_3^2\int_0^t R_3(t,\tau)\left[x_3(\tau)-x_2(\tau)\right]\left\{1+\beta_3\left[x_3(\tau)-x_2(\tau)\right]^2\right\}d\tau, \end{cases} \tag{16}$$

де $\dfrac{k_i}{m_i}=\omega_i^2$, $i=\overline{1...3}$, $\dfrac{k_2}{m_1}=\omega_{21}^2$, $\dfrac{k_3}{m_2}=\omega_{32}^2$.

Для проведення обчислень повинні бути задані початкові значення зміщень та швидкостей, тобто $x_i(0)=x_{0i}$, $\dot{x}_i(0)=V_i$, $i=\overline{1...3}$.

Для підготовки розрахункових виразів систему (16) запишемо у формі (12). Вважаючи, що у отриманій системі $t = t_m = mh$, $m = 1, 2,\dots$ для обчислення наближених значень функцій $x_i(t)$, ($i = 1, 2, 3$) у точках t_m, $m = 1, 2,\dots$ аналогічно (13) отримаємо:

$$\begin{cases} x_{m1} = x_{01}\cos\omega_1 t_m + \dfrac{V_1}{\omega_1}\sin\omega_1 t_m + \\ +\dfrac{1}{\omega_1}\sum\limits_{j=0}^{m-1} A_j^{(1)}\Big\{\omega_{21}^2\left(x_{j2}-x_{j1}\right)\Big[1+\beta_2\left(x_{j2}-x_{j1}\right)^2\Big] - \\ -\omega_1^2\beta_1 x_{j1}^3 + \omega_1^2\sum\limits_{k=0}^{j} B_k^{(1)}R_1\left(t_j,t_k\right)x_{k1}\left(1+\beta_1 x_{k1}^2\right) - \\ -\omega_{21}^2\sum\limits_{k=0}^{j} C_k^{(1)}R_2\left(t_j,t_k\right)\left(x_{k2}-x_{k1}\right)\Big[1+\beta_2\left(x_{k2}-x_{k1}\right)^2\Big]\Big\}\sin\omega_1\left(t_m-t_j\right), \\ x_{m2} = x_{02}\cos\omega_2 t_m + \dfrac{V_2}{\omega_2}\sin\omega_2 t_m + \\ +\dfrac{1}{\omega_2}\sum\limits_{j=0}^{m-1} A_j^{(2)}\Big\{\omega_2^2 x_{j1}\Big[1+\beta_2\left(x_{j2}-x_{j1}\right)^2\Big] + \\ +\omega_{32}^2\left(x_{j3}-x_{j2}\right)\Big[1+\beta_3\left(x_{j3}-x_{j2}\right)^2\Big] - \omega_2^2\beta_2 x_{j2}\left(x_{j2}-x_{j1}\right)^2 \\ +\omega_2^2\sum\limits_{k=0}^{j} B_k^{(2)}R_2\left(t_j,t_k\right)\left(x_{k2}-x_{k1}\right)\Big[1+\beta_2\left(x_{k2}-x_{k1}\right)^2\Big] - \\ -\omega_{32}^2\sum\limits_{k=0}^{j} C_k^{(2)}R_3\left(t_j,t_k\right)\left(x_{k3}-x_{k2}\right)\Big[1+\beta_3\left(x_{k3}-x_{k2}\right)^2\Big]\Big\}\sin\omega_2\left(t_m-t_j\right), \\ x_{m3} = x_{03}\cos\omega_3 t_m + \dfrac{V_3}{\omega_3}\sin\omega_3 t_m + \\ +\dfrac{1}{\omega_3}\sum\limits_{j=0}^{m-1} A_j^{(3)}\Big\{\omega_3^2 x_{j2}\Big[1+\beta_3\left(x_{j3}-x_{j2}\right)^2\Big] - \omega_3^2\beta_3 x_{j3}\left(x_{j3}-x_{j2}\right)^2 - \\ -\omega_3^2\sum\limits_{k=0}^{j} B_k^{(3)}R_3\left(t_j,t_k\right)\left(x_{k3}-x_{k2}\right)\Big[1+\beta_3\left(x_{k3}-x_{k2}\right)^2\Big]\Big\}\sin\omega_1\left(t_m-t_j\right), \\ m=1,2,3. \end{cases} \tag{17}$$

Таким чином задача підготовлена для обчислення значень x_{mi}, $m = 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, 3$ за формулою (17).

Спосіб визначення впливу на багатомасову систему, який є еквівалентним впливу початкових умов. При дослідженні динаміки багатомасових механічних систем (також систем іншої фізичної природи, наприклад електричних кіл) важливе значення має задача визначення зовнішніх сил (збурень) еквівалентних впливу початкових умов.

Для розв'язування цієї задачі можна скористатись операційним методом або теорією δ-функцій [1], в результаті отримаємо праві частини диференціальних рівнянь (функції навантаження) дія яких при нульових початкових умовах дорівнює збуренню від початкових значень координат та їх похідних у випадку однорідного рівняння. Розглянемо інший підхід до розв'язування такої задачі [5].

Інтегральний спосіб. Нехай диференціальне рівняння перехідного процесу відносно зміщення i-ї маси від положення рівноваги у i, $(i + 1)$-й ланці має вигляд

$$Lx = f(t), \tag{18}$$

де L — диференціальний оператор n–го порядку.

Надамо рівнянню (18) загальні початкові умови для $t = 0$:

$$x^{(n-1)}\Big|_{t=0} = x^{(n-1)}(0),\ x^{(n-2)}\Big|_{t=0} = x^{(n-2)}(0), \dots,\ x\Big|_{t=0} = x(0).$$

Припустивши, що

$$U(t) = x^{(n)}(t), \tag{19}$$

приведемо рівняння (18) до інтегрального рівняння вигляду [2]

$$U(t) + \int_0^t K(t, y)u(y)dy = f(t) + G(t), \tag{20}$$

де $G(t)$ — функція, утворена початковими умовами, яку запишемо у формі

$$G(t) = -\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu} x^{n-\mu}(0)\, a_{\nu-1}\frac{t^{\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!}, \tag{21}$$

де $a_{\nu-1}$ — коефіцієнти диференціального оператора L.

Припустивши, що

$$F(t) = f(t) + G(t) \tag{22}$$

запишемо диференціальне рівняння наступним чином:

$$Lx = F(t).$$

Якщо привести диференціальне рівняння (22) до інтегрального, отримаємо рівняння (20), яке буде еквівалентне диференціальному рівнянню (18) з початковими умовами (19). Зауважимо, що права частина рівняння (22) має елемент $G(t)$, який дає в якості часткового розв'язку фіктивний рух системи, як «твердого тіла».

Оскільки функція $G(t)$ являє собою поліном (21), то її частковий розв'язок легко знаходиться за відомою лівою частиною диференціального рівняння. Визначаючи частковий розв'язок у вигляді поліному з невизначеними коефіцієнтами

$$x^* = P(t), \tag{23}$$

знаходимо їх значення з рівняння

$$L\left[P(t)\right]=G(t)\,.$$

Зрозуміло, що частковий розв'язок (23) повинен бути усунутий із загального розв'язку рівняння (22).

Приклад 2. Нехай задано диференціальне рівняння перехідного процесу

$$x^{IV}+a_0\ddot{x}+a_1x=f\left(t\right) \tag{24}$$

з початковими умовами загального вигляду

$$x\big|_{t=0}=x_0,\ \dot{x}\big|_{t=0}=\dot{x}_0,\ \ddot{x}\big|_{t=0}=\ddot{x}_0,\ \dddot{x}\big|_{t=0}=\dddot{x}_0\,. \tag{25}$$

Вважаючи що $x^{IV}=u(t)$, приводимо (24) до наступних залежностей:

$$x^{IV}=u\left(t\right),$$

$$\dddot{x}=\int_0^t u\left(t\right)dt+\dddot{x}_0,$$

$$\ddot{x}=\int_0^t\left(t-y\right)u\left(y\right)dy+\dddot{x}_0t+\ddot{x}_0, \tag{26}$$

$$\dot{x}=\int_0^t\frac{\left(t-y\right)^2}{2!}u\left(y\right)dy+\frac{\dddot{x}_0t^2}{2!}+\ddot{x}_0t+\dot{x},$$

$$x=\int_0^t\frac{\left(t-y\right)^3}{3!}u\left(y\right)dy+\frac{\dddot{x}_0t^3}{3!}+\frac{\ddot{x}_0t^2}{2!}+\dot{x}_0t+x_0.$$

Підставивши значення x та його похідних у диференціальне рівняння (24), отримаємо наступне інтегральне рівняння

$$u\left(t\right)+\int_0^t K\left(t,y\right)u\left(y\right)dy=f\left(t\right)-G\left(t\right). \tag{27}$$

Ядро рівняння

$$K(t,y)=a_0(t-y)+a_1\frac{(t-y)^3}{3!}\,.$$

Функція, яка утворена початковими умовами руху, буде мати вигляд:

$$G\left(t\right)=\dddot{x}_0\left(a_0t+a_1\frac{t^3}{3!}\right)+\ddot{x}_0\left(a_0+a_1\frac{t^2}{2!}\right)+\dot{x}_0a_1t+x_0a_1\,. \tag{28}$$

Рівнянню (27), або диференціальному рівнянню (24), відповідає диференціальне рівняння

$$x^{IV}+a_0\ddot{x}+a_1x=f(t)+G(t) \tag{29}$$

при нульових початкових умовах. В цьому випадку частковий розв'язок, записаний у вигляді інтеграла Коші буде також його загальним розв'язком.

Нехай реакція системи на одиничний імпульс представлена функцією $B_1(t)$. Тоді

$$x = \int_0^t \left[f(t) - G(y) \right] B_1(t-y)dy \,. \tag{30}$$

Перший інтеграл $I_1 = \int_0^t f(y) B_1(t-y)\,dy$ представляє собою частковий розв'язок рівняння (24) від правої частини $f(t)$. Другий інтеграл $I_2 = -\int_0^t G(y) B_1(t-y)\,dy$ повинен дати частковий розв'язок того ж рівняння, еквівалентний збуренням, які внесені початковими умовами. Підставивши у другий інтеграл значення $G(t)$ (28), отримаємо

$$\begin{gathered} I_2 = -\dddot{x}_0 \int_0^t \left(a_0 y + a_1 \frac{y^3}{3!} \right) B_1(t-y)\,dy - \\ -\ddot{x}_0 \int_0^t \left(a_0 + a_1 \frac{y^2}{2!} \right) B_1(t-y)\,dy - \dot{x}_0 a_1 \int_0^t y B_1(t-y)\,dy - x_0 a_1 \int_0^t B_1(t-y)\,dy. \end{gathered} \tag{31}$$

Враховуючи, що $\int_0^t \frac{y^k}{k!} B_1(t-y)\,dy = B_1^{(-k-1)}(t)$ та проінтегрувавши рівність (31), знайдемо

$$\begin{gathered} I_2 = -\dddot{x}_0 \left[a_0 B_1^{(-2)}(t) + a_1 B_1^{(-4)}(t) \right] - \\ -\ddot{x}_0 \left[a_0 B_1^{(-1)}(t) + a_1 B_1^{(-3)}(t) \right] - \dot{x}_0 a_1 B_1^{(-2)}(t) - x_0 a_1 B_1^{(-1)}(t). \end{gathered}$$

Скориставшись співвідношенням

$$B_1^{(k)}(t) = \left(\frac{t^3}{3!} \right)^k - a_0 B_1^{(k-2)}(t) - a_1 B_1^{(k-4)}(t)\,,\ k = 0,1,2,\dots,$$

та виконавши перетворення, отримаємо

$$\begin{gathered} I_2 = x_0 \left[1 - a_1 B_1^{(-1)}(t) \right] + \dot{x}_0 \left[t - a_1 B_1^{(-2)}(t) \right] + \ddot{x}_0 B_1^{(-1)}(t) + \\ + \dddot{x}_0 B_1(t) - \dddot{x}_0 \frac{t^3}{3!} - \ddot{x}_0 \frac{t^2}{2!} - \dot{x}_0 t - x_0\,, \end{gathered} \tag{32}$$

або після підстановки $t = \frac{\tau}{\sqrt{a_0}}$:

$$\begin{gathered} I_2 = x_0 \left[1 - c_1 B_1^{(-1)}(\tau) \right] + \dot{x}_0 \frac{1}{\sqrt{a_0}} \left[\tau - c_1 B_1^{(-2)}(\tau) \right] + \ddot{x}_0 \frac{1}{a_0} B_1^{(1)}(\tau) + \\ + \dddot{x}_0 \frac{1}{a_0\sqrt{a_0}} B_1(\tau) - \dddot{x}_0 \frac{1}{a_0\sqrt{a_0}} \frac{\tau^3}{3!} - \ddot{x}_0 \frac{1}{a_0} \frac{\tau^2}{2!} - \dot{x}_0 \frac{1}{\sqrt{a_0}} \tau - x_0. \end{gathered} \tag{33}$$

Розв'язок однорідного диференціального рівняння (24) з початковими умовами (25) у перехідних функціях B_1 записується в наступній формі:

$$x = x_0\left[1 - c_1 B_1^{(-1)}(\tau)\right] + \dot{x}_0 \frac{1}{\sqrt{a_0}}\left[\tau - c_1 B_1^{(-2)}(\tau)\right] + \\ + \ddot{x}_0 \frac{1}{a_0} B_1^{(1)}(\tau) + \dddot{x}_0 \frac{1}{a_0\sqrt{a_0}} B_1^{(1)}(\tau). \tag{34}$$

Порівнявши розв'язки (33) та (34) відмічаємо їх відмінність на один поліном $-\dddot{x}_0 \frac{1}{a_0\sqrt{a_0}}\frac{\tau^3}{3!} - \ddot{x}_0 \frac{1}{a_0}\frac{\tau^2}{2!} - \dot{x}_0 \frac{1}{\sqrt{a_0}}\tau - x_0$, який утворений початковим умовами руху. Цей поліном є частковим розв'язком (23) диференціального рівняння

$$x^{IV} + a_0\ddot{x} + a_1 x = -G(t), \tag{35}$$

де $G(t)$ — функція, що визначена рівністю (28).

Знайдемо частковий розв'язок рівняння (35) у вигляді

$$x^* = At^3 + Bt^2 + Ct + D. \tag{36}$$

Диференціюючи поліном (36) та підставляючи значення його похідних в рівняння (35), а потім прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t, отримаємо $A = -\frac{\dddot{x}_0}{3!}$, $B = -\frac{\ddot{x}_0}{2!}$, $C = -\dot{x}_0$, $D = -x_0$. Тоді частковий розв'язок рівняння (36) записуємо у вигляді $x^* = -\frac{\dddot{x}_0}{3!}t^3 - \frac{\ddot{x}_0}{2!}t^2 - \dot{x}_0 t - x_0$, або після переходу до аргументу τ:

$$x^* = -\frac{\dddot{x}_0}{a_0\sqrt{a_0}\,3!}\tau^3 - \frac{\ddot{x}_0}{a_0\,2!}\tau^2 - \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{a_0}}\tau - x_0. \tag{37}$$

Обернена задача. Обернена задача — це задача, коли зовнішні навантаження, тобто праві частини диференціальних рівнянь, представляють у вигляді еквівалентних їм початкових умов руху. Припустимо

$$F_{i,i+1} \equiv x.$$

Розглянемо диференціальне рівняння перехідного процесу

$$Lx = G_i(t). \tag{38}$$

Вважаючи початкові умови нульовими та $x^{(r)} = u(t)$, приведемо рівняння (18) до інтегрального рівняння Вольтерри II роду:

$$u(t) + \int_0^t K(t, y)u(y)\,dy = G_i(t). \tag{39}$$

Розглянемо однорідне диференціальне рівняння

$$Lx = 0 \tag{40}$$

з диференціальним оператором

$$L = \frac{d^r}{dt^r} + p_1 \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} + p_2 \frac{d^{r-2}}{dt^{r-2}} + \ldots + p_r$$

та початковими умовами для $t = 0$:

$$x^{(r-1)}(0) = x_0^{(r-1)},\ x^{(r-2)}(0) = x_0^{(r-2)} \ldots,\quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0,\quad x(0) = x_0. \quad (41)$$

Вважаючи, що $x^{(r)} = u(t)$ запишемо наступне інтегральне рівняння еквівалентне рівнянню (40) з початковими умовами (41):

$$u(t) + \int_0^t K(t, y) u(y)\, dy = F(t). \quad (42)$$

У рівнянні (42) функція $F(t)$ утворена за рахунок початкових умов руху (41). У відповідності до рівності (21) вона записується наступним чином:

$$F(t) = -\sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\mu=1}^{\nu} x_0^{r-\mu} p_{\nu-1} \frac{t^{\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!}, \quad (43)$$

де $p_{\nu-1}$ — коефіцієнти диференціального оператора L. Розписуючи подвійну суму (43), отримаємо

$$\begin{aligned} F(t) = &-\left[p_1 x_0^{(r-1)} + p_2 x_0^{(r-2)} + \ldots + p_r x_0 \right] - \\ &-\left[p_2 x_0^{(r-1)} + p_3 x_0^{(r-2)} + \ldots + p_r \dot{x}_0 \right] \frac{t}{1!} - \\ &-\left[p_3 x_0^{(r-1)} + p_4 x_0^{(r-2)} + \ldots + p_r \ddot{x}_0 \right] \frac{t^2}{2!} - \ldots - \\ &-\left[p_{r-1} x_0^{(r-1)} + p_r x_0^{(r-2)} \right] \frac{t^{(r-2)}}{(r-2)!} - p_r x_0^{(r-1)} \frac{t^{(r-1)}}{(r-1)!}. \end{aligned} \quad (44)$$

Припустимо, що права частина диференціального рівняння (38) має вигляд поліному

$$G_i(t) = \sum_{k=0}^{r-1} b_k \frac{t_k}{k!}. \quad (45)$$

Вимагатимемо рівності функцій (44) та (45) та припустимо рівність коефіцієнтів при однакових степенях аргументу t. В результаті отримаємо наступну систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} b_{r-1} &= -x_0^{(r-1)} p_r; \\ b_{r-2} &= -x_0^{(r-1)} p_{r-1} - x_0^{(r-2)} p_r; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ b_0 &= -x_0^{(r-1)} p_1 - x_0^{(r-2)} p_2 - \cdots - x_0 p_r. \end{aligned} \quad (46)$$

Оскільки матриця рівнянь (46) має трикутний вигляд

$$\begin{pmatrix} p_r & 0 & \dots & 0 \\ p_{r-1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

тому пошук невідомих легко провести за допомогою методу Гауса, а саме:

$$x_0^{(r-1)} = \frac{b_{r-1}}{p_r},$$

$$x_0^{(r-2)} = \frac{b_{r-2} - \frac{p_{r-1}}{p_r} b_{r-1}}{p_r}, \tag{47}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Визначивши початкові умови рівняння (40) за формулою (47) отримаємо, що інтегральні рівняння (39) та (42) є еквівалентними. З цього можна зробити висновок про еквівалентність неоднорідних рівнянь з ненульовими початковими умовами (38).

При такому способі рівняння (40) втратить частинний розв'язок, який відповідає правій частині рівняння (38). Оскільки права частина рівняння (38) представлена поліномом (45), то його частинний розв'язок визначає статику системи тобто його рух, як «твердого тіла» та може бути знайдений методом невизначених коефіцієнтів. Висновок пояснимо прикладом.

Приклад 3. Розглянемо трьохмасову систему з вільними кінцями. Нехай до першої маси цієї системи прикладена зовнішня сила $f_1(t)$. Диференціальне рівняння такої системи:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{12} + \omega_{12}^2 x_{12} - \frac{c_{12}}{m_2} x_{23} &= \frac{c_{12}}{m_1} f_1(t), \\ \ddot{x}_{23} + \omega_{23}^2 x_{23} - \frac{c_{23}}{m_2} x_{12} &= 0, \end{aligned} \tag{48}$$

де $\omega_{12}^2 = c_{12} \dfrac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$, $\omega_{23}^2 = c_{23} \dfrac{m_2 + m_3}{m_2 m_3}$. Рівняння для визначення пружної сили у вузлі

$$x_{12}^{IV} + c_{12} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} + c_{23} \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3} \ddot{x}_{12} + c_{12} c_{23} \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} x_{12} =$$

$$= \frac{c_{12}}{m_1} \left[\ddot{f}_1(t) + c_{23} \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3} f_1(t) \right], \tag{49}$$

$$x_{23}^{IV} + c_{12} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} + c_{23} \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3} \ddot{x}_{23} + c_{12} c_{23} \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3} x_{23} = \frac{c_{12} c_{23}}{m_1 m_2} f_1(t).$$

Для диференціальних рівнянь (48) задані початкові умови для $t = 0$:

$$x_{12}(0)=0\,,\ \dot{x}_{12}(0)=0\,,\ x_{23}(0)=0\,,\ \dot{x}_{23}(0)=0\,. \tag{50}$$

З системи (48) при підстановці t = 0 та початкових умов (50) знаходимо

$$\ddot{x}_{12}(0)=\frac{c_{12}}{m_1}f_1(0)\,,\ \dddot{x}_{12}(0)=\frac{c_{12}}{m_1}\dot{f}_1(0)\,,\ \dddot{x}_{23}(0)=\ddot{x}_{23}(0)=0\,. \tag{51}$$

Нехай $f_1(t) = f_0(t) = const$, тоді початкові умови рівняння (49) з урахуванням значень (50) та рівності (51), будуть наступними:

$$\begin{gathered} x_{12}(0)=0,\quad \dot{x}_{12}(0)=0,\quad \ddot{x}_{12}(0)=\frac{c_{12}}{m_1}f_0,\quad \dddot{x}_{12}(0)=0,\\ x_{23}(0)=0,\quad \dot{x}_{23}(0)=0,\quad \ddot{x}_{23}(0)=0,\quad \dddot{x}_{23}(0)=0, \end{gathered} \tag{52}$$

а праві частини рівняння (49) отримають вигляд:

$$f_{12}=c_{12}c_{23}\frac{m_2+m_3}{m_1m_2m_3}f_0,\quad f_{23}=c_{12}c_{23}\frac{f_0}{m_1m_2}. \tag{53}$$

Оскільки задані рівняння є неповними, тому що відсутні непарні похідні, то при $r = 4$ коефіцієнти формул (46) будуть наступними: $p_4 = a_1$, $p_3 = 0$, $p_2 = a_0$, $p_1 = 0$.

Разом з цим, праві частини диференціальних рівнянь (53) є постійними величинами і тому коефіцієнти у розкладі функції навантаження (45), за виключенням b_0, дорівнюватимуть нулю. З врахуванням цієї обставини рівності (46) для першого рівняння (49) з правою частиною f_{12} будуть наступними:

$$\begin{gathered} 0=-\dddot{x}_0a_1,\\ 0=-\dddot{x}_0\cdot 0-\ddot{x}_0a_1,\\ 0=-\ddot{x}_0\cdot 0-\dddot{x}_0a_0-\dot{x}_0a_1,\\ c_{12}c_{23}\frac{(m_2+m_3)f_0}{m_2m_3}=-\dddot{x}_0\cdot 0-\ddot{x}_0a_0-\dot{x}_0\cdot 0-x_0a_1, \end{gathered} \tag{54}$$

звідки еквівалентні початкові умови мають вигляд

$$\dddot{x}_0=0\,,\ \ddot{x}_0=0\,,\ x_0=-c_{12}c_{23}\frac{m_2+m_3}{m_1m_2m_3}\cdot\frac{f_0}{a_1}\,.$$

Підставляючи значення a_1 з формули (21) отримаємо

$$x_0=-\mu_1 f_0\,, \tag{55}$$

де $\mu_1=\dfrac{m_2+m_3}{m_1+m_2+m_3}$.

Еквівалентні початкові умови для правої частини f_{23} знаходяться схоже: $\dddot{x}_0=0$, $\ddot{x}_0=0$, $\dot{x}_0=0$, $x_0=-c_{12}c_{23}\dfrac{m_2+m_3}{m_1m_2m_3}\times\dfrac{f_0}{a_1}$. Розділивши, знайдемо що $x_0=-\mu_2 f_0$, де $\mu_2=\dfrac{m_3}{m_1+m_2+m_3}$.

Запишемо розрахункові початкові умови диференціальних рівнянь у вигляді суми умов (52) та (55):

$$x_{12}(0) = -\mu_1 f_0, \quad \dot{x}_{12}(0) = 0, \quad \ddot{x}_{12}(0) = \frac{c_{12}}{m_1} f_0, \quad \dddot{x}_{12}(0) = 0,$$
$$x_{23}(0) = \mu_2 f_0, \quad \dot{x}_{23}(0) = 0, \quad \ddot{x}_{23}(0) = 0, \quad \dddot{x}_{23}(0) = 0. \tag{56}$$

Розв'язок рівняння (49) при початкових умовах (56) відповідно до (22) буде наступним:

$$x_{12} = -\mu_1 f_0 \left[1 - c_1 B_1^{(-1)}(\tau)\right] + \frac{c_{12} f_0}{m_1 a_0} B_1^{(1)}(\tau),$$
$$x_{23} = -\mu_2 f_0 \left[1 - c_1 B_1^{(-1)}(\tau)\right]. \tag{57}$$

Покажемо, що розв'язок (57) не містить статичних переміщень та відповідно статичної складової пружної сили, яка виникає у ланках системи. Провівши заміну у рівнянні (49) з правими частинами (53) аргументу $t = \dfrac{\tau}{\sqrt{a_0}}$, отримаємо

$$F_{12}^{IV} + \ddot{F}_{12} + c_1 F_{12} = c_{12} c_{23} \frac{m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3 a_0^2} f_0,$$
$$F_{23}^{IV} + \ddot{F}_{23} + c_1 F_{23} = c_{12} c_{23} \frac{1}{m_1 m_2 a_0^2} f_0. \tag{58}$$

Перетворюємо праві частини рівнянь (58) наступним чином:

$$f_{12} = c_{12} c_{23} \frac{(m_2 + m_3 + m_1 - m_1)}{m_1 m_2 m_3 a_0^2} f_0 = \frac{a_1}{a_0^2} f_0 - \frac{c_{12} c_{23} m_1}{m_1 m_2 m_3 a_0^2} f_0$$

або

$$f_{12} = c_1 f_0 - \frac{c_{12} c_{23} m_1 (m_1 + m_2 + m_3)}{m_1 m_2 m_3 a_0^2 (m_1 + m_2 + m_3)} =$$
$$= c_1 f_0 - c_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} f_0.$$

Звідки

$$c_1 \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} f_0 = \mu_1 c_1 f_0,$$
$$f_{23} = \frac{c_{12} c_{23}}{m_1 m_2 a_0^2} f_0 = c_{12} c_{23} \frac{m_3 (m_2 + m_3 + m_1)}{m_1 m_2 m_3 (m_2 + m_3 + m_1) a_0^2} f_0 = \mu_2 c_1 f_0. \tag{59}$$

Оскільки диференціальні рівняння вже приведені до аргументу τ, частковий розв'язок у формі Коші наступний

$$x_{12}^{*} = \mu_1 c_1 \int_0^{\tau} B(\tau - y)\,dy = \mu_1 c_1 B^{(-1)}(\tau),$$
$$x_{23}^{*} = \mu_2 c_1 \int_0^{\tau} B(\tau - y)\,dy = \mu_2 c_1 B^{(-1)}(\tau). \qquad (60)$$

Частковий розв'язок записаний у формі (60) враховує дію статичних сил. Але величина статичних сил може бути отримана, як частковий розв'язок рівняння (58) знайдений іншим методом.

Наприклад, при постійних правих частинах рівняння (58) доцільно шукати часткові розв'язки також у вигляді постійних величин x_{12}^{*} та x_{23}^{*}.

Підставляємо постійну величину x_{12}^{*} у ліву частину першого рівняння системи (58) та враховуючи значення правої частини рівності (59), знаходимо $c_1 F_{12}^{*} = \mu_1 c_1 f_0$, або

$$x_{12}^{*} = \mu_1 f_0 . \qquad (61)$$

Якщо врахувати прискорення системи, як твердого тіла, тоді

$$\left(x_{12}\right)_{cm} = f_0 - \mu_1 f_0 = f_0\left(1 - \mu_1\right),$$

де $\mu_1 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3}$.

Тому $\left(x_{12}\right)_{cm} = f_0\left(1 - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3}\right)$.

Таким чином, форма часткового розв'язку (61) визначає статичну складову дії пружної сили у ланці. Так само визначимо, що для правої частини (59) частковий розв'язок другого рівняння (58)

$$x_{23}^{*} = \left(x_{23}\right)_{cm} = \mu_2 f_0 . \qquad (62)$$

Запишемо загальний розв'язок рівняння (58) для заданих початкових умов (52) з врахуванням (60):

$$x_{12} = \frac{c_{12}}{m_1 a_0} f_0 B_1^{(1)}(\tau) + \mu_1 f_0 c_1 B_1^{(-1)}(\tau),$$
$$x_{23} = \mu_2 f_0 c_1 B_1^{(-1)}(\tau). \qquad (63)$$

Ці розв'язки відрізняються від розв'язків (57) тільки на величини (61) та (62). Додаючи до правої частини рівності (57) величини статичних сил (61) та (62), отримуємо формули (63). Тому у наведеному неоднорідному рівнянні початковими умовами не враховані лише статичні складові розв'язку.

Висновки. Отже, задача визначення зовнішніх збурень на динамічну систему еквівалентних дії початкових значень вихідних координат системи, розв'язана використовуючи інтегральну форму задачі Коші.

Запропонований метод дозволяє розв'язувати як прямі так і обернені задачі аналізу багатомасових систем.

Список використаних джерел:

1. Бадалов Ф. Б., Абдукаримов Р. Х., Худаяров Б. А. Численное исследование влияния реологических параметров на характер колебаний наследственно–деформируемых систем. *Вычислительные технологии.* 2007. Т. 12. № 4. С. 17-26. ISSN 1560-7534.
2. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие. Киев: Наукова думка, 1986. 545 с.
3. Дячук О. А. Перетворення моделей динамічних систем. *Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія «Інформатика, кібернетика і обчислювальна техніка»*. Донецьк: ДонНТУ, 2007. Вип. 8 (120). С. 99-106.
4. Партон В. З., Морозов Е. М. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1985. 504 с.
5. Победря Б. Е. Математическая теория нелинейной вязкоупругости. *Сборник Упругость и неупругость.* М.: Изд-во МГУ, 1973. Вып. 3. С. 95-173.
6. Федорчук В. А. Интегральный метод математического моделирования некоторых видов объектов с распределенными параметрами. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова*. 2005. Вип. 28. С. 25-31. ISSN XXXX–0067.
7. Day J. T. Note on the numeric solution of integro-differential equations. URL: http://comjnl.oxfordjournals.org/content/9/4/394.full.pdf+html.
8. Feldstein A., Sopka J. R. Numerical methods for nonlinear Volterra integrodifferential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1974. № 11. P. 826-846. ISBN 0036-1429.
9. Hochstadt H. Integral Equations. New York: John Wiley & Sons, 1973. 282 p. ISBN 0-471-50404-1.
10. Tiller M. Introduction to physical modeling with Modelica. NY.: Springer, 2001. 344 p. ISBN 0-79-239005-9.
11. Linz P. Linear multistep methods for Volterra integro-differential equations. *Journal of the Association of Computing Machinery*. 1969. № 16. P. 295-301. ISSN 0004-5411.
12. Porter D., Stirling D. S. G. Integral Equations: A Practical Treatment, from spectral theory to applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 372 p. ISBN 0-52-133742-9.
13. Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. Numerical Mathematics. New York: Springer-Verlag, 2000. 655 p. ISBN 9-78-354034-65-86.
14. Riley K. F., Hobson M. P., Bence S. J. Mathematical Methods for Physics and Engineering. New York: Cambridge university press, 2006. 1333 p. ISBN 0-52-189067-5.
15. Wang Y. Spline integral equation method for analysis of variable thickness plate. *Comput. Struct. Mech. and Appl.* 1991. № 1. P. 33-40.

16. Problems of electrical engineering, Lviv, Ukraine: Lviv Polytechnic National University, 2016. Vol. 6, № 1. P. 9-16.

EQUIVALENT TRANSFORMATIONS OF MATHEMATICAL MODELS OF VISCOELASTIC DYNAMIC OBJECTS

The article is devoted to the problem of obtaining computationally efficient mathematical models of dynamic objects with viscoelastic properties on the basis of equivalent transformations of primary mathematical descriptions in the form of integro-differential equations to Volterra integral equations. This takes into account the significantly growing in recent years, the possibilities of computer engineering and software engineering, as well as the positive properties of integral models in their numerical implementation: computational stability, good convergence, resistance to high-frequency spectra of noise, a computational efficiency. Methods of transformation of dynamic models are given, which allow to reduce integro-differential equations to integral equations with Volterra operator, which simplifies the problem of creating modelling algorithms. In particular, the application of integral models in computer modelling problems, which are obtained from primary integro-differential models using the following methods of equivalent transformations: the method of variation of constants, the method of senior derivative, the modified method of substituting variables, which in numerical implementation using quadrature formulas allows to obtain recurrent formulas. An example of application of this method is given. The possibility of solving the direct and inverse problem of determining the impact on a multimass system using the integral form of the Cauchy problem is demonstrated. It is shown that the problem of developing more complete and thorough mathematical models of dynamical systems, namely in the form of integro-differential equations, is important and relevant, and their numerical implementation is necessary for a wide range of applied modelling problems.

Key words: *viscoelastic dynamic object model, integral model, equivalent model transformations*

Отримано: 25.09.2020