УДК 517.929
DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.164-173

**І. М. Черевко**, д-р фіз.-мат. наук, професор,
**А. Б. Дорош**, канд. фіз.-мат. наук,
**А. С. Перцов**, канд. фіз.-мат. наук,
**І. М. Гаюк**, аспірант

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

# МОДЕЛЮВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

У задачах космічної навігації, оптимальному керуванні системами з післядією, задачах екології та імунології виникають крайові задачі для диференціально-різницевих та інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням, які є важливим розділом сучасної теорії диференціально-функціональних рівнянь. Знаходження точних розв'язків крайових задач для диференціально-різницевих рівнянь можливе тільки для найпростіших класів таких задач.

На даний час для крайових задач із запізненням та нейтрального типу запропоновано проекційно-ітераційні методи, чисельно-аналітичний метод та інші. Метод сплайн-колокацій для розв'язування крайових задач для диференціально-різницевих рівнянь є одним із найефективніших алгоритмів, що дозволяє побудувати прості обчислювальні схеми.

У роботі досліджується схема моделювання крайових задач для лінійних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу із багатьма змінними відхиленнями аргументу. Визначено функціональний простір, якому належать розв'язки розглянутих крайових задач, досліджено властивості гладкості розв'язків залежно від структури відхилень аргументу. Наведено прості для перевірки достатні умови існування розв'язку крайової задачі.

Для знаходження розв'язку крайової задачі запропоновано ітераційну обчислювальну схему, що базується на методі сплайн-апроксимацій. Для врахування можливих розривів похідних розв'язків крайової задачі для рівнянь нейтрального типу застосовуються кубічні сплайни дефекту два. Встановлено коефіцієнтні умови на вихідне рівняння, що забезпечують збіжність ітераційного процесу. Здійснено оцінку похибки знаходження наближеного розв'язку.

У роботі наведено модельний приклад крайової задачі для диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу, на якому продемонстровано запропоновану ітераційну схему. Чисельні експерименти підтверджують одержані теоретичні результати.

**Ключові слова:** *крайова задача, диференціально-різницеве рівняння, нейтральний тип, метод сплайн-апроксимації.*

 

**Вступ.** Крайові задачі для диференціально-різницевих рівнянь виникають при дослідженні варіаційних задач та задач автоматичного керування системами з післядією. При цьому важливими є дослідження розв'язності таких крайових задач та вивчення властивостей їх розв'язків.

Умови існування розв'язків крайових задач для різних класів диференціально-різницевих рівнянь розглядались у працях [1-3]. Достатні умови існування розв'язку крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу досліджено в [4].

Точні розв'язки крайових задач для диференціально-різницевих рівнянь можна знайти тільки для найпростіших класів таких рівнянь, тому важливою і актуальною є розробка наближених алгоритмів їх знаходження.

Метод сплайн-колокацій для розв'язування крайових задач із запізненням та нейтрального типу розглядався в [3, 5, 6].

У роботі для крайової задачі для лінійних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу запропоновано ітераційну схему із застосуванням кубічних сплайнів дефекту два, яка дозволяє врахувати можливі розриви похідних у розв'язках.

**Постановка задачі. Існування та єдиність розв'язку.** Розглянемо крайову задачу

$$y''(x)=\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x)\,y\big(x-\tau_i(x)\big)+b_i(x)\,y'\big(x-\tau_i(x)\big)+ \\ +c_i(x)\,y''\big(x-\tau_i(x)\big)\Big)+f(x), \tag{1}$$

$$y^{(p)}(x)=\varphi^{(p)}(x),\ p=0,1,2,\ x\in\left[a^*;a\right],\ y(b)=\gamma, \tag{2}$$

де запізнення $\tau_0(x)=0$, а $\tau_i(x),\ i=\overline{1,n}$ — неперервні невід'ємні функції, визначені на $[a,b]$, $\varphi(x)$ — задана двічі неперервно-диференційовна функція на $\left[a^*;a\right]$, $\gamma\in R$,

$$a^*=\min_{0<i\le n}\left\{\inf_{x\in[a;b]}\big(x-\tau_i(x)\big)\right\}.$$

Нехай функції $a_i(x),b_i(x),c_i(x),i=\overline{0,n},\ f(x)$ — неперервні на $[a;b]$.

Введемо множини точок, що визначаються запізненнями $\tau_1(x),\ldots,\tau_n(x)$:

$$E_{i1}=\left\{x_j\in[a,b]:x_j-\tau_i\left(x_j\right)=a,\ j=1,2,\ldots\right\},$$

$$E_{i2} = \left\{ x_j \in [a,b] : x_0 = a,\ x_{j+1} - \tau_i\left(x_{j+1}\right) = x_j,\ j = 0,1,2,\ldots \right\},$$

$$E_2 = \bigcup_{i=1}^{n} (E_{i1} \cup E_{i2}).$$

Припустимо, що запізнення $\tau_i(x), i = \overline{1,n}$ — такі функції, що множини $E_{i1}, E_{i2}, i = \overline{1,n}$ є скінченними. Занумеруємо точки множини $E_2$ в порядку зростання.

Введемо позначення:

$$J = \left[a^*; a\right],\ I = [a,b],$$

$$I_1 = [a, x_1],\ I_2 = [x_1, x_2],\ \ldots,\ I_k = [x_{k-1}, x_k],\ I_{k+1} = [x_k, b],$$

$$B_2(J \cup I) = \{ y(x) : y(x) \in (C(J \cup I) \cap (C^1(J) \cup C^1(I)) \cap$$

$$\cap (\bigcup_{j=1}^{k+1} C^2(I_j))), |\, y(x) | \le P_1, |\, y'(x) | \le P_2, |\, y''(x) | \le P_3 \},$$

де $P_1, P_2, P_3$ — додатні сталі.

Розв'язком крайової задачі (1)-(2) вважатимемо функцію $y = y(x)$, якщо вона задовольняє рівняння (1) на $[a;b]$ (за можливим винятком точок множини $E_2$) і крайові умови (2). Будемо шукати розв'язок задачі (1)-(2), який належить простору $B_2(J \cup I)$.

Із означення простору $B_2(J \cup I)$ випливає, що розв'язок задачі (1)-(2) буде неперевно-диференційовним для будь-якого $x \in [a,b]$, де $y'(a)$ — права похідна, а в точках множини $E_2$ існують скінченні односторонні другі похідні розв'язку, які можуть не співпадати.

**Обчислювальна схема. Збіжність ітераційного процесу.** Виберемо нерівномірну сітку $\Delta = \{ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b \}$ на відрізку $[a;b]$, таку що $E_2 \subset \Delta$. Позначимо через $S(x, y)$ інтерполяційний кубічний сплайн дефекту два на $\Delta$ для функції $y(x)$, який належить простору $B_2(J \cup I)$. Будемо шукати розв'язок крайової задачі (1)-(2) у вигляді послідовності кубічних сплайнів дефекту 2 за наступною схемою:

A. Виберемо кубічний сплайн $S\left(y^{(0)}, x\right) = \dfrac{\gamma - \varphi(a)}{b-a}(x-a) + \varphi(a)$, який задовольняє крайові умови (2) при $x = a$ та $x = b$.

B. Використовуючи вихідне рівняння (1) та сплайн $S\left(y^{(k)}, x\right)$, знаходимо для $k = 0,1,\ldots$ :

$$M_j^{+(k+1)} = \sum_{i=0}^{n} (a_i(x_j)S(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) + 0) + b_i(x_j)S'(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) + 0) + \\ + c_i(x_j)S''(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) + 0)) + f(x_j), j = \overline{0, m-1}, \tag{3}$$

$$M_j^{-(k+1)} = \sum_{i=0}^{n} (a_i(x_j)S(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) - 0) + b_i(x_j)S'(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) - 0) + \\ + c_i(x_j)S''(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) - 0)) + f(x_j), j = \overline{1, m}. \tag{4}$$

У співвідношеннях (3)-(4), підставляємо $S^{(p)}\left(x, y^{(k)}\right) = \varphi^{(p)}(x)$, $p = 0,1,2$ при $x < a$.

C. Обчислюємо $y_j^{(k+1)}, j = \overline{0, m}$, розв'язуючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яку задовольняють величини $M_{j-1}^{+}$ і $M_j^{-}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

$$\begin{cases} h_{j+1}y_{j-1} - (h_j + h_{j+1})y_j + h_j y_{j+1} = \dfrac{h_j h_{j+1}}{6} \times \\ \times\left(h_j M_{j-1}^{+} + 2h_j M_j^{-} + 2h_{j+1} M_j^{+} + h_{j+1} M_{j+1}^{-}\right), \\ j = \overline{1, m-1}. \end{cases} \tag{5}$$

D. Одержуємо кубічний сплайн $S\left(x, y^{(k+1)}\right)$ у формі

$$S(x, y) = M_{j-1}^{+}\frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j^{-}\frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1}^{+}h_j^2}{6}\right)\frac{x_j - x}{h_j} + \\ + \left(y_j - \frac{M_j^{-}h_j^2}{6}\right)\frac{x - x_{j-1}}{h_j}, x \in [x_{j-1}; x_j], \; j = 1, 2, \ldots, m, \tag{6}$$

використовуючи знайдені значення $y_j^{(k+1)}, j = \overline{0, m}$, $M_j^{+(k+1)}, j = \overline{0, m-1}$, $M_j^{-(k+1)}, j = \overline{1, m}$. Цей сплайн виступає в якості наступного наближення.

Введемо позначення:

$$\lambda_1 = \sum_{i=0}^{n} \max_{x\in[a;b]} |a_i(x)|, \; \lambda_2 = \sum_{i=0}^{n} \max_{x\in[a;b]} |b_i(x)|, \; \lambda_3 = \sum_{i=0}^{n} \max_{x\in[a;b]} |c_i(x)|, \\ u = \frac{K^5}{8}(b-a)^2 + \frac{H^2}{8}, \; v = \frac{K^5}{2}(b-a) + \frac{2H}{3}, \tag{7} \\ \mu = 5\left(1 + \frac{1}{2}\lambda_1 H^2 + \lambda_2 H + \lambda_3\right).$$

**Теорема.** Нехай розв'язок крайової задачі (1)-(2) існує та належить простору $B_2(J \cup I)$. Тоді при виконанні нерівності

$$\theta = u\lambda_1 + v\lambda_2 + \lambda_3 < 1 \tag{8}$$

існує таке $H^*$, що при всіх $0 < H < H^*$ послідовність сплайнів $\left\{S\left(y^{(k)}, x\right)\right\}$, $k = 0,1,\ldots$ рівномірно збігається на $[a;b]$ і справджуються співвідношення

$$\left\|\lim_{k\to\infty} S^{(p)}(y^{(k)}, x) - y^{(p)}(x)\right\| \le R_p\omega\left(y''(x), H\right),\ p = 0,1,2, \tag{9}$$

$$R_0 = \sup_{H\le H^*}\left(\frac{u\mu}{1-\theta} + \frac{5H^2}{2}\right),\ R_1 = \sup_{H\le H^*}\left(\frac{v\mu}{1-\theta} + 5H\right),$$

$$R_2 = \sup_{H\le H^*}\left(\frac{\mu}{1-\theta} + 5\right),\ \omega\left(y''(x), H\right) = \max_{1\le r\le l+1}\omega_r\left(y''(x), H\right).$$

**Доведення.** Покажемо, що ряди

$$S^{(p)}\left(y^{(0)}, x\right) + \sum_{i=1}^{\infty}\left[S^{(p)}\left(y^{(i)}, x\right) - S^{(p)}\left(y^{(i-1)}, x\right)\right],\ p = 0,1,2$$

рівномірно збігаються на $[a;b]$, і тим самим одержимо рівномірну збіжність послідовностей $S^{(p)}\left(y^{(k)}, x\right), k = 0,1,\ldots, p = 0,1,2$.

Визначимо скалярні функції $y(x), M(x)$ на $[a;b]$ і позначимо вектори

$$\bar{y} = \left(y(x_1),\ldots,y(x_{m-1})\right)^T,$$

$$\bar{M} = (M(x_0+0), M(x_1-0), M(x_1+0), \ldots, M(x_{m-1}-0),$$
$$M(x_{m-1}+0), M(x_m-0))^T.$$

Ітераційний алгоритм A)-D) представимо у матричній формі:

$$\bar{y}^{(k+1)} = A^{-1}B\bar{M}^{k+1} + A^{-1}d, \tag{10}$$

де компоненти вектора $\bar{M}$ визначені згідно (3)-(4), а сталий вектор $d$ залежить лише від крайових умов (2). Легко помітити, що матриця $A$ — невироджена, отже побудова ітераційної послідовності кубічних сплайнів $S\left(y^{(k)}, x\right)$, $k = 0,1,\ldots$ можлива.

Із представлення (10) випливають наступні оцінки:

$$\left\|y^{(k+1)} - y^{(k)}\right\| = \left\|A^{-1}BM^{k+1} - A^{-1}BM^{k}\right\| \le \left\|A^{-1}\right\|\left\|B\right\|\left\|\bar{M}^{k+1} - \bar{M}^{k}\right\|. \tag{11}$$

Враховуючи (3)-(4) та вигляд правої частини рівняння (1), одержуємо нерівності

$$\left\| M_j^{+(k+1)} - M_j^{+(k)} \right\| \le \lambda_1 \max_{x\in[a;b]} \left| S\left(y^{(k)},x\right) - S\left(y^{(k-1)},x\right) \right| + \\ +\lambda_2 \max_{x\in[a;b]} \left| S'\left(y^{(k)},x\right) - S'\left(y^{(k-1)},x\right) \right| + \\ +\lambda_3 \max_{x\in[a;b]} \left| S''\left(y^{(k)},x\right) - S''\left(y^{(k-1)},x\right) \right|, j=\overline{0,m-1},$$
$$\left\| M_j^{-(k+1)} - M_j^{-(k)} \right\| \le \lambda_1 \max_{x\in[a;b]} \left| S\left(y^{(k)},x\right) - S\left(y^{(k-1)},x\right) \right| + \\ +\lambda_2 \max_{x\in[a;b]} \left| S'\left(y^{(k)},x\right) - S'\left(y^{(k-1)},x\right) \right| + \\ +\lambda_3 \max_{x\in[a;b]} \left| S''\left(y^{(k)},x\right) - S''\left(y^{(k-1)},x\right) \right|, j=\overline{1,m}. \tag{12}$$

Нерівність (11) можна записати наступним чином:

$$\left\| y^{(k+1)} - y^{(k)} \right\| \le \frac{K^5}{8}(b-a)^2 [\lambda_1 \left\| S\left(y^{(k)},x\right) - S\left(y^{(k-1)},x\right) \right\| + \\ +\lambda_2 \left\| S'\left(y^{(k)},x\right) - S'\left(y^{(k-1)},x\right) \right\| + \lambda_3 \left\| S''\left(y^{(k)},x\right) - S''\left(y^{(k-1)},x\right) \right\|]. \tag{13}$$

Позначимо

$$d = \lambda_1 \left\| S\left(y^{(k)},x\right) - S\left(y^{(k-1)},x\right) \right\| + \lambda_2 \left\| S'\left(y^{(k)},x\right) - S'\left(y^{(k-1)},x\right) \right\| + \\ +\lambda_3 \left\| S''\left(y^{(k)},x\right) - S''\left(y^{(k-1)},x\right) \right\|.$$

Ітеруючи нерівність (13) і враховуючи позначення (7) та умову (8), одержуємо

$$\left\| S\left(y^{(k+1)},x\right) - S\left(y^{(k)},x\right) \right\| \le u\theta^{k-1}d, \\ \left\| S'\left(y^{(k+1)},x\right) - S'\left(y^{(k)},x\right) \right\| \le v\theta^{k-1}d, \\ \left\| S''\left(y^{(k+1)},x\right) - S''\left(y^{(k)},x\right) \right\| \le \theta^{k-1}d. \tag{14}$$

Співвідношення (14), при виконанні умови (8), забезпечують збіжність послідовностей сплайнів $\left\{ S^{(p)}\left(y^{(k)},x\right) \right\}, k=0,1,\ldots, p=0,1,2$ .

Позначимо

$$\lim_{k\to\infty} S^{(p)}\left(y^{(k)},x\right) = S^{(p)}\left(\tilde{y},x\right),\ p=0,1,2,$$
$$M_j^+ = S''\left(\tilde{y},x_j+0\right),\ j=\overline{0,m-1},$$
$$M_j^- = S''\left(\tilde{y},x_j-0\right),\ j=\overline{1,m},$$
$$y_j = S\left(\tilde{y},x_j\right),\ j=\overline{1,m}.$$

При цьому

$$M_j^+ = \sum_{i=0}^{n} (a_i(x_j)S(\tilde{y}, x_j - \tau_i(x_j)+0) + b_i(x_j)S'(\tilde{y}, x_j - \tau_i(x_j)+0) +$$
$$+c_i(x_j)S''(\tilde{y}, x_j - \tau_i(x_j)+0)) + f(x_j), j = \overline{0, m-1},$$
$$M_j^- = \sum_{i=0}^{n} (a_i(x_j)S(\tilde{y}, x_j - \tau_i(x_j)-0) + b_i(x_j)S'(\tilde{y}, x_j - \tau_i(x_j)-0) +$$
$$+c_i(x_j)S''(\tilde{y}, x_j - \tau_i(x_j)-0)) + f(x_j), j = \overline{1, m}.$$

Параметри $M_j^+$, $M_j^-$ сплайна $S(\tilde{y}, x)$ задовольняють систему (5) та рівняння (3)-(4).

Нехай $S(y, x)$ — кубічний сплайн дефекту 2, який інтерполює розв'язок $y(x)$ крайової задачі (1)-(2). Тоді

$$\left\|S^{(p)}(\tilde{y}, x) - y^{(p)}(x)\right\| \le \left\|S^{(p)}(\tilde{y}, x) - S^{(p)}(y, x)\right\| + \\ + \left\|S^{(p)}(y, x) - y^{(p)}(x)\right\|, p = 0,1,2. \quad (15)$$

Для другого доданка у правій частині (15) справджуються нерівності [7]:

$$\left\|S^{(p)}(y, x) - y^{(p)}(x)\right\| \le K_p H^{2-p} \omega\left(y''(x), H\right), \\ p = 0,1,2, \ K_0 = \frac{5}{2}, \ K_1 = K_2 = 5, \quad (16)$$

де $\omega\left(y''(x), H\right) = \max\limits_{1 \le r \le k+1} \omega_r\left(y''(x), H\right)$, $\omega_r\left(y''(x), H\right)$ — модуль неперервності функції $y''(x)$ на $I_r = [x_{r-1}; x_r]$.

Для оцінки першого доданка у правій частині (15), згідно вигляду правої частини рівняння (1), введемо позначення:

$$\max_{x \in [a;b]} \left|S^{(p)}(\tilde{y}, x) - S^{(p)}(y, x)\right| = \alpha_p, \ p = 0,1,2,$$

$$\max_j \left|M_j - M_j\right| = \max\left\{ \max_{j=\overline{0,m-1}} \left|M_j^+ - M_j^+\right|, \max_{j=\overline{1,m}} \left|M_j^- - M_j^-\right| \right\}.$$

Враховуючи структуру правих частин рівнянь (3) та (4), дістаємо оцінки:

$$\left|M_j^+ - M_j^+\right| \le \lambda_1\alpha_0 + \lambda_2\alpha_1 + \lambda_3\alpha_2 + \mu\omega(y''(x), H), \ j = \overline{0, m-1}, \quad (17)$$

$$\left|M_j^- - M_j^-\right| \le \lambda_1\alpha_0 + \lambda_2\alpha_1 + \lambda_3\alpha_2 + \mu\omega\left(y''(x), H\right), \ j = \overline{1, m}. \quad (18)$$

Нескладно показати, що має місце оцінка

$$\left|y_j - y_j\right| \le \frac{K^5}{8}(b-a)^2 \max\left\{\max_{\underline{j=0,m-1}}\left|M_j^+ - M_j^+\right|, \max_{\underline{j=1,m}}\left|M_j^- - M_j^-\right|\right\}. \quad (19)$$

Використовуючи формули для $S\left(\tilde{y},x\right), S\left(y,x\right)$ та нерівності (17)-(19), отримуємо наступну систему нерівностей:

$$\begin{gathered}\alpha_0 \le u(\alpha_0\lambda_1 + \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_3 + \mu\omega\left(y''(x), H\right)),\\ \alpha_1 \le v(\alpha_0\lambda_1 + \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_3 + \mu\omega\left(y''(x), H\right)),\\ \alpha_2 \le \alpha_0\lambda_1 + \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_3 + \mu\omega\left(y''(x), H\right).\end{gathered} \quad (20)$$

Розв'язуючи систему (20), знаходимо оцінки для перших доданків у правій частині (15):

$$\alpha_0 \le \frac{u\mu\omega\left(y''\left(x\right), H\right)}{1-\theta},$$

$$\alpha_1 \le \frac{v\mu\omega\left(y''\left(x\right), H\right)}{1-\theta},$$

$$\alpha_2 \le \frac{\mu\omega\left(y''\left(x\right), H\right)}{1-\theta}.$$

Тепер, враховуючи (16), нерівності (15) можна записати у вигляді (9).

**Теорему доведено.**

**Зауваження.** При використанні описаного алгоритму розв'язування крайових задач (1)-(2) за наближений розв'язок вибирається $S\left(y^{(k)}, x\right)$ при деякому $k > 0$. Оцінимо похибку, яка буде при цьому допущена. Із нерівностей (14) маємо:

$$\left\|S^{(p)}\left(y^{(k+j)}, x\right) - S^{(p)}\left(y^{(k)}, x\right)\right\| \le \theta^{k-1}\max\left(u, v, 1\right) d\,\frac{1-\theta^i}{1-\theta},\ p = 0,1,2.$$

Нехай $H < H^*$. Тоді з попередньої нерівності одержуємо:

$$\left\|S^{(p)}\left(\tilde{y}, x\right) - S^{(p)}\left(y^{(k)}, x\right)\right\| \le \frac{\theta^{k-1}}{1-\theta}\max\left(u, v, 1\right) d.$$

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує кількість ітерацій $k_0$, така що при $k > k_0$

$$\left\|S^{(p)}\left(\tilde{y}, x\right) - S^{(p)}\left(y^{(k)}, x\right)\right\| \le \varepsilon,\ p = 0,1,2.$$

Тоді при $k > k_0$ і виконанні умов теореми одержуємо оцінку похибки

$$\left\|S^{(p)}\left(y^{(k)}, x\right) - y^{(p)}\left(x\right)\right\| \le \varepsilon + K_p\omega\left(y''\left(x\right), H\right),\ p = 0,1,2. \quad (21)$$

**Приклад.** Розглянемо крайову задачу для рівняння нейтрального типу:

$$y''(x) = \frac{1}{4} y''(x-1) + 1, \; x \in [0;2],$$

$$y(x) = x, \; y'(x) = 1, \; y''(x) = 0, \; x \in [-1;0], \; y(2) = \frac{5}{2}.$$

Точний розв'язок $y(x)$ було знайдено методом кроків. Наближений розв'язок, згідно запропонованої в роботі ітераційної схеми, $y_S^{20}(x)$ та $y_S^{40}(x)$ одержано на 2-й ітерації при 20 та 40 точках розбиття відрізка відповідно. $\Delta_S^{20}$ та $\Delta_S^{40}$ — абсолютні похибки наближених розв'язків. Результати наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

| $x$ | $y(x)$ | $y_S^{20}(x)$ | $\Delta_S^{20}$ | $y_S^{40}(x)$ | $\Delta_S^{40}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 0.21875 | 0.21552 | 0.00323 | 0.21716 | 0.00159 |
| 1 | 0.6875 | 0.68146 | 0.00604 | 0.68443 | 0.00307 |
| 1.5 | 1.4375 | 1.43448 | 0.00302 | 1.43596 | 0.00154 |

При порівнянні точного та наближеного розв'язків видно, що абсолютна похибка при 20 точках розбиття не перевищує 0,006, а відносна — 0,8%, а при 40 точках розбиття абсолютна похибка не перевищує 0,003, а відносна — 0,4%.

**Висновки.** Застосування методу сплайн-апроксимацій із використанням кубічних сплайнів дефекту два дозволяє побудувати зручні для реалізації та ефективні алгоритми розв'язання крайових задач для рівнянь нейтрального типу. Одержані достатні умови збіжності обчислювальної схеми є простими для перевірки. Здійснені числові експерименти для модельного прикладу підтверджують одержані в роботі теоретичні результати.

## Список використаних джерел:


1. Grim L. J., Schmitt K. Boundary Value Problems for Delay Differential Equations. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1968. Vol. 74, № 5. P. 997-1000.
2. Каменский Г. А., Мышкис А. Д. Краевые задачи для нелинейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом нейтрального типа. *Дифференц. уравнения.* 1972. Т. 8, № 12. С. 2171-2179.
3. Cherevko I., Dorosh A. Existence and Approximation of a Solution of Boundary Value Problems for Delay Integro-Differential Equations. *J. Numer. Anal. Approx. Theory*. 2016. Vol. 44, № 2. P. 154-165.
4. Дорош А. Б., Черевко І. М. Існування розв'язку крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу. *Буковинський математи-*

*тичний журнал.* Чернівці: Чернівецький національний університет, 2016. Т. 4, № 3-4. С. 43-46.
5. Nikolova T. S., Bainov D. D. Application of spline-functions for the construction of an approximate solution of boundary problems for a class of functional-differential equations. *Yokohama Math. J.* 1981. Vol. 29, № 1. P. 108-122.
6. Настасьєва Н. П., Черевко І. М. Кубічні сплайни дефекту 2 та їх застосування до крайових задач. *Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки.* 1999. Вип. 1. С. 69-73.
7. Alberg J., Nilson E., Walsh J. The theory of splines and their applications. New York: Academic, 1967. 296 p.

## MODELING OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR LINEAR NEUTRAL DELAY DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS

In space navigation problems, optimal control of systems with aftereffect, ecology and immunology problems, boundary value problems for differential-difference and integro-differential equations with delays arise, which are an important part of modern theory of differential-functional equations. Finding precise solutions of boundary value problems for differential-difference equations is possible only for the simplest classes of such problems.

At present, projection-iterative methods, numerical-analytical method and others are suggested for boundary value problems with delay and of neutral type. The spline-collocation method for solving boundary value problems for differential-difference equations is one of the most efficient algorithms that allows building simple computational schemes.

In this paper, we investigate the scheme of modeling boundary value problems for linear differential-difference equations of neutral type with many variable deviations of the argument. A functional space is defined to which the solutions of the considered boundary value problems belong, the properties of the solution smoothness are investigated depending on the structure of the argument deviations. Simple and verifiable sufficient conditions for the boundary value problem solution existence are given.

For finding the solution of the boundary value problem, an iterative computational scheme based on the spline approximation method is described. In order to take into account possible discontinuities of the boundary value problem solution derivatives, cubic splines of defect two are used for neutral-type equations. Coefficient conditions for the initial equation which ensure the convergence of the iterative process are obtained. An estimate of the approximate solution error is conducted.

A model example of a boundary value problem for a neutral type differential-difference equation is presented on which the iterative scheme is demonstrated. Numerical experiments confirm the obtained theoretical results.

**Key words:** *boundary value problem, differential-difference equation, neutral type, spline approximation method.*

Отримано: 12.10.2020