УДК 517.9
DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.5-16

С. М. Бак, канд. фіз.-мат. наук

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ В СИСТЕМІ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ ЗІ СТЕПЕНЕВИМИ ПОТЕНЦІАЛАМИ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Стаття присвячена вивченню нескінченновимірної гамільтонової системи, яка описує динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Рівняння руху цієї системи представляють собою зчисленну систему звичайних диференціальних рівнянь. Останню систему зручно розглядати як диференціально-операторне рівняння у гільбертовому просторі дійсних двохсторонніх послідовностей. Розглядається задача про існування періодичних розв'язків для таких систем зі степеневими потенціалами. Основними умовами існування цих розв'язків є просторова періодичність коефіцієнтів оператора лінійної взаємодії осциляторів та додатність цього оператора. У цій статті показано, що періодичні розв'язки можна побудувати за допомогою методу умовної мінімізації. Для цього побудовано функціонал, критичні точки якого є шуканими періодичними розв'язками. Цей функціонал представлено у вигляді різниці квадратичної і неквадратичної частин. Далі розглянуто задачу умовної мінімізації квадратичної частини функціоналу за умови, що неквадратична частина стала. За допомогою методу множників Лагранжа встановлено, що періодичні розв'язки даної системи лінійно залежать від розв'язків розглянутої задачі умовної мінімізації, зокрема, коефіцієнт лінійної залежності виражається через множник Лагранжа. За допомогою дискретного варіанту принципу концентрованої компактності доведено, що розглянута задача умовної мінімізації має розв'язок, а отже, існують періодичні розв'язки вихідної системи. Зокрема, показано, що для довільної мінімізуючої послідовності квадратичної частини побудованого функціоналу виконується можливість «концентрація» принципу концентрованої компактності, що дозволило довести обмеженість цієї послідовності. Більше того, доведено, що для достатньо великих значень періодів ці розв'язки не є сталими.

Ключові слова: *нелінійні осцилятори, двовимірна ґратка, періодичні розв'язки, метод умовної мінімізації.*

Вступ. Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи широко використовуються для моделювання складних оптичних і квантових явищ. Серед таких систем найбільш відомими є системи зв'язаних осциляторів, дискретні рівняння типу синус-Ґордона, системи типу Фермі-Пасти-Улама, дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера.

Серед розв’язків таких систем особливої уваги заслуговують біжучі хвилі. В статтях [2; 4; 5; 12; 17; 21] досліджено питання існування біжучих хвиль в системах осциляторів на двовимірній ґратці. В той же час для систем типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці відомі декілька праць [6; 19; 22], в яких отримано умови існування періодичних та відокремлених біжучих хвиль. В статтях [3; 8; 14; 16; 18] вивчались біжучі хвилі для дискретного рівняння sin-Ґордона на двовимірній ґратці.

Зауважимо, що в статтях [1; 24] вивчалися періодичні розв’язки в системах осциляторів та системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. А в статтях [9; 11; 13; 15] досліджено питання коректності задачі Коші для систем осциляторів на двовимірній ґратці.

Ще одним важливим класом розв’язків є стоячі хвилі. В статтях [7; 10; 20] досліджувалось питання існування стоячих хвиль для дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера на двовимірній ґратці.

Мета статті: показати, що періодичні розв’язки системи лінійно зв’язаних нелінійних осциляторів можна побудувати за допомогою методу умовної мінімізації.

Постановка задачі. У цій статті вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи лінійно зв’язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ — узагальнена координата (n, m)-го осцилятора в момент часу t. Передбачається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\begin{gathered}\ddot{q}_{n,m} = -U'_{n,m}(q_{n,m}) + a_{n-1,m}\left(q_{n-1,m} - q_{n,m}\right) - a_{n,m}\left(q_{n,m} - q_{n+1,m}\right) + \\ + b_{n,m-1}\left(q_{n,m-1} - q_{n,m}\right) - b_{n,m}\left(q_{n,m} - q_{n,m+1}\right),\ \left(n, m\right) \in \mathbb{Z}^2.\end{gathered} \tag{1}$$

Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь.

Розглядаються такі розв’язки системи (1), що

$$\lim_{n,m\to\pm\infty} q_{n,m}(t) = 0, \tag{2}$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Потенціал $U_{n,m}(r)$ запишемо у вигляді $U_{n,m}(r) = -\frac{d_{n,m}}{2}r^2 + +V_{n,m}(r)$ і покладемо $c_{n,m} = d_{n,m} - a_{n-1,m} - a_{n,m} - b_{n,m-1} - b_{n,m}$. Тоді система (1) матиме вигляд

$$\begin{gathered}\ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + \\ + c_{n,m}q_{n,m} - V'_{n,m}(q_{n,m}),\ \left(n, m\right) \in \mathbb{Z}^2.\end{gathered} \tag{3}$$

Покажемо, що за допомогою методу умовної мінімізації можуть бути побудовані T -періодичні розв'язки системи (3) зі степеневими потенціалами вигляду

$$V_{n,m}(r) = \frac{g_{n,m}}{p}|r|^p , \tag{4}$$

де $g_{n,m} > 0,\ p > 2$. У цьому випадку система (3) набуває вигляду

$$\begin{gathered} \ddot{q}_{n,\,m} = a_{n-1,\,m}q_{n-1,\,m} + a_{n,\,m}q_{n+1,\,m} + b_{n,\,m-1}q_{n,\,m-1} + b_{n,\,m}q_{n,\,m+1} + \\ + c_{n,\,m}q_{n,\,m} - g_{n,\,m}\left|q_{n,\,m}\right|^{p-2} q_{n,\,m},\ \left(n,\,m\right) \in \mathbb{Z}^2, \end{gathered} \tag{5}$$

Враховуючи граничні умови (2), цю систему зручно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q) , \tag{6}$$

де

$$\left(Aq\right)_{n,\,m} = a_{n-1,\,m}q_{n-1,\,m} + a_{n,\,m}q_{n+1,\,m} + b_{n,\,m-1}q_{n,\,m-1} + b_{n,\,m}q_{n,\,m+1} + c_{n,\,m}q_{n,\,m},$$

а нелінійний оператор B визначається формулою

$$\left(B(q)\right)_{n,\,m} = V'_{n,\,m}\left(q_{n,\,m}\right)$$

в просторі $l^2 = l^2\left(\mathbb{Z}^2\right)$ дійсних послідовностей $q = \left\{q_{n,\,m}\right\}$ зі скалярним добутком

$$\left(q^{(1)},\, q^{(2)}\right) = \sum_{n,\,m\in\mathbb{Z}} q^{(1)}_{n,\,m}\, q^{(2)}_{n,\,m}.$$

Норму в $l^2 = l^2\left(\mathbb{Z}^2\right)$ позначатимемо $\|\cdot\|$.

Передбачається, що послідовності $\left\{a_{n,m}\right\}$, $\left\{b_{n,m}\right\}$, $\left\{d_{n,m}\right\}$ і $\left\{g_{n,m}\right\}$ просторово періодичні (по n і m) з деяким натуральним періодом N та виконується наступна умова:

$\left(P\right)$ Оператор A додатно визначений, тобто існує таке $\alpha_0 > 0$, що $\left(Aq,\, q\right) \ge \alpha_0\|q\|^2$.

Нехай $T > 0$. Позначимо через X_T підпростір T -періодичних функцій із $H^1_{loc}\left(\mathbb{R};\, l^2\right)$. Це гільбертів простір зі скалярним добутком $\left(q,\ p\right)_T = \int\limits_{-T/2}^{T/2} \left[\left(\dot{q}(t),\ \dot{p}(t)\right) + \left(q(t),\ p(t)\right)\right]dt$ та відповідною нормою $\|\, q\,\|_T = \left(q,\, q\right)_T^{1/2}$. Простір X_T складається із послідовностей

$q=\left\{q_{n,m}(t)\right\}_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ таких функцій $q_{n,m}\in H^1_{loc}(\mathbb{R})$, що $q_{n,m}(t+T)=q_{n,m}(t)$ і $\|q\|_T^2=\sum_{(n,\,m)\in\mathbb{Z}^2}\|q_{n,m}\|^2_{H^1(-T/2;\,T/2)}<\infty$, де $\|u\|^2_{H^1(a;\,b)}=$ $=\int_a^b\left[|\dot u(t)|^2+|u(t)|^2\right]dt$. На просторі X_T розглянемо функціонал

$$\Phi(u)=\int_{-T/2}^{T/2}\left\{\frac{1}{2}\|\dot u(t)\|^2+\frac{1}{2}\big(Au(t),\,u(t)\big)-\frac{1}{p}\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}g_{n,m}\left|u_{n,m}(t)\right|^p\right\}dt. \quad (7)$$

Неважко переконатися, що критичні точки цього функціоналу є T-періодичними розв’язками задачі (5), (2), тобто рівняння (6).

Основний результат. Для будь-якого $\theta>0$ розглянемо задачу мінімізації, яка полягає у знаходженні функції $u\in X_T$, при якій існує

$$\inf_{v\in X_T}\left\{\Psi(v):S(v)=\theta\right\}=:I_\theta. \quad (8)$$

Теорема 1. Нехай u — розв’язок задачі (8). Тоді $q=\lambda^{\frac{1}{p-2}}u$ є T-періодичним розв’язком задачі (5), (2).

Доведення. Нехай для деякого $\theta>0$ задача (8) має розв’язок і $u\in X_T$ — відповідна точка мінімуму. Оскільки функціонали Ψ та S неперервно диференційовні, то існує таке $\lambda\in\mathbb{R}$ (множник Лагранжа), що

$$\begin{aligned}&\int_{-T/2}^{T/2}\left[\big(\dot u(t),\,\dot v(t)\big)+\big(Au(t),\,v(t)\big)\right]dt=\\&=\lambda\int_{-T/2}^{T/2}\left[\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}g_{n,m}\left|u_{n,m}(t)\right|^{p-2}u_{n,m}(t)v_{n,m}(t)\right]dt\end{aligned} \quad (9)$$

для будь-якого $v\in X_T$. Підстановка $v=u$ показує, що $\lambda>0$, оскільки в цьому випадку обидва інтеграли в (9) додатні. Більше того, при $v=u$ ліва частина в (9) рівна $2I_\theta$, а інтеграл в правій частині рівний $p\theta$. Тому

$$\lambda=\frac{2I_\theta}{p\theta}. \quad (10)$$

Підставляючи $u=\lambda^{-\frac{1}{p-2}}q$ в тотожність (9), одержуємо,

$$\int_{-T/2}^{T/2}\left[\big(\dot q(t),\,\dot v(t)\big)+\big(Aq(t),\,v(t)\big)\right]dt=$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} g_{n,m} \left| q_{n,m}(t) \right|^{p-2} q_{n,m}(t) v_{n,m}(t) \right] dt$$

для будь-якого $v \in X_T$. А це означає, що $q = \lambda^{\frac{1}{p-2}} u$ — розв'язок задачі (5), (2). **Теорему доведено.**

Неважко переконатися, що задачі (8) при різних θ еквівалентні, причому $I_\theta = \theta^{2/p} I_1$.

Для подальшого нам знадобиться наступний дискретний варіант принципу концентрованої компактності (див. [24], а також [23] в неперервному випадку).

Лема 1. Нехай $v^{(j)} = \left\{ v_{n,m}^{(j)} \right\}$ така послідовність невід'ємних елементів в l^1, що $\left\| v^{(j)} \right\|_{l^1} = \theta > 0$. Тоді існує така підпослідовність (як і раніше позначається $v^{(j)}$), що виконується одна із наступних трьох можливостей:

(i) (концентрація) існує така пара $\left(n_j, m_j \right) \in \mathbb{Z}^2$, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $r > 0$, що

$$\sum_{\left| n-n_j \right|^2 + \left| m-m_j \right|^2 \le r^2} v_{n,m}^{(j)} \ge \theta - \varepsilon;$$

(ii) (розпливання) $\lim\limits_{j\to\infty} \left\| v^{(j)} \right\|_{l^\infty} = 0;$

(iii) (розщеплення) знайдеться $\alpha \in (0, \theta)$ з наступною властивістю: для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують такі невід'ємні послідовності $v^{(j,1)}, v^{(j,2)} \in l_0$, що $\left\| v^{(j)} - \left(v^{(j,1)} + v^{(j,2)} \right) \right\| \le \varepsilon,$ $\left| \left\| v^{(j,1)} \right\|_{l^1} - \alpha \right| \le \varepsilon,$ $\left| \left\| v^{(j,2)} \right\|_{l^1} - (\theta - \alpha) \right| \le \varepsilon$ для всіх достатньо великих j, і $dist\left[\operatorname{supp}\left(v^{(j,1)} \right), \operatorname{supp}\left(v^{(j,2)} \right) \right] \to \infty$ при $j \to \infty$.

Основним результатом статті є наступна теорема.

Теорема 2. В зроблених припущеннях для будь-якого $T > 0$ задача (8) має розв'язок $u \in X_T$. Більше того, існує таке $T_0 > 0$, що при $T \ge T_0$ цей розв'язок не є сталим.

Доведення. *Крок 1.* Нехай $\left\{ w^{(j)} \right\}$ довільна мінімізуюча послідовність задачі (8), тобто $w^{(j)} = \left\{ w_{n,m}^{(j)}(t) \right\} \in X_T$, $S(w^{(j)}) = \theta$ і

$\Psi(w^{(j)}) \to I_\theta$. При цьому можна вважати, що $\Psi(w^{(j)}) \le 2I_\theta$. За умовою (P): $\Psi(u) \ge \frac{\beta_0}{2}\|u\|_T^2$, де $\beta_0 = \min\{1, \alpha_0\}$. Тому існує така стала $C > 0$, яка залежить тільки від α_0, що

$$\left\|w^{(j)}\right\|_T^2 \le CI_\theta. \tag{11}$$

Покладемо $v_{n,m}^{(j)} = \frac{1}{p}\int\limits_{-T/2}^{T/2} g_{n,m}\left|w_{n,m}^{(j)}(t)\right|^p dt$, $v^{(j)} = \left\{v_{n,m}^{(j)}\right\}$. Оскільки $H^1(-T/2, T/2)$ неперервно вкладений в $L^p(-T/2, T/2)$ (з константою, що не залежить від T), то із нерівності (11) випливає, що

$$\sum_{(n,\,m)\in\mathbb{Z}^2}\left(v_{n,m}^{(j)}\right)^{2/p} \le C\sum_{(n,\,m)\in\mathbb{Z}^2}\left\|w_{n,m}^{(j)}\right\|_{L^p(-T/2,T/2)}^2 \le C\left\|w^{(j)}\right\|_T^2 \le CI_\theta. \tag{12}$$

Крім того,

$$\sum_{(n,\,m)\in\mathbb{Z}^2} v_{n,m}^{(j)} = \left\|v^{(j)}\right\|_{l^1} = \theta > 0. \tag{13}$$

Далі до послідовності $\left\{v^{(j)}\right\}$ застосуємо лему 1. Після переходу до підпослідовності (з тим самим позначенням) має виконуватися одна із можливостей $(i)-(iii)$.

Крок 2. Розпливання (ii) не може виконуватися. Справді, якщо $\left\|v^{(j)}\right\|_{l^\infty} \to 0$, при $j \to \infty$, то

$$\left\|v^{(j)}\right\|_{l^1} = \sum_{(n,\,m)\in\mathbb{Z}^2}\left[v_{n,m}^{(j)}\right]^{1-2/p}\left[v_{n,m}^{(j)}\right]^{2/p} \le$$

$$\le \sup_{(n,\,m)\in\mathbb{Z}^2}\left[v_{n,m}^{(j)}\right]^{1-2/p}\sum_{(n,\,m)\in\mathbb{Z}^2}\left[v_{n,m}^{(j)}\right]^{2/p} \le \left[\left\|v^{(j)}\right\|_{l^\infty}\right]^{1-2/p} CI_\theta.$$

Отже, $\left\|v^{(j)}\right\|_{l^1} \to 0$, що суперечить (13).

Припустимо тепер, що виконується розщеплення (iii). Визначимо $w^{(j,1)}, w^{(j,2)} \in X_T$ наступним чином. Нехай $u_{n,m}^{(j,i)} = w_{n,m}^{(j)}$ при $(n, m) \in \operatorname{supp}\left(v^{(j,i)}\right)$ і $u_{n,m}^{(j,i)} = 0$ у протилежному випадку ($i = 1, 2$). Неважко перевірити, що $S\left(u^{(j,i)}\right) = \sum_{(n,\,m)\in\operatorname{supp}\left(v^{(j,i)}\right)} v_{n,m}^{(j)}$ і, отже,

$$\lim_{j\to\infty} S\left(u^{(j,1)}\right)=\alpha,\quad \lim_{j\to\infty} S\left(u^{(j,2)}\right)=\theta-\alpha.$$

Покладемо

$$s_1^{(j)}=\left(\frac{\alpha}{S\left(u^{(j,1)}\right)}\right)^{1/p},\quad s_2^{(j)}=\left(\frac{\theta-\alpha}{S\left(u^{(j,2)}\right)}\right)^{1/p}$$

і $w^{(j,i)}=s_i^{(j)}u^{(j,i)}$. Тоді із (iii) випливає, що

$$\lim_{j\to\infty}\left\|w^{(j)}-\left(w^{(j,1)}+w^{(j,2)}\right)\right\|_T=0.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\Psi(w^{(j)})-\Psi\left(w^{(j,1)}+w^{(j,2)}\right)\right\|_T=0. \tag{14}$$

Оскільки носії $\left\{w^{(j,1)}\right\}$ і $\left\{w^{(j,2)}\right\}$ не перетинаються, то

$$\Psi\left(w^{(j,1)}+w^{(j,2)}\right)=\Psi\left(w^{(j,1)}\right)+\Psi\left(w^{(j,2)}\right)\ge I_\alpha+I_{\theta-\alpha}.$$

З іншого боку, із (14) випливає, що $\lim\limits_{j\to\infty}\Psi\left(w^{(j,1)}+w^{(j,2)}\right)=I_\theta$. Отже, $I_\theta\ge I_\alpha+I_{\theta-\alpha}$. Однак $I_\theta=\theta^{2/p}I_1$ $p>2$, $\theta>0$, $\alpha\in(0,\theta)$. Легко бачити, що функція $f(x)=x^{\frac{2}{p}}+(1-x)^{\frac{2}{p}}$ на відрізку $[0,1]$ досягає мінімуму на кінцях відрізка, який дорівнює 1, а отже, $f(x)>1$ для всіх $x\in(0,1)$. Тепер поклавши $x=\dfrac{\alpha}{\theta}$, маємо, що $\theta^{\frac{2}{p}}<\alpha^{\frac{2}{p}}+(\theta-\alpha)^{\frac{2}{p}}$. Звідси, одержуємо $I_\theta<I_\alpha+I_{\theta-\alpha}$. Одержана суперечність показує, що твердження (iii) не може виконуватися.

Крок 3. Отже, для послідовності $\left\{v^{(j)}\right\}$ має місце (i) (концентрація). Зауважимо, що згідно умов періодичності,

$$\Psi\left(\left\{u_{n+N,m}(t)\right\}\right)=\Psi\left(\left\{u_{n,m+N}(t)\right\}\right)=\Psi\left(\left\{u_{n,m}(t)\right\}\right),$$

$$S\left(\left\{u_{n+N,m}(t)\right\}\right)=S\left(\left\{u_{n,m+N}(t)\right\}\right)=S\left(\left\{u_{n,m}(t)\right\}\right).$$

Тому, замінюючи $\left\{w_{n,m}^{(j)}(t)\right\}$ на $\left\{w_{n+a_jN,\,m+b_jN}^{(j)}(t)\right\}$ з деякими $a_j,b_j\in\mathbb{Z}$, можна вважати, що в твердженні (i) $\left(n_j,m_j\right)=(0,0)$, тобто для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке $r>0$, що

$$\sum_{|n-n_j|^2+|m-m_j|^2>r^2} v_{n,m}^{(j)} \le \varepsilon.$$

Оскільки $g_{n,m} > 0$ — періодична послідовність, то остання нерівність означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $C > 0$, що

$$\sum_{|n-n_j|^2+|m-m_j|^2>r^2} \int_{-T/2}^{T/2} \left|w_{n,m}^{(j)}(t)\right|^p dt \le C\varepsilon. \tag{15}$$

Згідно (11), послідовність $\left\{w^{(j)}\right\}$ обмежена в X_T. Переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), можна вважати, що $w^{(j)} \to u = \left\{u_{n,m}\right\}$ слабко в X_T. Оскільки X_T неперервно вкладений в $L^p\left(-T/2, T/2; l^p\right)$, то $w^{(j)} \to u$ слабко і в останньому просторі. Крім того, $H^1\left(-T/2, T/2\right)$ компактно вкладений в $L^p\left(-T/2, T/2\right)$. Тому, переходячи до підпослідовності, можна вважати, що $w_{n,m}^{(j)} \to u_{n,m}$ сильно в $L^p\left(-T/2, T/2\right)$ для будь-яких $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. Крім того, із рівності $S\left(w^{(j)}\right) = \theta$ випливає, що $\left\{w^{(j)}\right\}$ обмежена послідовність в $L^p\left(-T/2, T/2; l^p\right)$. Разом зі збіжністю $w_{n,m}^{(j)} \to u_{n,m}$ і (15) це дає сильну збіжність $w^{(j)} \to u$ в $L^p\left(-T/2, T/2; l^p\right)$. Разом з неперервністю S на $L^p\left(-T/2, T/2; l^p\right)$ це показує, що $S(u) = \theta$. Оскільки Ψ — неперервний квадратичний додатно визначений функціонал, то він слабко напівнеперервний знизу. Звідси випливає, що

$$I_\theta \le \Psi(u) \le \varliminf_{j\to\infty} \Psi\left(w^{(j)}\right) = I_\theta.$$

Таким чином, $\Psi(u) = I_\theta$ і u — розв'язок задачі (8).

Крок 4. Доведемо, що при достатньо великих T цей розв'язок не сталий. Припустимо, що $u = \left\{u_{n,m}\right\}$ — сталий розв'язок задачі (8). Тоді

$$0 < \theta = S(u) = \frac{1}{p} \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} g_{n,m} \left|u_{n,m}\right|^p T.$$

Звідси $\theta \le C\|u\|_{l^p}^p T$ або $\|u\|_{l^p} \ge C_0\theta / T^{1/p}$. Тоді

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\left(Au, u\right)T \ge \frac{\alpha_0}{2}\|u\|_{l^2}^2 T \ge \frac{\alpha_0\left(C_0\theta\right)^2}{2} T^{1-2/p}. \tag{16}$$

З іншого боку, нехай $v = \{v_{n,m}\}$ таке, що $v_{n,m} \equiv 0$ при $(n,\ m) \neq (0,\ 0)$, $v_{0,0}(t) = \lambda \sin\left(\dfrac{2\pi t}{\eta T}\right)$ при $0 \le t \le \eta T$, $v_{0,0}(t) = 0$ при $\eta T < t < T$ і $v_{0,0}$ продовжена на всю вісь як T-періодична функція ($0 < \eta < 1$). Константу λ виберемо із умови $S(v) = \theta$. Маємо

$$S(v) = \frac{g_{0,0}}{p}\int_0^T \left|\lambda \sin\left(\frac{2\pi t}{\eta T}\right)\right|^p dt = g_{0,0}\, p^{-1}(\eta T)\lambda^p A_p = \theta,$$

де $A_p = \int_0^1 |\sin 2\pi t|^p\, dt$. Звідси $\lambda = \left(g_{0,0}\, p^{-1}\theta^{-1}\eta T A_p\right)^{-1/p}$.

Далі, враховуючи, що $\int_0^1 \cos^2 2\pi t dt = \int_0^1 \sin^2 2\pi t dt = A_2$, маємо

$$2\Psi(v) = \lambda^2 \int_0^{\eta T}\left[\left(\frac{2\pi}{\eta T}\cos\left(\frac{2\pi t}{\eta T}\right)\right)^2 + c_{0,0}\sin^2\left(\frac{2\pi t}{\eta T}\right)\right]dt =$$

$$= \lambda^2 A_2\left(\frac{4\pi^2}{\eta T} + c_{0,0}\eta T\right) = A_2\left(g_{0,0}\, p^{-1}\theta^{-1}\eta T A_p\right)^{-2/p}\left(\frac{4\pi^2}{\eta T} + c_{0,0}\eta T\right) =$$

$$= A_2\left(g_{0,0}\, p^{-1}\theta^{-1}A_p\right)^{-2/p}(\eta T)^{1-2/p}\left(4\pi^2(\eta T)^{-2} + c_{0,0}\right).$$

Зауважимо, що згідно умови (P), $c_{0,0} \ge \alpha_0 > 0$. Тепер виберемо $\eta \in (0,\ 1)$ таким чином, щоб

$$A_2 c_{0,0}\left(g_{0,0}\, p^{-1}\theta^{-1}A_p\right)^{-2/p}\eta^{1-2/p} < \alpha_0 (C_0\theta)^2.$$

Тоді, враховуючи (16), при достатньо великих T маємо:

$$\Psi(v) \le \frac{1}{2}A_2 c_{0,0}\left(g_{0,0}\, p^{-1}\theta^{-1}A_p\right)^{-2/p}\eta^{1-2/p}T^{1-2/p} <$$

$$< \frac{\alpha_0 (C_0\theta)^2}{2}T^{1-2/p} \le \Psi(u),$$

Тобто $\Psi(v) < \Psi(u)$. А це означає, що u не може бути розв'язком задачі мінімізації (8). **Теорему доведено.**

Висновки. Таким чином, у цій статті за допомогою методу умовної мінімізації і принципу концентрованої компактності одержано результат про існування періодичних розв'язків для нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці.

Список використаних джерел:

1. Бак С. М. Існування періодичних за часом розв’язків системи осциляторів на двовимірній гратці. *Карпатські математичні публікації.* 2012. Т. 4, № 2. С. 175-196.
2. Бак С. М. Існування відокремлених біжучих хвиль для системи нелінійно зв’язаних осциляторів на двовимірній ґратці. *Український математичний журнал*. 2017. Т. 69, № 4. С. 435-444.
3. Бак С. М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль у системі осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* 2014. Т. 57, № 3. С. 45-52.
4. Бак С. М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвилі в системі нелінійно зв’язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. Вип. 10. С. 17-23.
5. Бак С. М. Існування надзвукових періодичних біжучих хвилі в системі нелінійно зв’язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. Вип. 12. С. 5-12.
6. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. *Математичні студії.* 2012. Т. 37, № 1. С. 76-88.
7. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2017. Вип. 16. С. 21-29.
8. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні sin-Ґордона на двовимірній ґратці. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. Вип. 9. С. 5-10.
9. Бак С. М., Баранова О. О., Білик Ю. П. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. Вип. 4. С. 18-24.
10. Бак С. М., Ковтонюк Г. М., Печериця І. В. Стоячі хвилі з періодичною амплітудою в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. Вип. 18. С. 5-13.
11. Бак С. М., Рум’янцева К. Є. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів з кубічним потенціалом на двовимірній ґратці. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні*

науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. Вип. 6. С. 29-36.

12. Бак С. Н., Панков А. А. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках. *Український математичний вісник*. 2010. Т. 7. № 2. С. 154-175.
13. Бак С. М. Існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. Вип. 5. С. 3-9.
14. Bak S. The existence of heteroclinic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on a 2D-lattice. *Journal of mathematical physics, analysis, geometry*. 2018. Vol. 14, № 1. P. 16-26.
15. Bak S. M. Global well-posedness of the Cauchy problem for system of oscillators on 2D-lattice with power potentials. *Український математичний вісник*. 2019. Т. 16. № 4. С. 465-476. (Engl.: Bak S. M. Global well-posedness of the Cauchy problem for system of oscillators on 2D-lattice with power potentials. *Journal of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 246. № 5 (May). P. 593-601.)
16. Bak S. M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 217. № 2. P. 187-197.
17. Bak S. M. Existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice. *Ukrainian mathematical Journal*. 2017. Vol. 4 (69). P. 509-520.
18. Bak S. M. Homoclinic traveling waves in discrete sine–Gordon equation with nonlinear interaction on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2019. Vol. 52. № 2. P. 176-184.
19. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2018. Vol. 50. № 1. P. 75-87.
20. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis*. 2019. Vol. 22. № 2. P. 18-34.
21. Feckan M., Rothos V. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions. *Nonlinearity*. 2007. № 20. P. 319-341.
22. Friesecke G., Matthies K. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice. *Discrete and continuous dynamical systems*. 2003. Vol. 3. № 1. P. 105-114.
23. Lions P. L. The concentration–compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case, part I. *Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Non Lineaire*. 1984. Vol. 1. № 2. P. 109-145.
24. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices. London; Singapore: Imperial College Press, 2005. 196 p.
25. Srikanth P. On periodic motions of two-dimentional lattices. *Functional analysis with current applications in science, technology and industry*. 1998. Vol. 377. P. 118-122.

EXISTENCE OF PERIODIC SOLUTIONS IN THE SYSTEM OF NONLINEAR OSCILLATORS WITH POWER POTENTIALS ON A TWO-DIMENSIONAL LATTICE

This article is devoted to the study of an infinite-dimensional Hamiltonian system, which describes an infinite system of linearly coupled nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice. This system is a counteble system of ordinary differential equations. It is convenient to consider this system as a differential-operator equation in Hilbert space of real two-way sequences.

The problem of existence of periodic solutions for such systems with power potential is considered. The main conditions for the existence of these solutions are the spatial periodicity of the coefficients of the linear interaction of oscillators and the positivity of this operator. This article shows that periodic solutions can be constructed using the constained minimization method. For this, a functional is constructed whose critical points are the desired periodic solutions. This functional is represented as the difference between the quadratic and non-quadratic parts. Next, we consider the problem of constrained minimization of the quadratic part of the functional under the condition that the non-quadratic part is constant. Using the Lagrange multiplier method, it was found that the periodic solutions of this system linearly depend on the solutions of the considered problem of constrained minimization, in particular, the coefficient of linear dependence is expressed in terms of the Lagrange multiplier. Using a discrete version of the concentration compactness principle, it is proved that the problem of constrained minimization under consideration has a solution, and therefore, there are periodic solutions of the original system. In particular, it is shown that for an arbitrary minimizing sequence of the quadratic part of the constructed functional, the possibility of «concentration» of the concentration compactness principle is satisfies, which allowed to prove the boundedness of this sequence. Moreover, it is proved that for sufficiently large values of periods these solutions are not constant.

Key words: *nonlinear oscillators, 2D-lattice, periodic solutions, constained minimization method.*

Отримано: 17.09.2020