УДК 518.33,681.3.0.068
DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.17-25

А. Ф. Верлань*, д-р техн. наук, професор,
В. В. Понеділок**, канд. техн. наук

*Інститут проблем моделювання в енергетиці
імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ,
**Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПРО ДЕЯКІ РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У статті розглянуто питання застосування інтегрального методу для розв'язування лінійних диференціальних рівнянь. Важливою передумовою використання такого підходу є можливість зведення різних видів звичайних диференціальних рівнянь до еквівалентних інтегральних рівнянь Вольтерри, тоді як зворотне перетворення не завжди можливе. Переваги інтегральних рівнянь в обчислювальному плані визначаються згладжуючими властивостями інтегральних операторів, що проявляється в підвищенні точності отриманих розв'язків або в зменшені кількості обчислювальних операцій в процесі їх розв'язання. Крім цього, інтегральні рівняння дозволяють розв'язувати задачі, де задані або шукані функції мають розриви I-го роду. З більш загальної точки зору, при розв'язуванні диференціальних рівнянь збільшення похибки правої частини тягне за собою швидке зростання похибок результатів разом із збільшенням швидкості їх накопичення, а згладжуючі властивості інтегрального методу, за рахунок стійкості прямих методів, дозволяють отримати більш точний розв'язок в умовах наявності похибок в правій частині диференціального рівняння. Позитивні властивості та ефективність застосування інтегрального підходу для розв'язування лінійних диференціальних рівнянь розглядаються на основі обчислювальних експериментів, які дозволяють практично переконатись в доцільності використання інтегральних методів опису та аналізу прикладних задач.

Ключові слова: *інтегральний метод, лінійні диференціальні рівняння, еквівалентні інтегральні рівняння.*

Вступ. При розв'язанні багатьох задач дослідження динамічних систем перехід від диференціальних рівнянь до інтегральних дозволяє використовувати ряд переваг інтегрального представлення задачі, таких як повний математичний опис, згладжуючі властивості інтегральних операторів; вивчення, забезпечення і прискорення збіжності ітераційних методів; висока стійкість прямих методів [1-5].

Виклад основного матеріалу. Задача Коші для диференціального рівняння із змінними коефіцієнтами

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_1(x)\cdot\frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x)\cdot y(x) = f(x),\ x \ge 0,$$

$$y(0) = C_0;\ y'(0) = C_1;\ldots;\ y^{(n-1)}(0) = C_{n-1}, \tag{1}$$

має еквівалентне представлення у вигляді інтегрального рівняння [4]:

$$u(x) + \int_0^x K(x,s)\cdot u(s)\,ds = \varphi(x), \tag{2}$$

де

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{d^n y(x)}{dx^n}, \\ \displaystyle\int_0^x u(s)\,ds + C_1 = \dfrac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases} \tag{3}$$

$$y(x) = C_{n-1}\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + C_1\cdot x + C_0 + \frac{1}{(n-1)!}\cdot\int_a^x (x-s)^{n-1}\cdot u(s)\,ds, \tag{4}$$

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\cdot\frac{(x-s)^{i-1}}{(i-1)!}, \tag{5}$$

$$\varphi(x) = f(x) - C_{n-1}\cdot a_1(x) - (C_{n-1}\cdot x + C_{n-2})\cdot a_2(x) -$$
$$-\ldots-\left(C_{n-1}\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + C_1\cdot x + C_0\right)\cdot a_n(x).$$

При отриманні виразів (2)-(5) виконується інтегрування записів (3) та використовується формула:

$$\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \ldots \int_a^{x_{n-1}} z(x_n)\,dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\cdot\int_a^x (x-s)^{n-1}\cdot z(s)\,ds.$$

Враховуючи, що звичайні диференціальні рівняння згідно (2)-(5) зводяться до еквівалентних інтегральних рівнянь із виродженими ядрами, доцільно розглянути можливість розв'язання диференціальних рівнянь шляхом застосування методу квадратур до їх інтегрального еквіваленту. Дослідження даного методу шляхом обчислювальних експериментів підтверджує його ефективність та позитивні властивості.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Нехай потрібно розв’язати диференціальне рівняння з початковими умовами

$$y'' + y' + y = 3e^{-2x}, \quad y'(0) = -2,\ y(0) = 1, \tag{6}$$

на інтервалі (0; 1).

Еквівалентне інтегральне рівняння для рівняння (6) має вигляд

$$u(x) = 3e^{-2x} + 2x + 1 - \int_0^x (1 + x - s) \cdot u(s)\,ds\,, \tag{7}$$

а розв’язок визначається виразом

$$y(x) = -2x + 1 - \int_0^x (x - s) \cdot u(s)\,ds\ . \tag{8}$$

Застосовуючи формулу трапецій до інтегралів у (7)-(8), отримаємо:

$$u(0) = 3e^{-2\cdot 0} + 2 \cdot 0 + 1 = 4\,,$$

$$u(x_i) =$$

$$= \frac{2}{2+h} \cdot \left[3e^{-2x_i} + 2x_i + 1 - h \cdot \left(\sum_{j=1}^{i-1} A_j u_j + x_i \sum_{j=1}^{i-1} A_j u_j - \sum_{j=1}^{i-1} A_j x_j u_j \right) \right],$$

$$y(0) = 1,$$

$$y(x_i) = -2x_i + 1 + h \cdot \left(x_i \sum_{j=1}^{i-1} A_j u_j - \sum_{j=1}^{i-1} A_j x_j u_j \right). \tag{9}$$

Порівняємо розв’язки двома методами при різних кроках і однаковому часі обчислень при наявних похибках у вихідних даних.

Час розв’язання інтегральним методом в середньому дорівнює 0,0121 с., а методом Рунге-Кутта — 0,0122 с.

Нехай на праву частину

$$f(x) = 3e^{-2x} \tag{10}$$

диференціального рівняння (6) накладений випадковий процес з максимальною амплітудою δ_f, виражений в % від амплітуди функції, що стоїть в правій частині (10). Результати розв’язування, які демонструють вищу точність при застосуванні інтегрального методу, наведено на рис. 1-4.

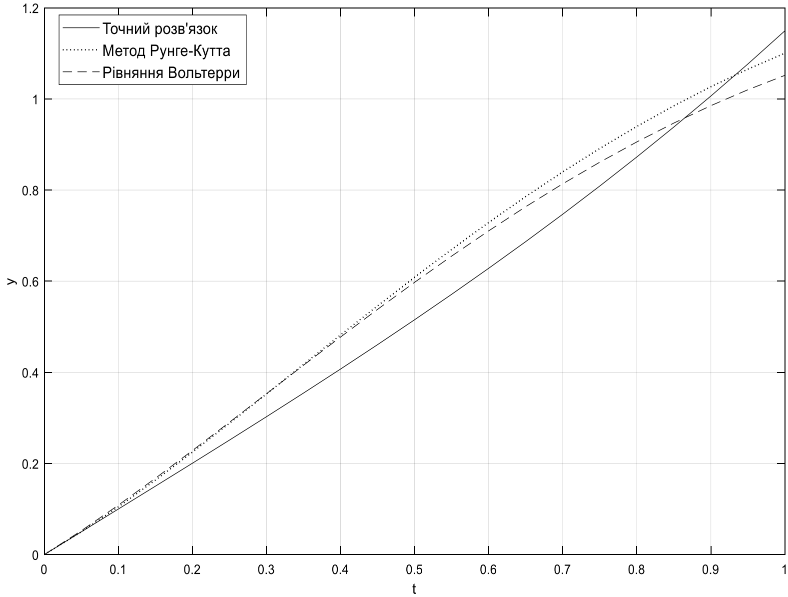

Рис. 1. *Розв'язок рівняння з урахуванням шуму* $\delta_f = 5\%$

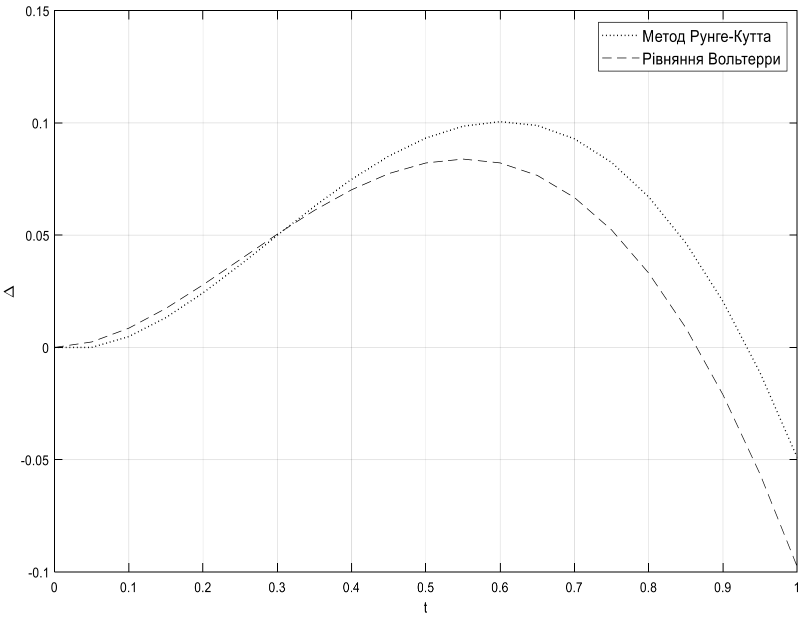

Рис. 2. *Відносна похибка розв'язку*

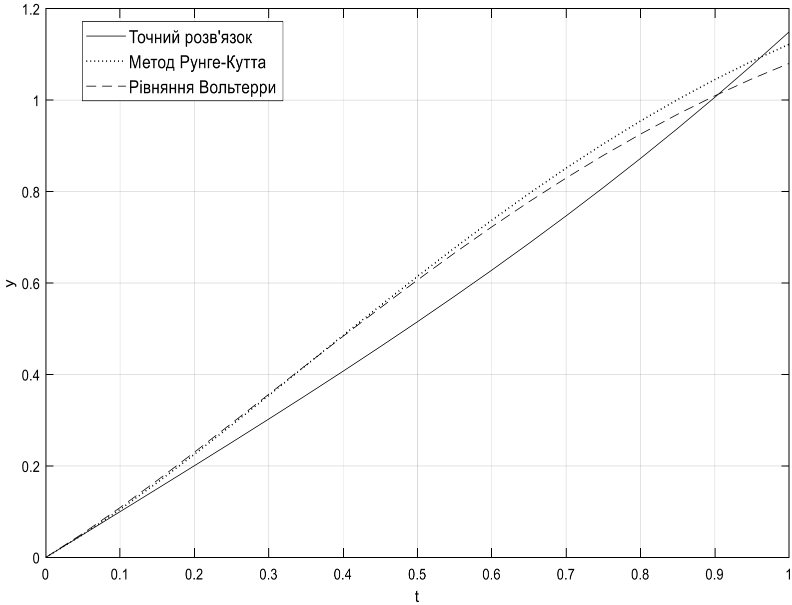

Рис. 3. *Розв'язок рівняння з урахуванням шуму* $\delta_f = 10\%$

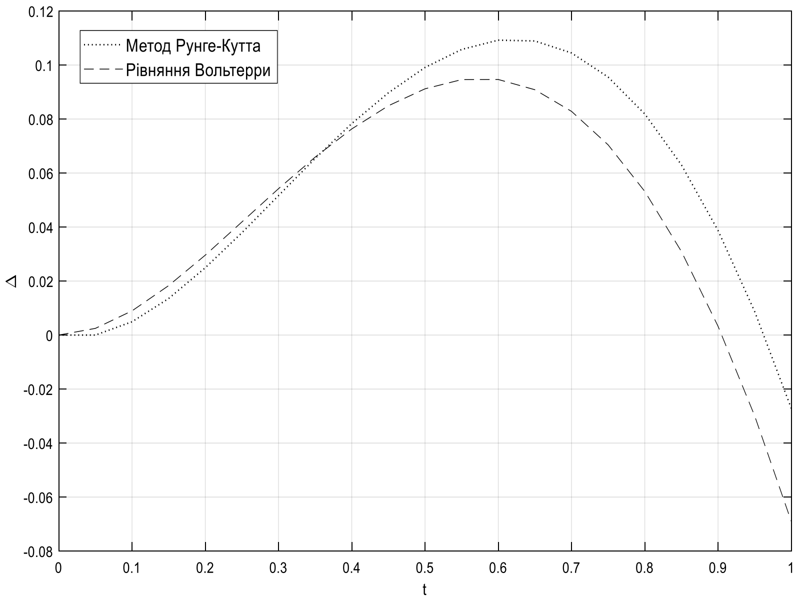

Рис. 4. *Відносна похибка розв'язку*

При застосуванні методу Рунге-Кутта подальше збільшення похибки правої частини тягне за собою швидке зростання похибок результатів разом із збільшенням швидкості їх накопичення, що приводить до меншої точності обчислень, у порівнянні з інтегральним методом. Таким чином, згладжуючі властивості інтегрального методу дозволяють отримати більш точний розв'язок за наявності похибки в правій частині диференціального рівняння.

Приклад 2. Задано диференціальне рівняння з початковими умовами

$$\begin{gathered} y'' + y' - 2y = e^{-x}, \\ y'(0) = 0,\ y(0) = 1. \end{gathered} \tag{11}$$

Еквівалентне інтегральне рівняння має вигляд

$$u(x) = e^{-x} + 2x - 1 - \int_0^x \big(1 + 2(x-s)\big)\cdot u(s)\,ds\,, \tag{12}$$

а розв'язок визначається виразом

$$y(x) = x + \int_0^x (x-s)\cdot u(s)\,ds\,. \tag{13}$$

Застосовуючи формулу трапецій до (12), (13) і враховуючи співвідношення для методу квадратур, отримаємо:

$$u(0) = e^0 + 2\cdot 0 - 1 = 0\,,$$

$$u(x_i) = \frac{2}{2+h}\times$$

$$\times\left[e^{-2x_i} + 2x_i - 1 - h\cdot\left(\sum_{j=1}^{i-1} A_j u_j + 2x_i \sum_{j=1}^{i-1} A_j u_j - 2\sum_{j=1}^{i-1} A_j x_j u_j\right)\right],$$

$$\begin{gathered} y(0) = 1, \\ y(x_i) = x_i + h\times \\ \times\left(x_i \sum_{j=1}^{i-1} A_j u_j - \sum_{j=1}^{i-1} A_j x_j u_j\right). \end{gathered} \tag{14}$$

Поведінку похибки при розв'язанні порівнюваними методами показано на рис. 5-8. Дослідимо залежність похибки розв'язку порівнюваними методами від похибки задання правої частини. Отже, при приблизно однаковому числі операцій, починаючи з деякого значення похибки правої частини точність інтегрального методу буде вище.

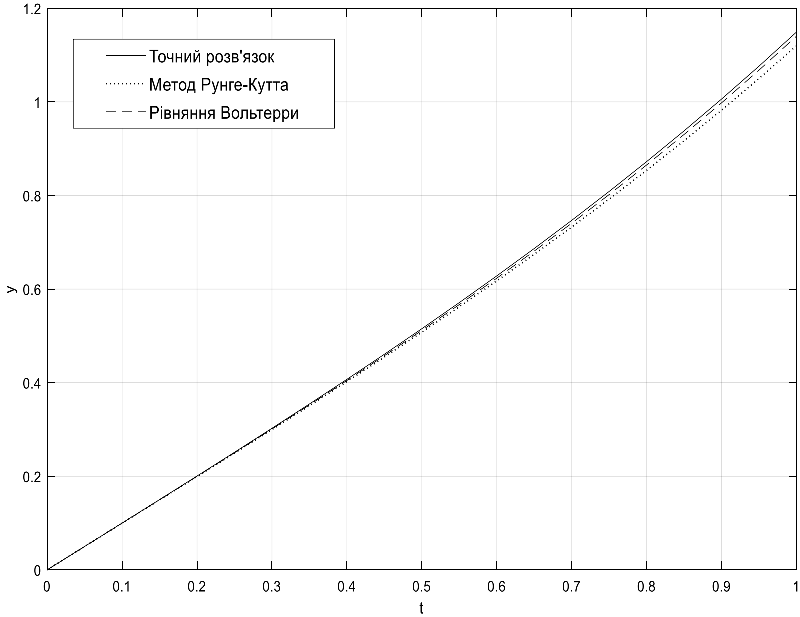

Рис. 5. *Розв'язок рівняння з урахуванням шуму* $\delta_f = 5\%$

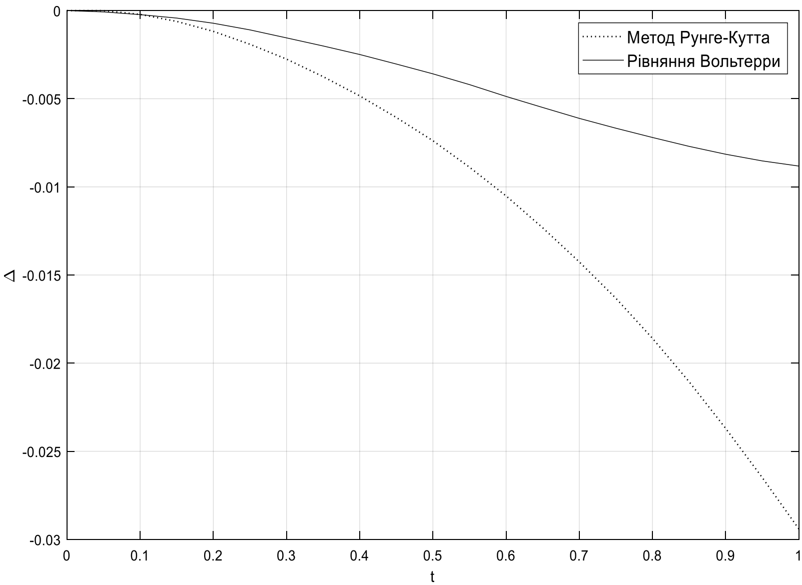

Рис. 6. *Відносна похибка розв’язку*

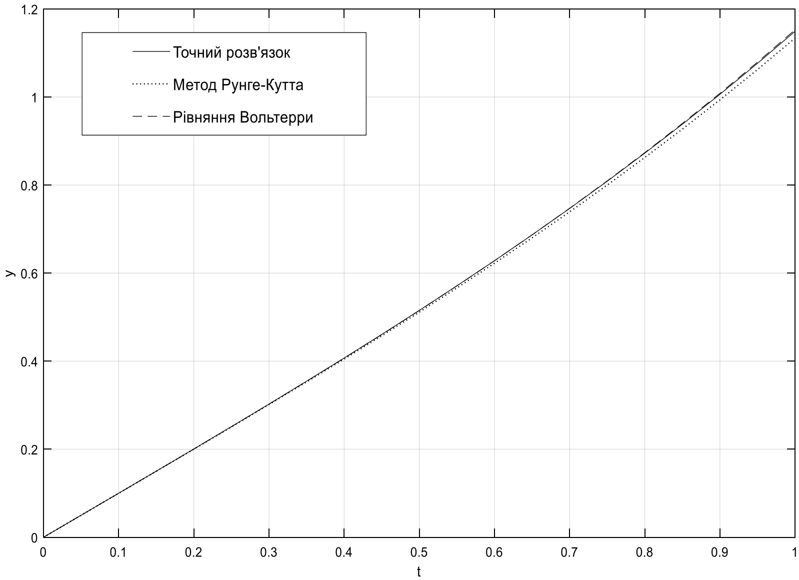

Рис. 7. *Розв'язок рівняння з урахуванням шуму* δ_f = 10%

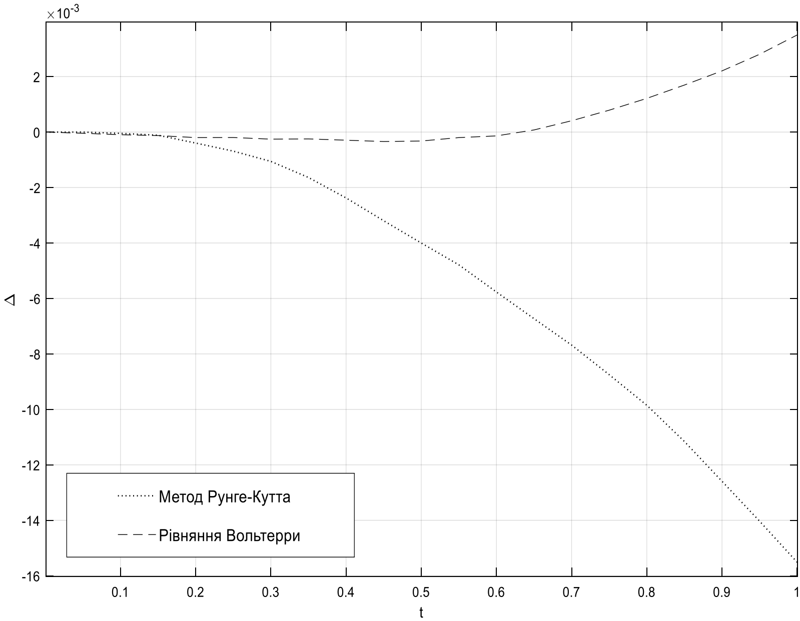

Рис. 8. *Відносна похибка розв'язку*

Висновки. Таким чином, на підставі обчислювальних експериментів можна зробити висновок, що використання еквівалентної інтегральної форми для розв’язання лінійних диференціальних рівнянь різних порядків в ряді випадків дозволяє отримати покращення точності розв’язку при приблизно однаковому числі операцій, які виконуються. Згладжуючі властивості інтегральних операторів зумовлюють ефективність застосування інтегрального методу розв'язання диференціальних рівнянь в умовах наявності завад.

Список використаних джерел:

1. Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. [2-е изд.]. М.: Физматлит, 2004. 160 с.
2. Вержбицкий В. М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Высш. шк., 2001. 383 с.
3. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы. Киев: Наук. думка, 1986. 543 с.
4. Верлань А. Ф., Москалюк С. С. Математическое моделирование непрерывных динамических систем. Киев: Наук. думка, 1988. 288 с.
5. Манжиров А. В., Полянин А. Д. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2000. 384 с.

SOME RESULTS RESEARCH THE INTEGRAL METHOD SOLVING LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

The article considers the application of the integrated method for solving linear differential equations. An important prerequisite for using this approach is the possibility of reducing different types of ordinary differential equations to equivalent Volterra integral equations, while the inverse transformation is not always possible. The advantages of integral equations in the computational plan are determined by the smoothing properties of the integral operators, which is manifested in the increased accuracy of the obtained solutions or in the reduced number of computational operations in the process of their solution. In addition, integral equations allow solving problems were given or required functions have breaks of the first kind. From a more general point of view, when solving differential equations, increasing the error of the right part entails a rapid increase in the errors of the results together with increasing the rate of their accumulation, and the smoothing properties of the integrated method, due to the stability of direct methods. conditions of errors in the right part of the differential equation. The positive properties and efficiency of the integrated approach for solving linear differential equations are considered based on computational experiments, which allow to practically prove the expediency of using integrated methods of description and analysis of applied problems.

Keywords: *integral method, linear differential equations, equivalent integral equations.*

Отримано: 7.10.2020