УДК 519.6
DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.26-42

А. А. Верлань*, д-р техн. наук,
С. А. Положаєнко**, д-р техн. наук, професор

* Норвезький університет науки і технологій, м. Йовік, Норвегія,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ,
** Одеський національний політехнічний університет, м. Одеса

АНАЛІЗ МОЖЛИВОСТЕЙ ВИБОРУ ТА АДАПТАЦІЇ АЛГОРИТМІВ ЧИСЕЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ

У роботі аналізуються можливості вибору та адаптації обчислювальних алгоритмів при реалізації диференціальних динамічних моделей, тобто при розв'язуванні звичайних диференціальних рівнянь. Обмежені ресурси комп'ютерно-інтегрованих систем визначають вимоги до швидкодії обчислювально-керуючих систем, що свідчить про актуальність питання цільового вибору або адаптації числових методів розв'язування рівнянь динаміки об'єктів. Процес вдосконалення числових методів має велику історію та не припиняється і дотепер. Зростання складності досліджуваних динамічних об'єктів зумовило розвиток неявних методів числового аналізу динаміки, але проведені дослідження свідчать, що застосування неявних методів виправдано, якщо припустимо застосування значного за величиною кроку інтегрування вихідної системи. Крім того, з'ясовано, що наявні результати по формалізації степеневих методів розв'язування алгебраїчних рівнянь на кроці інтегрування і адаптація їх при комп'ютерному використанні поки ще недостатні для вирішення питання про їх застосування при дослідженні складних динамічних об'єктів. Обмеження кроку інтегрування зверху свідчить про недоцільність використання методів Рунге-Кутта високого порядку для цілей моделювання динаміки досліджуваних систем в реальному часі. Відповідно щодо квадратурних методів, то у загальному вигляді задача формалізації побудови не вирішена. Таким чином, задачу оптимального вибору методу може бути сформульовано так: потрібно визначити числовий метод інтегрування рівнянь динаміки об'єкта, що моделюється, для якого може бути досягнута необхідна швидкодія управляючої системи, а похибка розв'язування рівнянь динаміки не перевищує заданого значення. Проведено аналіз властивостей різних груп числових методів, який дає змогу зробити висновок про те, що при виборі найкращого методу вихідну множину необхідних методів слід формувати на основі однокрокових методів типу Рунге-Кутта і квадратурних методів не вище четвертого порядку. При реалізації стаціонарних режимів в вихідну групу методів слід включати також багатокрокові методи — явні і типу «прогноз-корекція».

Ключові слова: *числові методи, математична модель, обчислювальний алгоритм, диференціальні рівняння.*

Вступ. На даний час числові методи обчислювальної математики проникають практично у всі сфери наукової та інженерної діяльності, а математичні моделі (ММ) стають основними засобами дослідження. Значення ММ безперервно зростає у зв'язку з оптимізацією технічних пристроїв та технологічних схем планування експерименту. При цьому реалізація ММ засобами обчислювальної техніки (ОТ) здійснюється за допомогою різних методів обчислювальної математики, яка безперервно удосконалюється. Мета чинної роботи полягає у розгляді, порівняльному аналізі та адаптації обчислювальних алгоритмів реалізації диференціальних динамічних моделей як частинної задачі застосування числових методів.

Основна частина. Умови функціонування динамічних об'єктів жорстко визначають вимоги до швидкодії обчислювально-керуючих систем, які мають завжди обмежені ресурси, що свідчить про актуальність питання вибору числових методів інтегрування рівнянь динаміки об'єктів, що моделюються, при організації обчислювальних процесів.

Аналіз властивостей методів наближеного розв'язування рівнянь динаміки. На даний час відома значна кількість методів числового розв'язування систем звичайних диференційних рівнянь (ЗДР) [1-5], основну частину яких можна розділити на три групи:

- однокрокові методи типу Рунге-Кутта і ступеневі методи;
- багатокрокові кінцево-різницеві методи (типу Мілна, Адамса);
- гібридні методи (типу Батчера).

Загальною властивістю цих методів є те, що всі вони будуються на основі *розкладання шуканої функції в степеневий ряд,* в якому зберігається (враховується) скінченна кількість членів. При цьому накладається умова — метод r-го порядку повинен давати точний розв'язок, якщо шукана функція являє собою поліном r-го ступеня. Ця умова, і той факт, що будь-яка функція, яка має достатню кількість похідних, може бути наближено замінена відповідним поліномом, визначають можливість побудови зазначених методів. Аналогічний підхід може бути здійснений і при використанні будь-якої повної системи функцій.

Інший, досить загальний підхід до питання побудови числових методів розв'язування диференціальних рівнянь, полягає в *заміні вихідної системи* деякою іншою, розв'язання якої може бути здійснено досить просто із залученням аналітичних прийомів. Найбільш відомими з таких методів є так звані *експоненційні* [6], сутність яких полягає в поданні правої частини вихідної системи у вигляді суми лінійного та нелінійного членів і використанні виразу загального інтеграла для лінійних систем. Різноманітність методів має місце через різні способи уведення лінійних членів, а також завдяки різним прийомам обчислення загального інтеграла.

Незважаючи на значну кількість різноманітних обчислювальних схем (розрахункових правил) розв'язування звичайних диференціальних рівнянь з початковими умовами і чималу історію розвитку цього питання, процес вдосконалення числових методів не припиняється і дотепер. Пояснюється це значним розвитком обчислювальної техніки, який забезпечив можливість дослідження складних об'єктів, тобто можливість практичної реалізації складних обчислювальних схем. Зростання складності досліджуваних динамічних об'єктів зумовила розвиток *неявних* методів числового аналізу динаміки, що відзначаються значно кращими характеристиками стійкості у порівнянні з класичними явними методами. Різноманітність неявних обчислювальних схем розв'язування ЗДР обумовлено різноманітністю прийомів формування і розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь [7].

Відмова від лінійної форми розрахункових правил привела до розвитку нелінійних числових методів розв'язування ЗДР [8, 9] і побудови схем на основі дробово-раціональної апроксимації шуканих функцій [9]. Отримали розвиток і методи, що базуються на заміні вихідної системи [9, 10].

Проаналізуємо принципи побудови методів числового розв'язування задачі Коші, а також розрахункові правила найбільш уживаних на практиці методів. При цьому, з метою спрощення запису та досягнення наочності розрахункових співвідношень, викладення матеріалу дано для випадку одного диференціального рівняння з однією невідомою

$$\dot{y} = f\left(y,t\right), \quad y\left(0\right) = y_0 . \tag{1}$$

Таке спрощення не знижує загального характеру результатів у зв'язку з тим, що процедура розв'язування системи диференціальних рівнянь полягає у застосуванні розрахункових правил до кожного рівняння системи, яка розв'язується.

Під *однокроковими* методами розв'язування задачі Коші для рівняння (1) розуміють методи числового інтегрування, що дозволяють визначати наближений розв'язок в точці лише на основі отриманого раніше розв'язку для попередньої точки. У загальному вигляді алгоритми однокрокових методів представляються в наступному вигляді

$$y_{i+1} = F\left(f, t_i, y_i\right) \tag{2}$$

для явних методів інтегрування, і

$$y_{i+1} = F\left(f, t_i, y_i, y_{i+1}\right) \tag{3}$$

для неявних методів інтегрування.

В останньому випадку мають місце не розрахункові співвідношення для визначення y_{i+1}, а рівняння відносно них. Отже, при використанні неявних методів виникає необхідність розв'язування рівняння (3), а в багатовимірному випадку — систем рівнянь відносно y_{i+1} на кожному кроці. Оскільки ці рівняння, як правило, є нелінійними, то обчислювальна складність неявних методів стає очевидною. Застосування неявних методів виправдано в тих випадках, якщо може виникнути потреба використання значного (за величиною) кроку інтегрування вихідної системи або якщо рівняння (3) може бути розв'язано досить просто. Тут слід зазначити, що розв'язування рівняння (3) зазвичай ведеться ітераційним способом, тим більше, що його вигляд є якраз зручним для застосування ітерацій. Таким чином, ефективність неявних методів буде в значній мірі залежати від *збіжності ітераційного процесу*, що, в загальному випадку, визначається властивостями вихідної системи (1). На практиці процес ітерацій переривають (припиняють) після двох-трьох циклів внаслідок досягнення наперед визначеної точності розв'язку.

Аналіз однокрокових методів числового інтегрування системи (1), заснованих на багаточленних наближеннях, дозволяє виділити три принципи їх побудови:

- розкладання шуканого розв'язку в ряд Тейлора;
- компенсація перших членів ряду Тейлора для функції похибки (методи Рунге-Кутта);
- застосування квадратурних правил.

Розкладання шуканого розв'язку в ряд Тейлора відноситься до найбільш відомих способів наближеного розв'язування. Необхідність визначення похідних високого порядку від шуканого розв'язку обумовлює значну обчислювальну складність методів. Принагідно слід зазначити, що наявні результати щодо формалізації степеневих методів і адаптація їх при комп'ютерному використанні поки ще недостатні для вирішення питання про їх застосування при дослідженні складних динамічних об'єктів.

У практиці числового розв'язування рівнянь типу (1) широкого поширення набули явні методи Рунге-Кутта, що задаються правилами

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=1}^{q} p_j \, k_j(h), \tag{4}$$

де

$$k_j(h) = h\, f\left(y_i + \sum_{s=1}^{j-1} \beta_{js}\, k_j(h), t_i + \alpha_j\, h \right), \tag{5}$$

а параметри $p_j, \alpha_j, \; j = \overline{1,q}, \left(d_1 = 0\right), \beta_{js}, 0 < s < j \le q$ обираються, виходячи з умов рівності нулю перших членів ряду Тейлора функції похибки $\varphi(h)$, яка визначається рівністю

$$\varphi(h) = y(t+h) - y(t) - \sum_{j=1}^{q} p_j \, k_j(h). \tag{6}$$

Величина $\varphi(h)$ характеризує похибку методу на кроці інтегрування (локальна похибка методу) і, за припущення гладкості $f(y,t)$ по обох аргументах, може бути представлена на основі формули Тейлора у вигляді

$$\varphi(h) = \frac{\varphi^{(r+1)}(\theta h)}{(r+1)!} h^{r+1}, \quad 0 \le \theta \le 1, \tag{7}$$

де величина r називається порядком (ступенем) точності методу.

Методи першого порядку точності. Вони представляються таким розрахунковим правилом (метод Ейлера)

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(y_i, t_i). \tag{8}$$

Методи другого порядку точності. Ці методи представляються розрахунковими правилами, параметри яких задовольняють наступній системі

$$1 - p_1 - p_2 = 0, \; 1 - 2\, p_1 \alpha_2 = 0, \; 1 - 2\, p_1 \beta_{21} = 0, \tag{9}$$

причому цю систему можна отримати прирівнюванням до нуля перших трьох членів розкладання функції $\varphi(h)$ в ряд Тейлора.

Система (9) є недовизначеною і сумісною, що призводить до існування безлічі розв'язків, представлених у вигляді однопараметричної множини. Приймаючи $\alpha_2 = b$, отримуємо для будь-яких $\beta \ne 0$

$$p_1 = 1 - \frac{1}{2b}, \; p_2 = \frac{1}{2b}, \; \beta_{21} = b. \tag{10}$$

При виборі конкретного значення b керуються різними міркуваннями. На практиці набули поширення значення параметрів, що приводять до зручних, в обчислювальному відношенні, розрахунковим правил. Так, при $b = 1$ маємо $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/2$, $\beta_{21} = \alpha_2 = 1$. Розрахункове правило, що відповідає цим значенням, має вигляд

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\Big(f(y_i, t_i) + f(y_i + h\,\dot{y}_i, t_i + h)\Big), \tag{11}$$

а оскільки $y_i + h\,\dot{y}_i \approx y_{i+1}$, то лінійну комбінацію $0{,}5(k_1 + k_2)$ можна розглядати як аналог квадратурної формули трапецій при обчисленні інтеграла у виразі для точного значення шуканої функції

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{y}(r)\,dr. \tag{12}$$

Ще одне правило, яке використовується, можна отримати при $b = 1/2$. В цьому випадку маємо $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $\beta_{21} = \alpha_2 = 1/2$ і

$$y_{i+1} = y_i + h\, f\left(y_i + \frac{1}{2} h\, \dot{y}_i, t_i + \frac{h}{2} \right), \tag{13}$$

що може розцінюватися як аналог квадратурної формули середніх прямокутників при обчисленні інтеграла в (12).

Можливо однозначне визначення значень параметрів p_1, p_2, α_2, β_{21} шляхом доповнення системи (9) співвідношеннями, які отримуються з умов перетворення на нуль деяких членів у виразі для $\varphi'''(0)$. Так, з (9) випливає $\alpha_2 = \beta_{21}$. При цьому $\varphi'''(0)$ містить три члена з однаковими коефіцієнтами, рівність нулю яких дає систему

$$1 - p_1 - p_2 = 0\,,\ 1 - 2\, p_2\, \alpha_2 = 0\,,\ 1 - 3\, p_2\, \alpha_2^2 = 0, \tag{14}$$

яка має єдиний розв'язок $p_1 = 1/4$, $p_2 = 3/4$, $\alpha_2 = 2/3$. Відповідне розрахункове правило має вигляд

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(f(y_i, t_i) + 3\, f\left(y_i + \frac{2}{3} h\, \dot{y}_i, t_i + \frac{2}{3} h \right) \right). \tag{15}$$

З виразу для $\varphi'''(0)$ випливає неможливість побудови формул числового інтегрування третього порядку точності при $q = 2$, Оскільки ніяким вибором параметрів не можна забезпечити рівність $\varphi'''(0) = 0$ для довільних $f(y,t)$.

Методи третього порядку точності. При $q = 3$ є вісім параметрів, що підлягають визначенню: $p_1, p_2, p_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_{21}, \beta_{31}, \beta_{32}$ (в загальному випадку число параметрів, як це випливає з (4) і (5), визначається виразом $\left(q^2 + 3q - 2\right)/2$). Система рівнянь для їх визначення має вигляд

$$\begin{aligned} &p_1 + p_2 + p_3 = 1, && p_2\, \alpha_2 + p_3\, \alpha_3 = 1/2, \\ &p_2\, \alpha_2^2 + p_3\, \alpha_3^2 = 1/3, && p_2\, \alpha_2\, \beta_{32} = 1/6, \\ &\beta_{31} + \beta_{32} - \alpha_3 = 0, && \beta_{21} + \alpha_2 = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Система (16) є недовизначеною і несумісною. Множину її розв'язків може бути представлено у двохпараметричному вигляді з двома вільними параметрами, в якості яких доцільно прийняти α_2 і α_3, оскільки вони в (16) входять в другому ступені. При цьому розв'язок (16) має вигляд

$$p_1 = 1 - \frac{3(\alpha_3 - \alpha_2) - 2}{6\alpha_2 \alpha_3}, \ p_2 = \frac{3\alpha_3 - 2}{6\alpha_2(\alpha_3 - \alpha_2)}, \ p_3 = \frac{2 - 3\alpha_2}{6\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)},$$
$$\beta_{21} = \alpha_2, \ \beta_{31} = \frac{\alpha_3(3\alpha_2(1-\alpha_2) - \alpha_3)}{\alpha_2(2 - 3\alpha_2)}, \ \beta_{32} = \frac{\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)}{\alpha_2(2 - 3\alpha_2)} \tag{17}$$

при будь-яких α_2, α_3, за винятком $\alpha_2 = \alpha_3$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 2/3$, при яких система (16) стає несумісною.

Найбільш уживане правило третього порядку точності виходить при $\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_3 = 1$. Для цього випадку $p_1 = 1/6$, $p_2 = 2/3$, $p_3 = 1/6$, $\beta_{21} = 1/2$, $\beta_{31} = -1$, $\beta_{32} = 2$ і розрахункове правило набуває вигляду

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3), \quad k_1 = h\, f(y_i, t_i),$$
$$k_2 = h\, f\left(y_i + \frac{k_1}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right), \quad k_3 = h\, f(y_i - k_1 + 2k_2, t_i + h). \tag{18}$$

Це правило можна розглядати як аналог квадратурної формули Сімпсона, оскільки в разі, якщо $f(y,t)$ не залежить від $y\left(f_y \equiv 0\right)$, то (18) збігається з останньою.

І в даному випадку параметри розрахункових правил можуть вибиратися із залученням додаткових співвідношень, які забезпечують єдиний розв'язок системи (16) і, крім того, не існує наборів параметрів, що призводять до правил четвертого порядку точності.

Методи четвертого і більш високих порядків точності. Із зростанням q система рівнянь відносно параметрів розрахункових правил набуває все більш складного вигляду. При $q = 4$ маємо 13 параметрів, які повинні задовольняти системі 11 рівнянь

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1, \ p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3 + p_4\alpha_4 = 1/2, \quad \alpha_2 = \beta_{21},$$
$$p_2\alpha_2^2 + p_3\alpha_3^3 + p_4\alpha_4^2 = 1/3, \ p_2\alpha_2^3 + p_3\alpha_3^3 + p_4\alpha_4^3 = 1/4,$$
$$p_3\beta_{32}\alpha_2 + p_4(\beta_{42}\alpha_2 + \beta_{43}\alpha_3) = 1/6, \ \beta_{31} + \beta_{32} - \alpha_3 = 0, \tag{19}$$
$$p_3\beta_{32}\alpha_2^2 + p_4\left(\beta_{42}\alpha_2^2 + \beta_{43}\alpha_3^2\right) = 1/12, \ \beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43} - \alpha_4 = 0,$$
$$p_3\beta_{32}\alpha_2\alpha_3 + p_4\alpha_4(\beta_{42}\alpha_2 + \beta_{43}\alpha_3) = 1/8, \ p_4\beta_{43}\beta_{32}\alpha_2 = 1/24.$$

Система (19) має безліч розв'язків, які, в загальному випадку, залежать від двох параметрів. Аналіз умов спільності показує, що безліч розв'язків розпадається на три підмножини, вигляд яких залежить від співвідношень між окремими параметрами. Так, якщо $\alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_4$, то (19) сумісна лише при $\alpha_4 = 1$ і множина розв'язків є двохпараметричною. При вільних параметрах α_2 і α_3 всі розв'язки представляються таким чином

$$p_2 = \frac{2\alpha_3 - 1}{12\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_2 - 1)}, \quad p_3 = \frac{2\alpha_2 - 1}{12\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_3)(1 - \alpha_3)},$$

$$p_4 = \frac{6\alpha_2\alpha_3 - 4(\alpha_2 + \alpha_3) + 3}{12(\alpha_3 - 1)(\alpha_2 - 1)},$$

$$\beta_{42} = \frac{(\alpha_2 - 1)\left(4\left(\alpha_2 - \alpha_3^2\right) + 3(\alpha_3 - \alpha_2) + 2(\alpha_3 + 1)\right)}{2\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_3)\left(6\alpha_2\alpha_3 - 4(\alpha_2 + \alpha_3) + 3\right)}, \tag{20}$$

$$\beta_{43} = \frac{(2\alpha_2 - 1)(\alpha_3 - 1)(\alpha_2 - 1)}{\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_3)\left(6\alpha_2\alpha_3 - 4(\alpha_2 + \alpha_3) + 3\right)}, \quad \beta_{32} = \frac{\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_3)}{2\alpha_2(2\alpha_2 - 1)},$$

$$p_1 = 1 - p_2 - p_3 - p_4, \quad \beta_{41} = 1 - \beta_{42} - \beta_{43}, \quad \beta_{31} = \alpha_2 - \beta_{32}, \quad \beta_{21} = \alpha_2,$$

причому $\alpha_2 \neq \frac{1}{2}, \alpha_2 \neq 0, \alpha_2 \neq \frac{3 - 4\alpha_3}{4 - 6\alpha_3}, \alpha_3 \neq 0$.

Друга підмножина розв'язків визначається умовами сумісності системи (19) при $\alpha_2 = \alpha_4$ і являє собою однопараметричну множину, для опису якої зручно вважати вільним параметр p_2 . При цьому всі розв'язки подаються як

$$\alpha_2 = \alpha_4 = \beta_{21} = 1,\ \alpha_3 = \frac{1}{2},\ p_1 = \frac{1}{6},\ p_3 = \frac{2}{3},\ p_4 = \frac{1}{6} - p_2,\ \beta_{31} = \frac{3}{8},$$
$$\beta_{32} = \frac{1}{8},\ \beta_{41} = \frac{12p_2 + 1}{2(6p_2 - 1)},\ \beta_{42} = \frac{1}{2(6p_2 - 1)},\ \beta_{43} = \frac{2}{1 - 6p_2}, \tag{21}$$

причому $p_2 \neq 1/6$.

Третя підмножина розв'язків визначається умовами сумісності при $\alpha_2 = \alpha_3$ і, так само як і друга підмножина, є однопараметричною, опис якої також зручно задавати при вільному параметрі p_2 . Всі розв'язки мають вигляд

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_{21} = \frac{1}{2},\ \alpha_4 = 1,\ p_1 = \frac{1}{6},\ p_3 = \frac{2}{3} - p_2,\ p_4 = \frac{1}{6},\ \beta_{31} = \frac{1 - 3p_2}{2(2 - 3p_2)},$$
$$\beta_{32} = \frac{1}{2(2 - 3p_2)},\ \beta_{41} = 0,\ \beta_{42} = 3p_2 - 1,\ \beta_{43} = 2 - 3p_2, \tag{22}$$

причому $p_2 \neq 2/3$.

Розрахункове правило, що відповідає множині параметрів (22) при $p_2 = 1/3$, і яке набуло найбільшого поширення, має вигляд

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = h\,f\left(y_i, t_i\right), \quad k_2 = h\,f\left(y_i + \frac{k_1}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right), \tag{23}$$

$$k_3 = h\,f\left(y_i + \frac{k_2}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right), \quad k_4 = h\,f\left(y_i + k_3, t_i + h\right).$$

Таким чином, це правило, як і правило (18), можна розглядати в якості аналогу квадратурної формули Сімпсона.

Інша поширена форма розрахункових співвідношень четвертого порядку відповідає першій підмножині розв'язків системи (19) при $\alpha_2 = 1/3, \alpha_3 = 2/3$. При цьому $\beta_{21} = 1/2, \beta_{31} = -1/3, \beta_{32} = \beta_{41} = \beta_{43}$ $\alpha_4 = 1,$ $\beta_{42} = -1,$ $p_1 = p_4 = 1/8,$ $p_2 = p_3 = 3/8,$ а розрахункове правило має вигляд

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{8}\left(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4\right),$$

$$k_1 = h\,f\left(y_i, t_i\right), \; k_2 = h\,f\left(y_i + \frac{k_1}{3}, t_i + \frac{h}{3}\right), \tag{24}$$

$$k_3 = h\,f\left(y_i + \frac{k_2}{3} + k_2, t_i + \frac{2}{3}h\right), \; k_4 = h\,f\left(y_i + k_1 - k_2 + k_3, t_i + h\right).$$

Це правило може трактуватися як аналог відомої квадратурної формули «трьох восьмих» (при $f_y \equiv 0$ (24) співпадає з останньою).

Викладені методи Рунге-Кутта до четвертого порядку включно мають властивість множинності розв'язків рівнянь щодо параметрів розрахункових правил (за винятком методу Ейлера). Починаючи з $q = 5$ (і далі) параметрів α_j, p_j, β_{js}, $j = \overline{1,q}$, $0 < s < j \le q$ не вистачає для виконання умов забезпечення q-го порядку точності. Відповідні системи стають перевизначеними і несумісними. Так, побудова методу 5-го порядку можлива лише при $q = 6$. Ця властивість, яка полягає в тому, що порядок точності методу менше q, зберігається для всіх методів вище четвертого порядку. Застосування методів Рунге-Кутта вимагає q-кратного обчислення правих частин вихідного рівняння на кожному кроці інтегрування. А оскільки саме обчислення правої частини є однією з найбільш трудомістких операцій, то використання методів вище четвертого порядку ставить високі вимоги щодо швидкодії обчислювального пристрою, який працює в реальному часі. Крім того, застосування методів високого порядку точності виправдано у випадках, коли обчислювальний процес може бути реалізовано зі значним кроком інтегрування, при якому необхідна швидкодія обчислювача може виявитися прийнятною. Однак, в разі побудови системи управління, крок інтегрування, що співпадає з інтервалом дискретності визначення управлінь, має обмеження зверху, оскільки збільшення дискретності управлінь призводить до збільшення похибки моделювання. Дана обставина свідчить про недоцільність використання методів Рунге-Кутта високого порядку для цілей моделювання в реальному часі динаміки об'єктів, що досліджуються. Сказане рівною мірою слід віднести і до використання неявних методів Рунге-Кутта, ідея побудови яких аналогічна викладеній вище, не дивлячись на те, що неявні методи є більш точними, оскільки містять більше число параметрів (у виразах (5). Для неявних методів слід покласти $0 < s \le q$ або $0 < s \le j$ — для напівявних).

Квадратурні методи. Третя група однокрокових методів числового розв'язування задачі Коші містить в собі методи, побудова яких заснована на застосуванні квадратурних формул при обчисленні інтеграла в (12). Ці методи будемо називати *квадратурними.*

Для викладу основної ідеї побудови квадратурних методів представимо вираз (12)у вигляді

$$y_{i+1} = y_i + h\int_0^1 f\left(y\left(t_i + \alpha h\right), t_i + \alpha h\right) d\alpha = y_i + h\int_0^1 \varphi\left(\alpha\right) d\alpha, \qquad (25)$$

що досягається заміною змінних $\alpha = \left[\left(\tau - t_i\right)/h\right]$ в (12). Для обчислення інтеграла в (25) скористаємося формулою Гаусса. Тоді отримаємо наближене значення для y_{i+1} у вигляді

$$y_{i+1} \approx y_i + h\sum_{j=1}^{q} p_j \,\varphi\left(\alpha_j\right) = y_i + h\sum_{j=1}^{q} p_j \; f\left(y\left(t_i + \alpha_j h\right), t_i + \alpha_j h\right). \qquad (26)$$

Права частина (26) містить $2q$ параметрів, які вибираються з умови точності квадратурного правила для поліномів r-го ступеня. З теорії квадратур відомо, що така вимога може застосовуватися для будь-яких $r \le \left(2q - 1\right)$, причому похибка обчислення інтеграла в (25), в припущенні безперервності $\varphi^{(r+2)}\left(\alpha\right)$, є величиною $O\left(h^{r+2}\right)$. В результаті можна отримати метод числового розв'язування диференціальних рівнянь $\left(r+1\right)$-го порядку. Якщо в (26) з $2q$ параметрів m параметрів вважати вільними, то можна будувати методи $\left(2q - m\right)$-го порядку точності.

Умова точності квадратурного правила для поліномів r-го ступеня призводить до наступної системи рівнянь щодо параметрів:

$$\sum_{i=1}^{q} p_i \,\alpha_i^{(j-1)} = \frac{1}{j}, \quad j = \overline{1,\left(2q - m\right)}, \qquad (27)$$

в якій m параметрів може бути обрано довільно. У теорії квадратур [11-14] доводиться, що при $m = 0$ система (27) має єдиний розв'язок для будь-якого $q \geq 1$. З цього випливає, що вона сумісна при будь-яких $m < 2q$.

Таким чином, задаючи q, m, а також вільні параметри, і визначаючи з (27) інші параметри, замість (26) можна записати точну рівність

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^{q} p_j \, f\left(y_{i+\alpha j}, t_i + \alpha jh\right) + O\left(h^{2q-m+1}\right), \qquad (28)$$

(тут $y_{i+\alpha j} = y(t_i + \alpha jh)$).

Однак для практичних обчислень вираз (28) не може застосовуватися, оскільки значення $y_{i+\alpha j}$ — невідомі. Аналізуючи (28) неважко помітити, що порядок похибки рівності не зміниться, якщо в ньому замінити невідомі $y_{i+\alpha j}$ на величини, які мають порядок похибки $O(h^{2q-m})$, для отримання яких достатньо застосувати квадратурну формулу порядку точності, меншого на одиницю. Це досягається: або зменшенням q, або збільшенням на одиницю кількості вільних параметрів, а також вибором їх значень, зручних в обчислювальному відношенні. При цьому для обчислення $y_{i+\alpha j}$ з похибкою $O(h^{2q-m})$ необхідно знати інші значення $y_{i+\bar{\alpha} j}$, вимога до точності визначення яких ще більш слабка (порядок похибки $y_{i+\bar{\alpha} j}$ дорівнює $(2q-m-1)$). Застосовуючи описану процедуру до віднаходження $y_{i+\bar{\alpha} j}$, і повторюючи цей процес, в результаті приходимо до висновку про необхідність знати $y_{i+\tilde{\alpha} j}$ з похибкою $O(h^2)$, що, в свою чергу, забезпечується застосуванням методу Ейлера. Таким чином, можна побудувати алгоритм послідовного визначення з наростаючою точністю значень $y_{i+\tilde{\alpha} j}, \cdots, y_{i+\tilde{\alpha} j}, y_{i+\alpha j}$, що дозволяє віднайти y_{i+1} у відповідності до виразу (28) із заданим порядком локальної похибки.

При побудові квадратурних методів розв'язування задачі Коші основною проблемою є узгодження квадратурних формул різного порядку точності між собою з метою отримання економічних розрахункових правил. У загальному вигляді задачу формалізації побудови квадратурних методів не вирішено.

Квадратурні методи першого порядку точності. Параметри методів визначаються з (27) при $(2q-m-1)$, що призводить до єдиної умови $\sum_{j=1}^{q} p_j = 1$. При $q = 1$ маємо $p_1 = 1$ (α_1 обирається довільно) і

$$y_{i+1} = y_i + h\, f\left(y_{i+\alpha_1}, t_i + \alpha_1 h\right),$$

але $f\left(y_{i+\alpha_1}, t_i + \alpha_1 h\right) = f\left(y_i, t_i\right) + O(h)$, що приводить до явного методу Ейлера (при $\alpha_1 = 1$ має місце неявний метод Ейлера).

Квадратурні методи другого порядку. Для побудови методів використовуються два рівняння системи (27)

$$\sum_{j=1}^{q} p_j = 1 \; \sum_{j=1}^{q} p_j\, \alpha_j = \frac{1}{2}. \tag{29}$$

Вираз (29) при $q = 1$ має єдиний розв'язок $p_1 = 1, \alpha_2 = 1/2$, а відповідне розрахункове правило збігається з методом Рунге-Кутта (13). При $q = 2$ система (29) має два вільних параметра, в якості яких зручно вибирати α_1 і α_2. При цьому

$$p_1 = \frac{2\,\alpha_2 - 1}{2\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)} \quad p_2 = \frac{1 - 2\alpha_1}{2\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)}$$

і, отже,

$$y_{i+1} = y_i + h\left(\frac{2\alpha_2 - 1}{2\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)} f\left(y_{i+\alpha_1}, t_{i+\alpha_1 h}\right) + \frac{1 - 2\alpha_1}{2\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)} f\left(y_{i+\alpha_2}, t_{i+\alpha_2 h}\right)\right) \tag{30}$$

Природно, що при використанні (30) для побудови розрахункових правил доцільно прийняти $\alpha_1 = 0$. Тоді множина розв'язків (29) є однопараметричною (по параметру α_2) і збігається з множиною (10) розв'язків системи (9) для параметрів методів Рунге-Кутта другого порядку, а вираз (30) набуває вигляду

$$y_{i+1}^{(3)} = y_i + h\left(1 - \frac{1}{2\alpha_2} f\left(y_i, t_i\right) + \frac{1}{2\alpha_2} f\left(y_{i+\alpha_2}, t_{i+\alpha_2 h}\right)\right), \tag{31}$$

де верхній індекс при шуканій функції означає порядок локальної похибки. Вираз (31) являє собою неявне правило, для використання якого необхідно знати $y_{i+\alpha_2}$. Відповідно до викладеного вище, для побудови явного однокрокового правила необхідно мати $y_{i+\alpha 2}^{(2)}$, що забезпечується застосуванням правила

$$y_{i+\alpha_2}^{(2)} = y_{i+\alpha_2} h\, f\left(y_i, t_i\right). \tag{32}$$

Сукупність виразів (31) і (32) складає розрахункові правила методів другого порядку точності. У загальному випадку ці методи вимагають дворазового обчислення правих частин на кроці інтегрування, проте використання властивостей асимптотичних оцінок дозволяє, в окремому випадку $\alpha_2 = 1$, побудувати метод другого порядку, що вимагає одноразового обчислення правих частин на кожному кроці. Дійсно, при $\alpha_2 = 1$ (31) можна представити як

$$y_{i+1}^{(3)} = y_i^{(3)} + \frac{1}{2}h\left(f\left(y_i^{(2)}, t_i\right) + f\left(y_{i+1}^{(2)}, t_i + h\right)\right), \tag{33}$$

звідки видно, що розраховане на $(i+1)$-му кроці значення $f\left(y_{i+1}^{(2)}, t_i + h\right)$ може використовуватися на $(i+2)$-му кроці в якості першого доданка збільшення в (33). Таким чином, сукупність виразів (32) і (33) дає економічний метод другого порядку.

Квадратурні методи третього порядку. Система рівнянь відносно параметрів цих методів складається з перших трьох рівнянь системи (27):

$$\sum_{j=1}^{q} P_j = 1, \quad \sum_{j=1}^{q} P_j\,\alpha_j = \frac{1}{2}, \quad \sum_{j=1}^{q} P_j\,\alpha_j^2 = \frac{1}{3}. \tag{34}$$

При $q = 1$ система (34) несумісна, а при $q > 1$ — недовизначена з $2q - 3$ вільними параметрами. Для $q = 2$ існує однопараметрична множина розв'язків, яка при вільному параметрі α_1 має вигляд:

$$p_1 = \frac{1}{4\left(3\alpha_1^2 - 3\alpha_1 + 1\right)}, \quad p_2 = \frac{3\left(2\alpha_1 - 1\right)^2}{4\left(3\alpha_1^2 - 3\alpha_1 + 1\right)}, \quad \alpha_2 = \frac{3\alpha_1 - 1}{3\left(2\alpha_1 - 1\right)}.$$

При $\alpha_1 = 0$ маємо $p_1 = 1/4$, $p_2 = 3/4$, $\alpha_2 = 2/3$, тому

$$y_{i+1}^{(4)} = y_i^{(3)} + \frac{h}{4}\left(f\left(y_i^{(3,4)}, t_i\right) + 3f\left(y_{i+2/3}^{(3)}, t_i + \frac{2}{3}h\right)\right). \tag{35}$$

Для обчислення $y_{i+2/3}^{(3)}$ необхідно використовувати один з методів другого порядку, застосовуючи для цієї мети загальне вираз (30). Однак, з огляду на те, що в (35) входить $f\left(y_i, t_i\right)$, при обчисленні $y_{i+2/3}^{(3)}$ має сенс використовувати це значення правої частини, що призводить до $\alpha_1^{(3)} = 0$ і

$$y_{i+2/3}^{(3)} = y_{i+}^{(4)} + \frac{2}{3}h\left(\frac{2\alpha_2^{(3)} - 1}{2\alpha_2^{(3)}} f\left(y_i, t_i\right) + \frac{1}{2\alpha_2^{(3)}} f\left(y_{\left(i+2/3\right)\alpha_2^{(3)}}, t_i + \frac{2}{3}\alpha_2^{(3)} h\right)\right), \tag{36}$$

а

$$y_{\left(i+2/3\right)\alpha_2^{(3)}} = y_i^{(4)} + \frac{2}{3}\alpha_2^{(3)} h\, f\left(y_i, t_i\right).$$

Приймаючи $\alpha_2^{(3)} = 1/2$, приходимо до наступного правила

$$\begin{aligned} y_{i+1/3}^{(2)} &= y_i + \frac{h}{3} f\left(y_i, t_i\right). \\ y_{i+2/3}^{(3)} &= y_i + \frac{2}{3} h\, f\left(y_{i+1/3}^{(2)}, t_{i+1/3 h}\right), \\ y_{i+1}^{(4)} &= y_i + \frac{h}{4}\left(f\left(y_i, t_i\right) + 3 f\left(y_{i+2/3}^{(3)}, t_{i+2/3 h}\right)\right). \end{aligned} \tag{37}$$

Правило (37) аналогічне до методу Рунге-Кутта третього порядку, отриманому при $\alpha_2 = 1/3$, $\alpha_3 = 2/3$ в (16).

При $\alpha_2^{(3)} = 1$ обчислювальне правило набуває вигляду

$$\begin{aligned} y_{i+2/3}^{(2)} &= y_i + \frac{2}{3} h\, f\left(y_i, t_i\right), \\ y_{i+2/3}^{(3)} &= y_i + \frac{1}{3} h\left(f\left(y_i, t_i\right) + f\left(y_{i+2/3}^{(2)}, t_{i+2/3 h}\right)\right), \\ y_{i+1}^{(4)} &= y_i + \frac{h}{4}\left(f\left(y_i, t_i\right) + 3 f\left(y_{i+2/3}^{(3)}, t_{i+2/3 h}\right)\right). \end{aligned} \tag{38}$$

При $q = 3$ система (34) має три вільних параметра, в якості яких зручно прийняти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Поклавши, як і раніше, $\alpha_1 = 0$, приходимо до наступного розв'язку

$$p_1 = \frac{1}{3\alpha_2\,\alpha_3} + \frac{\alpha_2 - 1}{2\alpha_2} + \frac{\alpha_3 - 1}{2\alpha_3},\ p_2 = \frac{3\alpha_3 - 2}{6\left(\alpha_3 - \alpha_2\right)\alpha_2},\ p_3 = \frac{2 - 3\alpha_2}{6\left(\alpha_3 - \alpha_2\right)\alpha_3}.$$

Питання вибору значень α_2, α_3 не вирішене на даний час. Як вказувалося, часто вибирають параметри з умови зручності обчислень. Так, приймаючи $\alpha_2 = 1/2,\ \alpha_3 = 1$, маємо $p_1 = 1/6,\ p_2 = 2/3,\ p_3 = 1/6$ і

$$y_{i+1}^{(4)} = y_i^{(4)} + \frac{h}{6}\left(f\left(y_i, t_i\right) + 4 f\left(y_{i+1/2}^{(3)}, t_{i+1/2 h}\right) + f\left(y_{i+1}^{(3)}, t_{i+h}\right)\right). \tag{39}$$

Для значень $y_{i+1/2}^{(3)}$ і $y_{i+1}^{(3)}$ справедливі вирази (36) в яких параметри $\alpha_2^{(3)}$, в загальному випадку, різні, а вибір їх значень призводить до різних обчислювальних правил. Так, якщо $\alpha_2^{(3)} = 2$, то, з огляду на необхідність обчислення $f\left(y_{i+1/2}^{(3)}, t_{i+h}\right)$ в (39) для $y_{i+1/2}^{(3)}$, маємо

$$y^{(3)}_{i+1\!/\!_2} = y^{(4)}_i + \frac{h}{8}\left(3\,f\left(y_i, t_i\right) + f\left(y^{(3)}_{i+1}, t_{i+h}\right)\right). \qquad (40)$$

Вважаючи $\alpha^{(3)}_2 = 1$ для обчислення $y^{(3)}_{i+1}$, отримуємо

$$y^{(3)}_{i+1\!/\!_2} = y^{(4)}_i + \frac{h}{2}\left(f\left(y_i, t_i\right) + f\left(y^{(3)}_{i+1}, t_{i+h}\right)\right). \qquad (41)$$

і, як зазвичай,

$$y^{(2)}_{i+1} = y_i. + hf\left(y^{(4)}_i, t_i\right). \qquad (42)$$

Сукупність виразів (39)-(42) і складає обчислювальне правило. Аналізуючи ці вирази, неважко помітити, що число обчислень правої частини залежить від порядку похибки $y^{(r)}_i$ при обчисленні $f\left(y_i, t_i\right)$. При $r = 4$ потрібно обчислювати чотири значення правої частини на кожному кроці інтегрування, а при $r = 3$ — три. Інша особливість цього розрахункового правила полягає в наявності трьох наближених значень y_{i+1}, що може бути використане для контролю обчислювального процесу. Цю властивість методів, заснованих на квадратурних формулах, слід вважати істотною перевагою і враховувати при виборі методу числового розв'язування.

Висновки. Виконаний порівняльний аналіз показав, що застосування неявних методів доцільно для забезпечення збіжності обчислювальних процедур при значних кроках інтегрування вихідної системи рівнянь, причому, саме збіжність ітераційного процесу в ході обчислень визначає ефективність неявних методів.

Застосування методів високого порядку точності виправдано лише у випадках, коли формалізація вихідної задачі (суть ММ динамічної системи) дозволяє реалізувати обчислювальний процес з достатньо великим кроком інтегрування, що, з одного боку, необхідно для скорочення часу обчислень (наприклад, для реалізації систем управління реального часу швидкоплинними процесами), а з другого — забезпечується достатньою швидкодією обчислювача. Одначе надмірне збільшення кроку інтегрування може негативно позначитися на точності моделювання.

За очевидною привабливістю квадратурних методів основною проблемою у їх застосуванні є узгодження квадратурних формул різного порядку точності між собою, що випливає з необхідності отримання економічних розрахункових правил і являє собою окрему задачу у постановочному плані.

Список використаних джерел:

1. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука,1989. 432 с.
2. Краскевич В. Е., Зеленский К. Х., Гречко В. И. Численные методы в инженерных исследованиях. Киев: Вища школа, 1986. 263 с.

3. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2002. 848 с.
4. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 2004. 600 с.
5. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
6. Галанин М. П., Конев С. А. Разработка и применение экспоненциального метода интегрирования жёстких систем на основе классического метода Рунге-Кутты. *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша.* 2012. № 51. 24 с. DOI: 10.20948/prepr-2018-51. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-51.
7. Лобанов А. И., Петров И. Б. Численное решение нелинейных алгебраических уравнений. М.: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2012. URL: https://www.studentlibrary.ru/book/intuit_051.html.
8. Moler C., van Loan C. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, 25 years later. *SIAM Review*. 2003. Vol. 45. № 1. P. 3-49.
9. Tokman M. Efficient integration of large stiff systems of ODEs with exponential propagation iterative (EPI) methods. *Journal of Computational Physics*. 2006. Vol. 213. P. 748-776.
10. Al-Mohy A. H., Higham N. J. Computing the action of the matrix exponential, with an application to exponential integrators.*SIAM J. Sci. Comput*. 2011. Vol. 33. P. 488-511.
11. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир. 1990. 512 с.
12. Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations II: Stiff and differential-algebraic problems. 2nd ed. Berlin; New York: Springer-Verlag, 1996. ISBN 978-3-540-60452-5.
13. Iserles A. A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1996. ISBN 978-0-521-55655-2.
14. Süli E., Mayers D. An Introduction to Numerical Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. ISBN 0-521-00794-1.

ANALYSIS OF POSSIBILITIES OF ALGORITHMS' SELECTION AND ADAPTATION FOR DIFFERENTIAL DYNAMIC MODELS' NUMERICAL IMPLEMENTATION

The paper analyzes possibilities of selection and adaptation of computational algorithms in the implementation of differential dynamic models, i.e. in solving ordinary differential equations. The limited resources of computer-integrated systems determine the requirements for the computing and control systems' performance, which indicates the urgency of target selection or adaptation of numerical methods for solving equations of dynamics objects. The process of improving numerical methods has a long history and does not stop until now. The growing complexity of the studied dynamic objects has led to the development of implicit methods for dynamics' numerical analysis, but research shows that the use of implicit methods is justified, if we assume the use of a significant step of integrating the source system. In addition, it is found that the available results on the formalization of power methods for solving algebraic equations in the integration step and their adaptation in computer use are still insufficient to address their use in the study of complex dynamic objects. The integration step upper limit indicates the inexpediency of using

high-order Runge-Kutta methods for the purposes of modeling the dynamics of the studied systems in real time. Accordingly, with regard to quadrature methods, the problem of formalizing the construction is not solved in general. Thus, the task of selecting the optimal method can be formulated as follows: to determine the numerical method for the modeled object’s dynamics equations’ integration, for which the required speed of the control system can be achieved, and the error of solving the dynamics equations does not exceed the specified value. The analysis of the properties of different groups of numerical methods is carried out, which makes it possible to conclude that in choosing the best method the initial set of the required methods should be formed based on the single-step methods of the Runge-Kutta type and the quadrature methods no higher than the fourth order. In implementing stationary modes, the initial group of methods should also include the multi-step methods — explicit and the «forecast-correction» type.

Key words: *numerical methods, mathematical model, computational algorithm, differential equations.*

Отримано: 24.09.2020

УДК 004.94:51-7
DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.42-53

Д. А. Верлань*, канд. техн. наук,
В. А. Іванюк,** д-р техн. наук,
О. О. Фомін*,** д-р техн. наук

* ТОВ «Науково-виробниче підприємство «ІНФОТЕХ», м. Київ,
** Кам’янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам’янець-Подільський,
*** Одеський національний політехнічний університет, м. Одеса

ІНТЕГРАЛЬНІ ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ В ЗАДАЧАХ ІДЕНТИФІКАЦІЇ І ДІАГНОСТИКИ

У роботі розглянуто модельний підхід для розв’язання задачі діагностики і контролю динамічних об’єктів на основі застосування інтегральних рівнянь. Зростаюча складність енергетичних об’єктів, врахування їх динамічних властивостей, підвищення вимог до точності та об'єктивності прийнятих рішень призводять до необхідності розробки нових ефективних алгоритмів математичного забезпечення систем обробки діагностичної інформації, які б дозволили забезпечити зазначені вимоги і автоматизувати процес контролю силових установок.

У цей час в технічній діагностиці розвивається напрям, що ґрунтується на відновленні моделі (оператора) з метою діагностики. Звичайно передбачається, що несправності змінюють тільки параметри моделі об’єктів контролю, які при діагностуванні оцінюються методами параметричної ідентифікації, але можливі ви-