УДК 519.21
DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.54-61

Л. А. Вотякова[*], канд. фіз.-мат. наук,
О. С. Туржанська[*], канд. пед. наук,
О. А. Назарчук[**], канд. мед. наук

[*]Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця,
[**]Вінницький національний медичний університет
імені М. І. Пирогова, м. Вінниця

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОДНОКАНАЛЬНОЇ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ДВОЕТАПНИМ НАДХОДЖЕННЯМ ВИМОГИ

Будь-яка система масового обслуговування, як правило, включає такі основні складові: вхідний потік вимог (заявок), обслуговуючий пристрій, чергу на обслуговування і вихідний потік. Щоб провести аналіз системи масового обслуговування вважаємо, що час надходження заявок та час обслуговування є випадкові величини, закони розподілу яких визначаються за статистичними даними, накопиченими при аналізі подібних ситуацій.

І, звісно ж, така задача розв’язується методами теорії ймовірностей, які застосовуються у теорії масового обслуговування. Будується математична модель, що описує функціонування системи масового обслуговування, і проводиться її аналіз.

Найбільш привабливими випадковими процесами, що описують функціонування систем масового обслуговування, є марковські процеси.

У роботі представлена математична модель одноканальної системи масового обслуговування, для якої час надходження вимоги складається з двох етапів. Ми побудували модель масового обслуговування з двоетапним вхідним потоком, а саме знайшли основні ймовірнісні характеристики вхідного потоку, розподіл ймовірностей числа вимог, що надходять за час t. Для знаходження стаціонарного розподілу вкладеного ланцюга Маркова ми скористались графоаналітичним методом.

Вихідними даними для роботи була найпростіша класична модель системи масового обслуговування, ускладнена наступним шляхом: вхідний потік складається з двох етапів — часу підготовки вимоги і часу її транспортування.

Такі моделі є більш наближеними до потреб практики і дають можливість врахувати більшу кількість факторів, що впливають на процес обслуговування.

Ключові слова: *система масового обслуговування, ланцюг Маркова, перехідні ймовірності, показниковий розподіл.*

Вступ. Вимоги практики вже майже півстоліття висувають перед теорією масового обслуговування велике число постановок задач [1]. Кожна нова постановка має за мету побудову математичної моделі, яка б відображала істинний характер досліджуваних явищ. Найбільш ефективним у цьому плані виявився інструментарій, розроблений в теорії випадкових процесів і особливо марковських [2].

Процеси, у яких переходи визначаються вкладеним ланцюгом Маркова, а час перебування у кожному стані показниково розподілена випадкова величина, виявились придатними для описання функціонування найрізноманітніших систем [1-5].

Постановка задачі. У своїй роботі ми будемо виходити з найпростішої класичної одноканальної системи масового обслуговування. Наша задача — побудувати нову модель, змінивши характер потоку надходження вимог. Новизна пропонованої тут математичної моделі у характері вхідного потоку [3-4]. Якщо стандартний підхід передбачає, що вхідний потік є рекурентний, то в нашій роботі час надходження вимоги складається з часу підготовки вимоги і часу власне надходження (транспортування) її, причому тривалість кожного стану є показниково розподілена випадкова величина.

Зрозуміло, що за цих умов функціонування такої системи описується марковським процесом, а тому при знаходженні основних ймовірнісних характеристик були використані методи теорії марковських процесів.

Основна частина. Нехай на обслуговуючий пристрій надходить рекурентний потік вимог. Час надходження вимоги має функцію розподілу:

$$F(t)=\begin{cases}0, \text{ якщо } t\le 0,\\ 1-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_2 t}+\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_1 t}, \text{ якщо } t>0,\end{cases} \tag{1}$$

де $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$ ($\lambda_1\ne\lambda_2$). Якщо вимога надходить в момент, коли обслуговуючий пристрій вільний, то вона негайно потрапляє на обслуговування і обслуговується час η із функцією розподілу:

$$G(t)=\begin{cases}0, \text{ якщо } t\le 0,\\ 1-e^{-\mu t}, \text{ якщо } t>0,\end{cases} \tag{2}$$

причому випадкова велична η не залежить від вхідного потоку. Якщо ж вимога надходить в момент, поки пристрій зайнятий, то вона втрачається.

Оскільки час надходження вимоги є сумою двох незалежних випадкових величин ξ_1 і ξ_2, то будемо вважати, що ξ_1 — час підготовки вимоги до відправлення (має показниковий розподіл з параметром λ_1), ξ_2 — час надходження вимоги (має показниковий розподіл з параметром λ_2). У зв'язку з цим функціонування системи можна описати у такий спосіб. Система може перебувати у станах: e_1 — система вільна, йде підготовка до відправлення вимоги, перебуває у цьому стані час ξ_2 і переходить із ймовірністю одиниця в другий стан; e_2 — система вільна, вимога обслуговується, перебуває у цьому стані час $\min(\xi_1, \eta)$ (вважаємо, що відправник дістає інформацію про прибуття вимоги і починає готувати наступну) і переходить в стан e_1 з ймовірністю $p_{31} = P(\eta < \xi_1) = \dfrac{\mu}{\lambda_1 + \mu}$ або у стан e_4 з ймовірністю $p_{34} = P(\xi_1 < \eta) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu}$; e_4 — вимога продовжує обслуговуватись, перебуває у цьому стані час $\min(\xi_2, \eta)$ і переходить у стан e_2 з ймовірністю $p_{42} = P(\eta < \xi_2) = \dfrac{\mu}{\lambda_2 + \mu}$ або у стан e_3 з ймовірністю $p_{43} = P(\xi_2 < \eta) = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu}$.

Час перебування системи у станах e_1, e_2, e_3, e_4 має показниковий розподіл відповідно з параметрами λ_1, λ_2, $\lambda_1 + \mu$, $\lambda_2 + \mu$.

Таким чином, функціонування досліджуваної системи масового обслуговування описується марковським процесом $\xi(t)$, множиною станів якого є множина $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, граф його можливих переходів має вигляд:

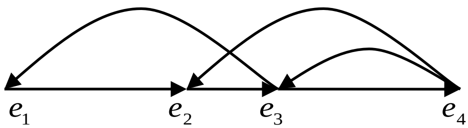

Рис. 1.

Той факт, що в момент часу t процес перебуває у стані e_i $(i = \overline{1,4})$ будемо записувати так: $\xi(t) = i$, зокрема згідно з нашим припущенням $\xi(0) = 1$. Переходи здійснюються згідно з вкладеним ланцюгом Маркова, який задається такою матрицею:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\mu}{\lambda_1 + \mu} & 0 & 0 & \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu} \\ 0 & \dfrac{\mu}{\lambda_2 + \mu} & \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Основними характеристиками процесу $\xi(t)$ є ймовірності того, що процес у момент часу t знаходиться у стані e_j за умови, що у початковий момент він знаходиться у стані e_i. Позначимо їх

$$P_{ij}(t) = P(\xi(t) = j \,|\, \xi(0) = i).$$

Скориставшись формулою повної ймовірності, складемо систему функціональних рівнянь

$$P_{11}(t+\Delta t) = P_{11}(t)P(\xi_1 > \Delta t) + P_{13}(t)P(\eta < \Delta t)P(\xi_1 > \Delta t) + o(\Delta t),$$

$$P_{12}(t+\Delta t) = P_{11}(t)P(\xi_1 < \Delta t) + P_{12}(t)P(\xi_2 > \Delta t) + \\ + P_{14}(t)P(\eta < \Delta t)P(\xi_2 > \Delta t) + o(\Delta t),$$

$$P_{13}(t+\Delta t) = P_{12}(t)P(\xi_2 < \Delta t) + P_{13}(t)P(\eta > \Delta t)P(\xi_1 > \Delta t) + \\ + P_{14}(t)P(\eta > \Delta t)P(\xi_2 < \Delta t) + o(\Delta t),$$

$$P_{14}(t+\Delta t) = P_{13}(t)P(\eta > \Delta t)P(\xi_1 < \Delta t) + P_{14}(t)P(\eta < \Delta t)P(\xi_2 < \Delta t) + o(\Delta t).$$

Звідки дістанемо систему лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} P_{11}'(t) = -\lambda_1 P_{11}(t) + \mu P_{13}(t), \\ P_{12}'(t) = \lambda_1 P_{11}(t) - \lambda_2 P_{12}(t) + \mu P_{14}(t), \\ P_{13}'(t) = \lambda_2 P_{12}(t) - (\lambda_1 + \mu) P_{13}(t) + \lambda_2 P_{14}(t), \\ P_{14}'(t) = \lambda_1 P_{13}(t) - (\lambda_2 + \mu) P_{14}(t). \end{cases} \tag{4}$$

характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} x+\lambda_1 & 0 & -\mu & 0 \\ -\lambda_1 & x+\lambda_2 & 0 & -\mu \\ 0 & -\lambda_2 & x+\lambda_2+\mu & -\lambda_2 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 & x+\lambda_2+\mu \end{vmatrix} =$$

$$= x^4 + 2(\lambda_1+\lambda_2+\mu)x^3 + ((\lambda_1+\lambda_2+\mu)^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\mu + \lambda_2\mu)x^2 + \\ + (\lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^2 + 3\lambda_1\lambda_2\mu + \lambda_1^2\mu + \lambda_1\mu^2 + \lambda_2\mu^2)x = 0.$$

Очевидно, що $x_1 = 0$, $x_2 = -(\lambda_1+\lambda_2+\mu)$ — корені цього рівняння. Ще два корені рівняння дістанемо з рівняння:

$$x^2 + (\lambda_1+\lambda_2+\mu)x + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\mu + \lambda_2\mu = 0.$$

$$x_{3,4} = \frac{1}{2}(-(\lambda_1+\lambda_2+\mu) \pm \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \mu^2 - 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\mu - 2\lambda_2\mu}\ .$$

Тоді загальний розв'язок системи (4) подається у вигляді:

$$P_{11}(t) = c_{11} + c_{12}e^{x_2 t} + c_{13}e^{x_3 t} + c_{14}e^{x_4 t},$$

$$P_{12}(t) = c_{21} + c_{22}e^{x_2 t} + c_{23}e^{x_3 t} + c_{24}e^{x_4 t},$$

$$P_{13}(t) = c_{31} + c_{32}e^{x_2 t} + c_{33}e^{x_3 t} + c_{34}e^{x_4 t},$$

$$P_{14}(t) = c_{41} + c_{42}e^{x_2 t} + c_{43}e^{x_3 t} + c_{44}e^{x_4 t}.$$

Оскільки $\operatorname{Re} x_k < 0$ для $k = 2,3,4$, то існують границі $\lim\limits_{t\to+\infty} P_{1k}(t) = c_{k1}$ $(t = \overline{1,4})$, які позначимо відповідно $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ (стаціонарні ймовірності).

Стаціонарні характеристики π_k $(k = \overline{1,4})$ можна знайти за формулами:

$$\pi_k = \frac{p_k m_k}{p_1 m_1 + p_2 m_2 + p_3 m_3 + p_4 m_4}, \tag{5}$$

де p_1, p_2, p_3, p_4 — стаціонарні ймовірності вкладеного ланцюга Маркова, що задається матрицею (3), $m_1 = \dfrac{1}{\lambda_1}$, $m_2 = \dfrac{1}{\lambda_2}$, $m_3 = \dfrac{1}{\lambda_3}$, $m_4 = \dfrac{1}{\lambda_4}$ — середній час, який процес $\xi(t)$ проводить відповідно у станах e_1, e_2, e_3, e_4. Стаціонарні ймовірності вкладеного ланцюга Маркова є розв’язок системи:

$$\begin{cases} p_1 = p_3 \dfrac{\mu}{\lambda_1 + \mu}, \\ p_2 = p_1 + p_4 \dfrac{\mu}{\lambda_2 + \mu}, \\ p_3 = p_2 + p_4 \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu}, \\ p_4 = p_3 \dfrac{\lambda}{\lambda_1 + \mu}, \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1, \end{cases}$$

яку розв’яжемо графо-аналітичним методом [6].

За графом переходів вкладеного ланцюга Маркова побудуємо нижні решітки кожної вершини і для них знайдемо індекси:

- для першої вершини

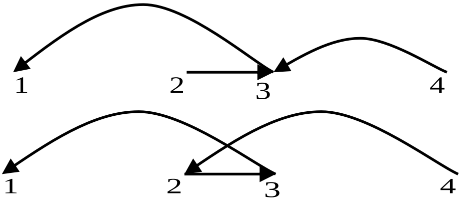

Рис. 2.

$$I_1 = \frac{\mu}{\lambda_1 + \mu} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu} + \frac{\mu}{\lambda_1 + \mu} \cdot \frac{\mu}{\lambda_2 + \mu} = \frac{\mu}{\lambda_1 + \mu},$$

- для другої вершини

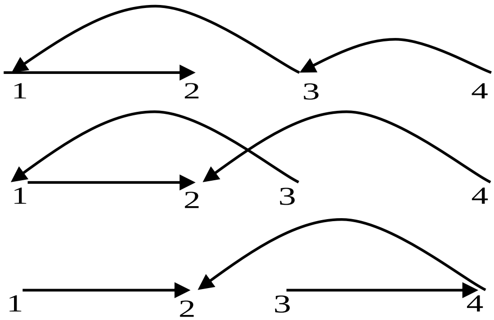

Рис. 3.

$$I_2 = \frac{\mu}{\lambda_1 + \mu} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu} + \frac{\mu}{\lambda_1 + \mu} \cdot \frac{\mu}{\lambda_2 + \mu} + \frac{\mu}{\lambda_2 + \mu} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu} = \frac{\mu}{\lambda_2 + \mu} + \frac{\mu}{\lambda_1 + \mu} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu},$$

- для третьої вершини

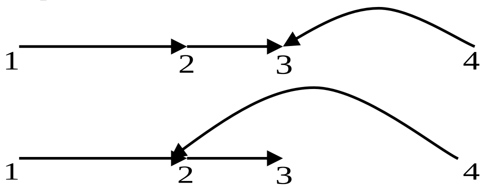

Рис. 4.

$$I_3 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu} + \frac{\mu}{\lambda_2 + \mu} = 1,$$

- для четвертої вершини

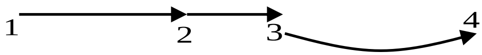

Рис. 5.

$$I_4 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu}.$$

Тоді $p_k = \dfrac{I_k}{I}$, де $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 2 + \dfrac{\mu}{\lambda_2 + \mu} + \dfrac{\mu}{\lambda_1 + \mu} + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu}$,

точніше

$$p_1 = \frac{\lambda_2 \mu + \mu^2}{2\lambda_1 \lambda_2 + 3\lambda_1 \mu + 3\lambda_2 \mu + 3\mu^2},$$

$$p_2 = \frac{\lambda_1\mu + \mu^2 + \lambda_2\mu}{2\lambda_1\lambda_2 + 3\lambda_1\mu + 3\lambda_2\mu + 3\mu^2},$$

$$p_3 = \frac{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\mu + \mu^2 + \lambda_2\mu}{2\lambda_1\lambda_2 + 3\lambda_1\mu + 3\lambda_2\mu + 3\mu^2},$$

$$p_4 = \frac{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\mu}{2\lambda_1\lambda_2 + 3\lambda_1\mu + 3\lambda_2\mu + 3\mu^2}.$$

Скориставшись формулою (5), маємо

$$\pi_1 = \frac{1}{\Lambda}(\lambda_2^2\mu + \lambda_2\mu^2)\,,\ \pi_2 = \frac{1}{\Lambda}(\lambda_1^2\mu + \lambda_1\mu^2 + \lambda_1\lambda_2\mu)\,,$$

$$\pi_3 = \frac{1}{\Lambda}(\lambda_1\lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_2\mu)\,,\ \pi_4 = \frac{1}{\Lambda}\lambda_1^2\lambda_2\,,$$

де $\Lambda = \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2\mu + \lambda_1\mu^2 + \lambda_1^2\mu + \lambda_2^2\mu + \lambda_2\mu^2$.

Нарешті, врахувавши, що $P_{11}(0) = 1$, $P_{12}(0) = P_{13}(0) = P_{14}(0) = 0$, $P_{11}'(0) = -\lambda_1$, $P_{12}'(0) = \lambda_1$, $P_{13}'(0) = P_{14}'(0) = 0$, $P_{11}''(0) = \lambda_1^2$, $P_{12}''(0) = = -\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2$, $P_{13}''(0) = \lambda_1\lambda_2$, $P_{14}''(0) = 0$, маємо чотири системи для визначення c_{ik} $(i = \overline{1,4},\ k = 2,3,4)$:

$$\begin{cases} c_{12} + c_{13} + c_{14} = 1 - \pi_1, \\ x_2 c_{12} + x_3 c_{13} + x_4 c_{14} = -\lambda_1, \\ x_2^2 c_{12} + x_3^2 c_{13} + x_4^2 c_{14} = \lambda_1^2, \end{cases} \quad \begin{cases} c_{22} + c_{23} + c_{24} = -\pi_2, \\ x_2 c_{22} + x_3 c_{23} + x_4 c_{24} = \lambda_1, \\ x_2^2 c_{22} + x_3^2 c_{23} + x_4^2 c_{24} = -\lambda_1^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{32} + c_{33} + c_{34} = -\pi_3, \\ x_2 c_{32} + x_3 c_{33} + x_4 c_{34} = 0, \\ x_2^2 c_{32} + x_3^2 c_{33} + x_4^2 c_{34} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} c_{42} + c_{43} + c_{44} = -\pi_4, \\ x_2 c_{42} + x_3 c_{43} + x_4 c_{44} = 0, \\ x_2^2 c_{42} + x_3^2 c_{43} + x_4^2 c_{44} = \lambda_1\lambda_2. \end{cases}$$

Висновки. Таким чином, побудовані перехідні ймовірнісні характеристики, які повністю описують функціонування одноканальної системи з двоетапним надходженням вимоги.

Список використаних джерел:

1. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введения в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1966. 431 с.
2. Боровков А. А. Вероятностные методы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972. 368 с.
3. Породников В. Д., Шаташвили А. Д. Об одной системе с изменяющимся входным потоком и групповым обслуживанием. *Тез. докл. XXI школы-коллоквиум по т. в. и м. ст.* Тбилиси, 1987. С. 37.
4. Породников В. Д., Шаташвили А. Д. Исследование систем массового обслуживания с переключаемым режимом работы, зависящий от длины

очереди. *Эргодическая теория марковских процессов. Всесоюзная школа-семинар, т. докладов* Кедвел, 1987. С. 44-45.
5. Philippe N. Basic elements of queuing theory. Application to the Modelling of Computer Systems. The University of Massachusetts, 1998. 110 p.
6. Votiakova L. A., Nakonechna L. I. Modelling of the queuing system with an increasing demand intensity in the empty state. *Theory of Stochastic Processes*. 2018. Vol. 23 (39). № 2. P. 75-79.

MATHEMATICAL MODEL OF ONE-CHANNEL QUEUEING SYSTEM WITH TWO-STAGE REMAND ARRIVAL

Any queuing system typically includes the following main components: the input stream of requests, the service device, the service queue and the output stream. To analyze the queuing system, we believe that the time of receipt of applications and time of service are random variables, the laws of distribution of which are determined by statistics accumulated in the analysis of such situations.

And, of course, this problem is solved by the methods of probability theory, which are used in the theory of queuing. A mathematical model describing the functioning of the queuing system is built and analyzed.

The most attractive random processes which describe the functioning of queuing systems are Markov processes.

Mathematical model of a one-channel queueing system, for which the time of remand accession consists of two stages, has been presented in this article. We have built a queueing model with a two-step input flow, namely, we have found the basic probabilistic characteristics of the input flow. Particularly, the main probability characteristics of input flow and distribution of probability of number of remands, which comes during *t* time were found. To find the stationary distribution of the embedded Markov chain, we used the graphoanalytic method.

The initial data for the article is the simplest classical queuing system model, complicated by the following: the input flow consists of two stages — the time of preparation of the remand and the time of its transportation.

Such models are more approximate to the needs of the practice and allow the opportunity to consider greater number of factors influencing the service process.

Key words: *queuing system, Markov chains, transition probabilities, exponent distribution.*

Отримано: 12.10.2020