УДК 517.97
DOI: 10.32626/2308-5878.2021-22.5-19

С. М. Бак, д-р фіз.-мат. наук

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

СТОЯЧІ ХВИЛІ В ДИСКРЕТНИХ РІВНЯННЯХ ТИПУ КЛЕЙНА-ҐОРДОНА ІЗ НАСИЧУВАНИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

Стаття присвячена вивченню дискретних рівнянь типу Клейна-Ґордона, які описують динаміку нескінченних ланцюгів лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Такі рівняння представляють собою нескінченні системи звичайних диференціальних рівнянь. Вивчаються такого типу рівняння із насичуваними нелінійностями. Для таких рівнянь одержано результати про існування розв'язків у вигляді стоячих хвиль. Після підстановки в дану систему анзаца у вигляді стоячої хвилі одержуться система алгебраїчних рівнянь для амплітуди стоячої хвилі. Вивчаються два види розв'язків: періодичні (з періодом k) і локалізовані (збігаються до нуля на нескінченності). Дані рівняння мають варіаційну структуру. Тому показано, що k-періодичні і локалізовані розв'язки можна побудувати як критичні точки двох деяких функціоналів у відповідних просторах двохсторонніх послідовностей. Далі розглянуто многовиди Нехарі для відповідних варіаційних задач. Ці многовиди містять нетривіальні критичні точки даних функціоналів. Показано, що многовиди Нехарі непорожні і замкнені підмноговиди відповідних просторів двохсторонніх послідовностей. Крім того, розглянуто відповідні задачі мінімізації даних функціоналів. Показано, що на многовиді Нехарі для першого функціоналу відповідна задача мінімізації за певних умов має розв'язок. А отже, за цих умов вихідне рівняння має нетривіальні k-періодичні розв'язки. У випадку локалізованих розв'язків довести, що відповідна задача мінімізації має розв'язок на відповідному многовиді Нехарі складно. Тому у цьому випадку використано метод періодичних апроксимацій, тобто критичні точки функціоналу, який відповідає локалізованим розв'язкам, будуються за допомогою граничного переходу (при періоді k прямуючому до нескінченності) в критичних точках функціоналу, який відповідає k-періодичним розв'язкам. Одержані локалізовані розв'язки і є розв'язками відповідної задачі мінімізації.

Ключові слова: *дискретні рівняння типу Клейна-Ґордона, стоячі хвилі, критичні точки, многовид Нехарі.*

Вступ. Дискретні нескінченновимірні динамічні системи широко використовуються для моделювання складних квантових і оптичних явищ. Серед таких систем найбільш відомими є системи типу

Фермі–Пасти–Улама, дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера, дискретні рівняння типу Клейна-Ґордона.

Серед розв'язків таких систем особливої уваги заслуговують розв'язки у вигляді біжучих і стоячих хвиль. В статтях [1; 4; 6-8; 13; 14; 17; 18] для рівнянь типу Клейна-Ґордона досліджено питання існування біжучих хвиль різних видів. В статтях [2; 10-12; 15; 16] досліджувалось питання існування стоячих хвиль для дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера. В той же час для рівнянь типу Клейна-Ґордона відомі декілька праць [5; 9], в яких вивчалося питання стійкості стоячих хвиль.

Метою статті є одержання умов існування стоячих хвиль для дискретних рівнянь типу Клейна-Ґордона із насичуваними нелінійностями.

1. Постановка задачі. Основні припущення. У цій статті вивчаються дискретні нелінійні рівняння типу Клейна-Ґордона, які описують динаміку нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних осциляторів:

$$\ddot{q}_n - (\Delta q)_n + m^2 q_n + f(q_n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

де $q_n = q_n(t)$ — узагальнена координата n-го осцилятора в момент часу t, $(\Delta q)_n = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n$ — одновимірний дискретний оператор Лапласа, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ калібровно інваріантна функція, тобто

$$f\left(e^{i\omega t} z\right) = e^{i\omega t} f(z)$$

для всіх $\omega \in \mathbb{R}$. Припустимо, що $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь.

Ця стаття присвячена *насичуваним* нелінійностям $f(z)$. Це означає, що на нескінченності $f(z)$ росте як $const \cdot |z|$. Прикладом таких нелінійностей є

$$f(u) = \frac{\nu |u|^p}{1 + \mu |u|^p} u, \ \mu > 0, \nu > 0, \ p > 1.$$

Будемо шукати розв'язки системи (1) у вигляді стоячих хвиль

$$q_n(t) = u_n \exp(-i\omega t), \tag{2}$$

де $(u_n) \subset \mathbb{R}$ називається амплітудою стоячої хвилі, а $\omega \in \mathbb{R}$ — частотою. Такі розв'язки іноді називають бризерами або лакунарними солітонами.

Підставляючи стоячу хвилю (2) в рівняння (1), одержуємо систему

$$(Lu)_n + \omega^2 u_n = f(u_n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

де $(Lu)_n = (\Delta u)_n - m^2 u_n$.

Будемо вивчати стоячі хвилі двох видів: з k -періодичною амплітудою та амплітудою, яка збігається до нуля (локалізовані хвилі), тобто

$$u_{n+k} = u_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

де k — деяке натуральне число, то

$$\lim_{n \to \pm\infty} u_n = 0 \tag{5}$$

відповідно.

Нехай $F(t)$ первісна функція для функції $f(t)$, тобто $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds.$ Тоді всюди далі припустимо, що виконуються такі умови:

(i) $f(t) = o(t),\ t \to 0;$

(ii) $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \dfrac{f(t)}{t} = l < \infty;$

(iii) $f \in C^1(\mathbb{R})$ i $f(t)t < f'(t)t^2,\ t \neq 0;$

(iv) $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \left(\dfrac{1}{2} f(t)t - F(t) \right) = \infty.$

2. Варіаційне формулювання задачі. З системою (3) пов'язується функціонал

$$J(u) = \frac{1}{2}\left(Lu + \omega^2 u,\, u\right) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(u_n),$$

визначений на гільбертовому просторі $l^2 = l^2(\mathbb{Z})$ зі скалярним добутком $(u,\, v) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} u_n v_n$ та нормою $\|u\| = \left(\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Зазначимо, що кожний елемент простору l^2 автоматично задовольняє умову (5).

Нехай $k \geq 2$ — натуральне число. Тоді через l_k^2 позначимо простір всіх k -періодичних послідовностей $\{u_n\}$, які задовольняють умову (4). Це скінченновимірний простір зі скалярним добутком $(u,\, v)_k = \sum\limits_{n \in Q_k} u_n v_n$ та нормою $\|u\|_k = \left(\sum\limits_{n \in Q_k} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, де $Q_k = \left\{ n \in \mathbb{Z} : -\left[\dfrac{k}{2}\right] \leq n \leq k - \left[\dfrac{k}{2}\right] - 1 \right\}$, $\left[\dfrac{k}{2}\right]$ — ціла частина $\dfrac{k}{2}.$ На просторі l_k^2 розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \frac{1}{2}\left(L_k u + \omega^2 u,\, u\right)_k - \sum_{n \in Q_k} F(u_n),$$

де L_k — оператор L, який діє в просторі l_k^2.

Іноді ми також будемо розглядати простори l^p та l_k^p ($1 \le p \le \infty$) з нормами

$$\|u\|_{l^p} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|u\|_{l_k^p} = \left(\sum_{n \in Q_k} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

з відомою зміною при $p = \infty$. Нагадаємо, що при $1 \le p \le q \le \infty$

$$\|u\|_{l^q} \le \|u\|_{l^p},\ \|u\|_{l_k^q} \le \|u\|_{l_k^p}. \tag{6}$$

Зауваження 1. Оператор L є обмеженим і самоспряженим у просторі l^2, а його спектр збігається з відрізком $\left[-m^2 - 4,\, -m^2\right]$ і є абсолютно неперервним. Причому за виконання умов (i), (ii) функція $\frac{f(t)}{|t|}$ строго зростаюча, тоді як функція $\frac{1}{2} f(t)t - F(t)$ строго зростає при $t \ge 0$ і строго спадає при $t \le 0$, а отже, є невід’ємною.

Безпосереднім обчисленням одержуємо:

Лема 1. За зроблених припущень функціонали J_k та J належать класу C^1, а їх похідні визначаються формулами

$$\left\langle J_k'(u),\, h\right\rangle = \left(L_k u + \omega^2 u,\, h\right)_k - \sum_{n \in Q_k} f(u_n) h_n,\ u,\, h \in l_k^2, \tag{7}$$

$$\left\langle J'(u),\, h\right\rangle = \left(Lu + \omega^2 u,\, h\right) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(u_n) h_n,\ u,\, h \in l^2. \tag{8}$$

Крім того, критичні точки J_k та J є розв’язками рівняння (3), що задовольняють відповідно умови (4) та (5).

3. Многовиди Нехарі. Попередні леми. Для функціоналів J_k та J означимо відповідні *многовиди Нехарі*

$$N_k := \left\{u \in l_k^2 \mid \left\langle J_k'(u),\, u\right\rangle = 0,\ u \ne 0\right\} \subset l_k^2$$

та

$$N := \left\{ u \in l^2 \mid \left\langle J'(u), u \right\rangle = 0,\ u \neq 0 \right\} \subset l^2.$$

Введемо позначення $I_k(u) := \left\langle J_k'(u), u \right\rangle$ та $I(u) := \left\langle J'(u), u \right\rangle$. Це C^1-функціонали, похідні яких визначаються формулами

$$\left\langle I_k'(u), h \right\rangle = 2\left(L_k u + \omega^2 u, h \right)_k - \sum_{n \in Q_k} \left(f(u_n) + f'(u_n) u_n \right) h_n , \qquad (9)$$

$$\left\langle I'(u), h \right\rangle = 2\left(Lu + \omega^2 u, h \right) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(f(u_n) + f'(u_n) u_n \right) h_n . \qquad (10)$$

Лема 2. Нехай виконуються умови $(i)-(iii)$, $\omega^2 > m^2 + 4$ та $\omega^2 - l < m^2 + 4$. Тоді множини N_k та N є непорожніми замкненими C^1-підмноговидами відповідно у просторах l_k^2 та l^2, на яких $I_k'(u) \neq 0$ та $I'(u) \neq 0$. Крім того, існує $\beta_0 > 0$, яке не залежить від k і таке, що $\|u\|_k \geq \beta_0$, $u \in N_k$, та $\|u\| \geq \beta_0$, $u \in N$.

Доведення. Розглянемо випадок N_k (інший випадок аналогічний). Спочатку покажемо, що многовид N_k непорожній. Нехай $\delta \in \left(\omega^2, l + m^2 + 4 \right)$ і E_δ — спектральний підпростір оператора $L_k + \omega^2$ в просторі l_k^2, що відповідає відрізку $[0, \delta]$. Оскільки $\omega^2 \in \sigma\left(L_k + \omega^2 \right)$, то $E_\delta \neq \{0\}$. Нехай $v \in E_\delta \setminus \{0\}$. За умовою (i)

$$\left\langle J_k'(tv), tv \right\rangle = t^2 \left(L_k v + \omega^2 v, v \right)_k - \sum_{n \in Q_k} f(tv_n) tv_n =$$

$$= t^2 \left(L_k v + \omega^2 v, v \right)_k - o\left(t^2 \right) > 0$$

для достатньо малих $t > 0$. З іншого боку,

$$\left\langle J_k'(tv), tv \right\rangle = t^2 \left(L_k v + \omega^2 v, v \right)_k - \sum_{n \in Q_k} f(tv_n) tv_n \leq$$

$$\leq t^2 \left(\delta \|v\|_k^2 - \sum_{n \in Q_k} \frac{f(tv_n) v_n^2}{tv_n} \right).$$

За умовою (ii) сума в дужках збігається до $l\|v\|_k^2$, а тому $\left\langle J_k'(tv), tv \right\rangle < 0$ для достатньо великих $t > 0$. Тоді існує $t^* > 0$ таке, що $\left\langle J_k'(t^* v), t^* v \right\rangle = 0$ і $t^* v \in N_k$. Отже, $N_k \neq \varnothing$.

Нехай $u \in N_k$, тоді з рівностей (7), (9) та означення N_k, одержуємо

$$\left\langle I_k'(u), u\right\rangle = \left\langle I_k'(u), u\right\rangle - 2I_k(u) = \sum_{n\in Q_k}\left(f(u_n)u_n - f'(u_n)u_n^2\right).$$

За умовою (iii) ця сума є від'ємною. Тому $I_k'(u)\neq 0$ і за теоремою про неявну функцію (див. [3], Теорема 4.2.1), N_k є C^1-підмноговидом в просторі l_k^2. Замкненість N_k очевидна.

Перейдемо тепер до другої частини леми. Нехай $\varphi(r)=\sup\limits_{|t|\le r}\dfrac{f(t)}{t}$.

Це зростаюча функція від $r\ge 0$ і, згідно (i), $\varphi(r)\to 0$ при $r\to 0$. Нехай $u\in N_k$. Зазначимо, що оператор $L_k+\omega^2$ додатно визначений. Тоді з означення многовиду Нехарі і нерівностей (6) маємо

$$\omega^2\|u\|_k^2 \le \left(L_k u+\omega^2 u, u\right)_k = \sum_{n\in Q_k} f(u_n)u_n \le$$

$$\le \varphi\left(\|u\|_{l_k^\infty}\right)\cdot\|u\|_k^2 \le \varphi\left(\|u\|_k\right)\cdot\|u\|_k^2 .$$

А це означає, що $\varphi\left(\|u\|_k\right)\ge\omega^2$. Оскільки функція φ зростаюча, то знайдеться $\beta_0>0$ таке, що $\|u\|_k\ge\beta_0$, $u\in N_k$. **Лему доведено.**

З доведення леми 2 випливає:

Наслідок 1. Якщо $I_k(v)\le 0$ (відповідно $I(v)\le 0$), то існує єдине $t^*\in(0,1]$ таке, що $t^*v\in N_k$ (відповідно $t^*v\in N$), а також існує таке $v\in E_k\setminus\{0\}$ (відповідно $v\in E\setminus\{0\}$), що $J_k(v)<0$ (відповідно $J(v)<0$).

З означень J_k та I_k випливає, що на N_k

$$J_k(u)=J_k(u)-\frac{1}{2}I_k(u)=\sum_{n\in Q_k}\left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n-F(u_n)\right). \tag{11}$$

За умовою (iii) $J_k(u)\ge 0$, $u\in N_k$. Аналогічно, з означень J та I випливає, що на N_k

$$J(u)=J(u)-\frac{1}{2}I(u)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{2}f(u_n)u_n-F(u_n)\right) \tag{12}$$

та $J(u)\ge 0$, $u\in N$.

Лема 3. Нехай виконуються умови $(i)-(iii)$, $\omega^2>m^2+4$ та $\omega^2-l<m^2+4$. Тоді існує таке число $\alpha_0=\alpha_0(k)>0$, що $J_k(u)\ge\alpha_0$ для всіх $u\in N_k$.

Доведення. Нехай $u \in N_k$, тоді має місце рівність (11). За лемою 2, $\|u\|_k \ge \beta_0 > 0$. Отже, існують $n_0 \in Q_k$ (залежне від u) і $\delta_0 = \delta_0(k, \beta_0) > 0$ (незалежне від u) такі, що $|u_{n_0}| \ge \delta_0$. Тоді, поклавши $\alpha_0 = \frac{1}{2} f(\delta_0)\delta_0 - F(\delta_0)$, за зауваженням 1 маємо, що $J_k(u) \ge \alpha_0$ для $u \in N_k$. **Лему доведено.**

Тепер розглянемо дві задачі мінімізації

$$\inf\left\{J_k(u) : u \in N_k\right\} =: m_k, \tag{13}$$

$$\inf\left\{J(u) : u \in N\right\} =: \bar{m}. \tag{14}$$

Виявляється, що розв'язки цих задач є розв'язками системи (3) у відповідних просторах.

Лема 4. Нехай виконуються умови $(i)-(iii)$, $\omega^2 > m^2 + 4$ та $\omega^2 - l < m^2 + 4$. Тоді розв'язки задач (13) і (14) є розв'язками рівняння (3) в просторах l_k^2 та l^2 відповідно.

Доведення. Розглянемо випадок задачі (14), інший випадок аналогічний. Нехай $u \in N$ розв'язок задачі мінімізації (14). Згідно методу множників Лагранжа (див. [3]), існує $\lambda \in \mathbb{R}$ таке, що

$$J'(u) + \lambda I'(u) = 0.$$

Оскільки $\langle J'(u), u\rangle = I(u) = 0$, то, враховуючи рівність (10), одержуємо

$$0 = \lambda \langle I'(u), u\rangle = \lambda \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} f(u_n)u_n - F(u_n)\right).$$

За умовою (*iii*) сума в правій частині останньої рівності від'ємна і, отже, $\lambda = 0$, що й доводить лему.

Лема 5. Нехай виконуються умови $(i)-(iv)$, $\omega^2 > m^2 + 4$ та $\omega^2 - l < m^2 + 4$. Тоді задача (13) має розв'язок.

Доведення. Нехай $\{u^j\} \subset N_k$ — мінімізуюча послідовність для J_k, тобто $J_k(u^j) \to m_k$. З рівності (11) маємо

$$J_k(u^j) = \sum_{n\in Q_k} \left(\frac{1}{2} f(u_n^j)u_n^j - F(u_n^j)\right). \tag{15}$$

Покажемо, що послідовність $\{u^j\}$ обмежена в l_k^2. Припустимо протилежне. Оскільки простір l_k^2 скінченновимірний, а l^∞-норма еквівалентна евклідовій нормі на l_k^2, то, переходячи до підпослідовності, маємо, що $\left\| u^j \right\|_{l^\infty} \to \infty$. Тоді, для наступної підпослідовності, для якої збережемо теж саме позначення $\left\{ u^j \right\}$, існує $n_0 \in Q_k$ таке, що $u_{n_0}^j \to \infty$. Тоді за рівністю (15), враховуючи умову (iv), це означає, що $J_k\left(u^j \right) \to \infty$. Отримали суперечність, оскільки $J_k\left(u^j \right) \to m_k$ і, отже, послідовність $\left\{ u^j \right\}$ обмежена.

Оскільки l_k^2 скінченновимірний простір та $\{u^j\}$ обмежена послідовність, то, переходячи до підпослідовності, ми можемо вважати, що $\left\{ u^j \right\}$ збігається до $u \in l_k^2$. Але многовид Нехарі N_k замкнений і J_k неперервний функціонал, тому $u \in N_k$ і $J_k(u) = m_k$. **Лему доведено.**

4. Основні результати.

4.1. Існування періодичних розв'язків. Основним результатом цього пункту є теорема:

Теорема 1. Нехай виконуються умови $(i)-(iv)$, $\omega^2 > m^2 + 4$ та $\omega^2 - l < m^2 + 4$. Тоді для будь-якого $k \ge 2$ рівняння (3) має нетривіальний k-періодичний розв'язок $u \in l_k^2$. Більше того, якщо функція f непарна, то рівняння (3) має два нетривіальні розв'язки $\pm u \in l_k^2$, один з яких невід'ємний.

Доведення. Існування нетривіального k-періодичного розв'язку $u \in l_k^2$ випливає з леми 5.

Нехай f непарна функція. Тоді F парна і очевидно, що рівняння (3) має два нетривіальні розв'язки $\pm u \in l_k^2$. Легко бачити, що

$$\left(L|u|, |u| \right)_k \le \left(Lu, u \right)_k .$$

Крім того, $f\left(|t|\right)|t| = f(t)t$ та $F\left(|t|\right) = F(t)$. А це означає, що

$$I_k\left(|u|\right) \le I_k(u) = 0 .$$

З іншого боку,

$$\sum_{n \in Q_k} \left(\frac{1}{2} f\left(\left|u_n\right|\right)\left|u_n\right| - F\left(\left|u_n\right|\right) \right) = \sum_{n \in Q_k} \left(\frac{1}{2} f\left(u_n\right)u_n - F\left(u_n\right) \right) = m_k .$$

За наслідком 1, існує $t^* \in (0, 1]$ таке, що $u^* = t^*|u| \in N_k$. Тоді за зауваженням 1 та рівністю (11), маємо

$$J_k\left(u^*\right) \leq \sum_{n\in Q_k}\left(\frac{1}{2}f\left(u_n\right)u_n - F\left(u_n\right)\right) = m_k .$$

Таким чином, $J_k\left(u^*\right) = m_k$ та u^* невід’ємний розв’язок, і, отже, можна взяти $u = u^*$. **Теорему доведено.**

4.2. Існування локалізованих розв’язків. Аналогічну лему до леми 5 для задачі (14) довести складно. Тому для одержання l^2-розв’язку рівняння (3) ми перейдемо до границі при $k \to \infty$. Для цього знадобиться лема:

Лема 6. Нехай виконуються умови $(i)-(iv)$, $\omega^2 > m^2 + 4$ та $\omega^2 - l < m^2 + 4$. І нехай u^k — k-періодичний розв’язок задачі (13). Тоді послідовності $\{m_k\} = \left\{J_k\left(u^k\right)\right\}$ та $\left\{\left\|u^k\right\|_k\right\}$ обмежені.

Доведення. *Крок 1.* Спочатку нагадаємо, що спектр оператора L абсолютно неперервний і збігається з відрізком $\left[-m^2 - 4, -m^2\right]$. А отже, для будь-якого $\delta \in \left(\omega^2, l + m^2 + 4\right)$ спектральний підпростір оператора $L + \omega^2$ в просторі l^2, що відповідає відрізку $[0, \delta]$, ненульовий. Нехай $w \neq 0$ довільний вектор з цього підпростору. Тоді маємо

$$\begin{aligned} I(tw) = \left\langle J'(tw), tw\right\rangle = t^2\left(Lw + \omega^2 w, w\right) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(tw_n\right)tw_n \leq \\ \leq t^2\left(\delta\left\|w\right\|^2 - \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{f\left(tw_n\right)}{tw_n}w_n^2\right). \end{aligned} \tag{16}$$

За умовами (i) та (ii) існує стала $C > 0$, яка не залежить від n і t, і така, що

$$\left|\frac{f\left(tw_n\right)}{tw_n}\right| \leq C$$

для всіх $n \in \mathbb{Z}$ і $t \in \mathbb{R}$. Отже, ряд в правій частині нерівності (16) збігається рівномірно по відношенню до $t \in \mathbb{R}$. Тому, згідно умови (ii), сума цього ряду збігається до $l\left\|w\right\|^2$, і нерівність (16) означає, що $I(tw) < 0$ для всіх достатньо великих $t > 0$. Зафіксуємо довільне t з такою властивістю. Оскільки послідовності зі скінченним носієм щільні в l^2, то існує вектор $\tilde{w} \in l^2$ зі скінченним носієм достатньо близький до tw і такий, що $I(\tilde{w})<0$. За наслідком 1 існує $t^{*}\in(0,1)$ таке, що $I(v)=0$, де $v=t^{*}\tilde{w}$. Оскільки v має скінченний носій, то $\operatorname{supp} v\subset Q_k$ для всіх достатньо великих k. Тоді для будь-якого такого k нехай $v^k\in l_k^2$ єдиний елемент такий, що $v_n^k=v_n$ для $n\in Q_k$. Легко бачити, що $I_k\left(v^k\right)=I(v)=0$ та $m_k\le J_k\left(v^k\right)=J(v)$. Отже, послідовність $\{m_k\}$ обмежена.

Крок 2. Методом від супротивного доведемо, що $\left\{\left\|u^k\right\|_k\right\}$ також обмежена. Припустимо, що $\left\{\left\|u^k\right\|_k\right\}$ необмежена. Тоді, переходячи до підпослідовності (яку будемо так само позначати), можна вважати, що $\left\|u^k\right\|_k\to\infty$. Візьмемо $v^k=\dfrac{u^k}{\left\|u^k\right\|_k}$, тоді $\left\|v^k\right\|_k=1$ та виконується одна з таких двох умов:

(a) послідовність $\left\{v^k\right\}$ задовольняє умову $\left\|v^k\right\|_{l_k^\infty}=\left\|u^k\right\|_{l^\infty}\to 0$ при $k\to\infty$;

(b) існують такі $\delta>0$ та $x_k\in\mathbb{Z}$, що $\left|v_{x_k}^k\right|\ge\delta$ для всіх k.

Розглянемо перший випадок (умова (a)). Оскільки оператор L невід’ємний та

$$0=\frac{1}{\left\|u^k\right\|_k^2}I_k\left(u^k\right)=\left(L_k v^k+\omega^2 v^k,\, v^k\right)_k-\sum_{n\in Q_k}\frac{f\left(u_n^k\right)}{u_n^k}\left(v_n^k\right)^2,$$

то

$$\omega^2=\omega^2\left\|v^k\right\|_k^2\le\left(L_k v^k+\omega^2 v^k,\, v^k\right)_k=\sum_{n\in Q_k}\frac{f\left(u_n^k\right)}{u_n^k}\left(v_n^k\right)^2. \qquad (17)$$

За умовою (i) існує $t_0>0$ таке, що $\dfrac{f(t)}{t}\le\dfrac{\omega^2}{2}$ при $t<|t_0|$. Нехай

$$A_k=\left\{n\in Q_k:\left|u_n^k\right|<t_0\right\},$$

$$B_k=\left\{n\in Q_k:\left|u_n^k\right|\ge t_0\right\}.$$

Тоді

$$\sum_{n\in A_k}\frac{f\left(u_n^k\right)}{u_n^k}\left(v_n^k\right)^2\le\frac{\omega^2}{2}\sum_{n\in A_k}\left(v_n^k\right)^2\le\frac{\omega^2}{2}\left\|v^k\right\|_k^2=\frac{\omega^2}{2}.$$

Звідси, враховуючи нерівність (17), одержуємо

$$\liminf_{k\to\infty}\sum_{n\in B_k}\frac{f\left(u_n^k\right)}{u_n^k}\left(v_n^k\right)^2=\varliminf_{k\to\infty}\sum_{n\in B_k}\frac{f\left(u_n^k\right)}{u_n^k}\left(v_n^k\right)^2\ge\frac{\omega^2}{2}. \tag{18}$$

З іншого боку, $\left|f(t)\right|\le C_0\left|u\right|$ з деякою сталою $C_0>0$ і за нерівністю Гельдера

$$\sum_{n\in B_k}\frac{f\left(u_n^k\right)}{u_n^k}\left(v_n^k\right)^2\le C_0\left|B_k\right|^{\frac{p-2}{p}}\left\|v^k\right\|_{l_k^p}^{\frac{2}{p}} \tag{19}$$

для будь-якого $p>2$, де $\left|B_k\right|$ — кількість елементів множини B_k. Легко перевірити, що

$$\left\|w\right\|_{l_k^p}\le\left\|w\right\|_{l_k^\infty}^{\frac{p-2}{p}}\left\|w\right\|_k^{\frac{2}{p}}. \tag{20}$$

Тоді оскільки $\left\|v^k\right\|_{l_k^\infty}\to 0$, то нерівності (18), (19) і (20) показують, що $\left|B_k\right|\to\infty$. Нехай $\alpha_0=\min\left\{\frac{1}{2}f\left(\pm t_0\right)\left(\pm t_0\right)-F\left(\pm t_0\right)\right\}$. Тоді з рівності (12) та зауваження 1 маємо

$$m_k=\sum_{n\in Q_k}\left(\frac{1}{2}f\left(u_n\right)u_n-F\left(u_n\right)\right)\ge\sum_{n\in B_k}\left(\frac{1}{2}f\left(u_n\right)u_n-F\left(u_n\right)\right)\ge\alpha_0\left|B_k\right|\to\infty.$$

Отримали суперечність.

Розглянемо другий випадок (умова (b)). Згідно інваріантності рівняння (3) відносно дискретних зсувів, кратних k, можна вважати, що $x_k=0$. Оскільки $\left\|v^k\right\|_k=1$, то можна також вважати, що знайдеться елемент $v=\left\{v_n\right\}$ такий, що $v_n^k\to v_n$ для всіх $n\in\mathbb{Z}$ (переходячи до підпослідовності, якщо потрібно). Крім того, очевидно, що $v\in l^2$, $\left\|v\right\|\le 1$ і $\left|v_0\right|\ge\delta$. Отже, $v\ne 0$.

Оскільки u^k — k-періодичний розв'язок рівняння (3), то

$$Lv_n^k-\left(l-\omega^2\right)v_n^k=\frac{g\left(u_n^k\right)}{\left\|u^k\right\|_k}, \tag{21}$$

де $g(t)=f(t)-lt$ і за умовою (ii) $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\frac{g(t)}{t}=0.$ Якщо $v_n\neq 0$ для деяких $n\in\mathbb{Z}$, то $\left|u_n^k\right|\to\infty$. Переходячи до границі в рівності (21) при $k\to\infty$, маємо

$$Lv_n-\left(l-\omega^2\right)v_n=0,$$

тобто $v\in l^2$ — ненульовий власний вектор оператора L з власним значенням $l-\omega^2$. Але спектр оператора L в просторі l^2 є абсолютно неперервним. Знову отримали суперечність. Отже, послідовність $\left\{\left\|u^k\right\|_k\right\}$ обмежена. **Лему доведено.**

Основним результатом цього пункту є теорема:

Теорема 2. Нехай виконуються умови $(i)-(iv)$, $\omega^2>m^2+4$ та $\omega^2-l<m^2+4$. Тоді рівняння (3) має нетривіальний розв'язок $u\in l^2$. Більше того, якщо функція f непарна, то рівняння (3) має два нетривіальні розв'язки $\pm u\in l^2$, один з яких невід'ємний.

Доведення. Нехай $u^k\in l_k^2$ розв'язок рівняння (3). Тоді за лемою 6 послідовність $\left\{\left\|u^k\right\|_k\right\}$ обмежена та $\left\{u^k\right\}$ задовольняє одну з двох умов (a) або (b). В першому випадку нерівність (20) означає, що $\left\|u^k\right\|_{l_k^p}\to 0$ при $k\to\infty$ для будь-якого $p>2.$ За умовою (i) для кожного $\varepsilon>0$ знайдеться $C_\varepsilon>0$ таке, що

$$\left|f(t)\right|\le\varepsilon|t|+C_\varepsilon|t|^{p-1}.$$

Оскільки u^k — k-періодичний розв'язок рівняння (3), то

$$\omega^2\left\|u^k\right\|_k^2\le\left(L_ku^k+\omega^2u^k,\,u^k\right)_k=\sum_{n\in Q_k}f\left(u_n^k\right)u_n^k\le\varepsilon\left\|u^k\right\|_k^2+C_\varepsilon\left\|u^k\right\|_{l_k^p}^p.$$

Поклавши $\varepsilon=\frac{\omega^2}{2}$, одержуємо

$$\frac{\omega^2}{2}\left\|u^k\right\|_k^2\le C_\varepsilon\left\|u^k\right\|_{l_k^p}^p\to 0$$

при $k\to\infty$. А це суперечить лемі 2 і, отже, виконання умови (a) неможливе.

Таким чином, виконується умова (b). Переходячи до підпослідовності і використовуючи інваріантність дискретних зсувів можна вважати, що $\left|u_0^k\right| \geq \delta$ з деяким $\delta > 0$. Переходячи знову до підпослідовності, ми також можемо вважати, що існує послідовність $u = \{u_n\}$ така, що $u_n^k \to u_n$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$. Легко бачити, що $u \in l^2$ та $u \neq 0$. Крім того, для рівняння (3) маємо поточкову збіжність і, отже, $u \in l^2$ — його нетривіальний розв'язок.

Друга частина теореми випливає з теореми 1. **Теорему доведено.**

Зауваження 2. Можна показати, що за виконання умов теореми 2, $m_k \to \bar{m}$. Крім того, розв'язок $u \in l^2$, одержаний у цій теоремі, є розв'язком задачі мінімізації (14), тобто $J(u) = \bar{m}$.

Висновки. У цій статті одержано результат про існування стоячих хвиль в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона із насичуваними нелінійностями.

Список використаних джерел:

1. Bak S. M. Peridoc traveling waves in chains of oscillators. *Communications in Mathematical Analysis.* 2007. Vol. 3, № 1. P. 19-26.
2. Bak S., Kovtonyuk G. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis.* 2019. Vol. 22, № 2. P. 18-34.
3. Drabek P., Milota J. Methods of nonlinear analysis. Applications to differential equations. Basel: Birkhäuser, 2007. 568 p.
4. Friesecke G., Wattis J. A. D. Existence theorem for solitary waves on lattices. *Commun. Math. Phys.* 1994. Vol. 161. P. 391-418.
5. Ghimenti M., Le Coz S., Squassina M. On the stability of standing waves of Klein-Gordon equations in a semiclassical regime. *Discr. Cont. Dyn. Sys.* 2013. Vol. 33, № 6. P. 2389-2401.
6. Iooss G., Kirschgässner K. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators. *Commun. Math. Phys.* 2000. Vol. 211. P. 439-464.
7. Iooss G., Pelinovsky D. Normal form for travelling kinks in discrete Klein-Gordon lattices. *Physica D.* 2006. Vol. 216. P. 327-345.
8. Kreiner C. F., Zimmer J. Heteroclinic travelling waves for the lattice sine–Gordon equation with linear pair interaction. *Discrete and continuous dynamical systems.* 2009. Vol. 25, № 3 (November). P. 915-931.
9. Morgante A. M., Johansson M., Kopidakis G., Aubry S. Standing waves in 1D nonlinear lattices. Nonlinear and Disorder: Theory and Applications. *Kluwer Academic Publishers.* 2001. P. 205-211.
10. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations. *Nonlinearity.* 2006. Vol. 19. P. 27-40.

11. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete nonlinear Shrödinger equation, II: Generalized Nehari manifold approach. *Discr. Cont. Dyn. Syst. A.* 2007. Vol. 19, № 2. P. 419-430.
12. Pankov A., Rothos V. Periodic and decaying solutions in DNLS with saturable nonlinearity. *Proc. Royal Society A.* 2008. Vol. 464. P. 3219-3236.
13. Бак С. М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів. *Математичні студії.* 2006. Т. 26, № 2. С. 140-153.
14. Бак С. М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль у системі осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* 2014. Т. 57, №3. С. 45-52.
15. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. 2017. Вип. 16. С. 21-29.
16. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю. *Математичні студії.* 2010. Т. 33, №1. С. 78-84.
17. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні sin-Ґордона на двовимірній ґратці. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць, 2013. Вип. 9. С. 5-10.
18. Бак С. Н., Панков А. А. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках. *Український математичний вісник.* 2010. Т. 7, № 2. С. 154-175.

STANDING WAVES IN DISCRETE KLEIN-GORDON TYPE EQUATIONS WITH SATURABLE NONLINEARITIES

This article is devoted to the study of discrete Klein-Gordon type equations that describe the dynamics of infinite chains of linearly coupled nonlinear oscillators. Such equations are infinite systems of ordinary differential equations. Equations of this type with saturable nonlinearities are studied. For such equations, results on the existence of solutions in the form of standing waves are obtained. After substituting the ansatz in the form of a standing wave into this system, a system of algebraic equations for the amplitude of a standing wave is obtained. Two types of solutions are studied: periodic (with a period k) and localized (converging to zero at infinity). These equations have a variational structure. Therefore, it is shown that *k*-periodic and localized solutions can be constructed as critical points of some two functionals in the corresponding spaces of two-sided sequences. Next, we consider the Nehari manifolds for the corresponding variational problems. These manifolds contain nontrivial critical points of these functionals. It is shown that the Nehari manifolds are non-empty and closed submanifolds of the corresponding spaces of two-sided sequences. In addition, the corresponding problems of minimizing these functionals are considered. It is shown that on the Nehari manifold for the first functional the corresponding minimization problem has a solution under certain conditions. Therefore, under these conditions, the original equation has nontrivial *k*-periodic solutions. In the case of localized solutions, it is difficult to prove that the corresponding minimization problem has a solution on the corresponding

Nehari manifold. Therefore, in this case, the method of periodic approximations is used, i.e., the critical points of the functional that corresponds to localized solutions are constructed using the passage to the limit (with a period k tending to infinity) at the critical points of the functional that corresponds to k-periodic solutions. The obtained localized solutions are the solutions of the corresponding minimization problem.

Key words: *discrete Klein-Gordon type equations, standing waves, critical points, Nehari manifold.*

Отримано: 19.10.2021

УДК 004.942:519.876.5
DOI: 10.32626/2308-5878.2021-22.19-26

А. Ф. Верлань*, д-р техн. наук, професор,
В. А. Федорчук**, д-р техн. наук, професор

*Інститут проблем моделювання в енергетиці імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ,
**Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЛЯ ЗАДАЧІ ВІДНОВЛЕННЯ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ТЕПЛОВИХ ДЖЕРЕЛ

Стаття присвячена проблемі отримання інтегральних математичних моделей теплових об'єктів з вихідного рівняння теплопровідності, що подано у диференціальній формі. Розглядається випадок оберненої задачі для рівняння теплопровідності, яка є некоректною. При розв'язуванні як прямих, так і обернених задач динаміки з використанням обчислювальних методів важливе значення має вибір форми математичного опису моделі. Навіть моделі, які отримані з вихідних моделей в результаті еквівалентних перетворень при числовій реалізації видають нееквівалентні розв'язки. Тому для розв'язування обернених задач динаміки доцільно використовувати інтегральні математичні моделі, які володіють високою обчислювальною стійкістю. В інтегральній постановці такі некоректні обернені задачі успішно розв'язуються за допомогою методів регуляризації. У статті розглянуто два варіанти оберненої задачі. В першому варіанті зворотна задача розглядається в постановці Діріхле, а в другому варіанті розглядається задача Неймана. В обох варіантах зворотні задачі, що подані в диференціальній формі шляхом еквівалентних перетворень подаються у вигляді інтегральних рівнянь першого роду. Для отриманих інтегральних моделей показано, що розв'язки рівнянь єдині. Перевагою отриманих інтегральних моделей є їх