with a system of spatially distributed nanoclusters on the surface. The results of CA-modeling are presented and it is shown that the asynchronous cellular automaton developed in the presented work allows modeling a chemical reaction, including recombination of atoms, on the surface of a nanocatalyst with spatially distributed nanoclusters on the surface. The constructed CA-model describes the kinetics of the process in real physical time and uses physical cross sections and interaction constants.

Key words: *Von Neumann cellular automaton, cellular automaton model, Monte Carlo method, asynchronous cellular automata, nanocatalyst, diffusion.*

Отримано: 29.10.2021

УДК 517.5
DOI: 10.32626/2308-5878.2021-22.38-54

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,
В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ОДНОЧАСНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ВІДШУКАННЯ ВІДСТАНІ МІЖ ОПУКЛИМ МНОГОГРАННИКОМ І СКІНЧЕННОВИМІРНИМ ПІДПРОСТОРОМ ЛІНІЙНОГО НОРМОВАНОГО ПРОСТОРУ ТА ДВОЇСТОЇ ДО НЕЇ ЗАДАЧІ

Відомо, що одним із напрямів математики, який найбільш інтенсивно розвивається в даний час, є теорія наближень, у тому числі теорія наближень функцій, яка має своїм початком задачу П. Л. Чебишова про рівномірне (чебишовське) наближення неперервної на відрізку дійснозначної функції множиною алгебраїчних многочленів степеня, що не перевищує n.

Пізніше розглядалась низка й інших постановок задач про найкраще наближення функцій, однією з яких є задача про рівномірне наближення неперервної на компакті функції скінченновимірним підпростором, породженим іншими неперервними на цьому компакті функціями.

Важливе місце в теорії наближення займає задача апроксимації фіксованого елемента лінійного нормованого простору елементами його скінченновимірного підпростору, частинними випадками якої є задачі, про які йшла мова вище.

Задачу апроксимації фіксованого елемента лінійного нормованого простору елементами його скінченновимірного підпростору можна розглядати як задачу відшукання найкращої відстані між фіксованою точкою та скінченновимірним підпростором.

Важливими питаннями розгляду цієї задачі є питання існування її екстремального елемента, встановлення співвідношення двоїстості та критерію екстремальності елемента, побудови чисельних методів відшукання цього елемента та величини найкращого наближення, які досліджувались багатьма математиками.

У статті розглядається задача відшукання відстані (найкращої) між опуклим многогранником і скінченновимірним підпростором лінійного нормованого простору, частинним випадком якої є задача найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору його скінченновимірним підпростором.

Для цієї задачі встановлено існування екстремального елемента, співвідношення двоїстості, критерій екстремальності елемента, побудовано збіжний чисельний метод одночасного розв'язування прямої та двоїстої задач, отримано двосторонні оцінки збіжності, які дозволяють знаходити відповідні величини з наперед заданою точністю.

Ключові слова: *лінійний нормований простір, відстань між опуклим многогранником і скінченновимірним підпростором, двоїста задача, чисельний метод.*

Вступ. У статті для задачі відшукання відстані (найкращої) між опуклим многогранником і скінченновимірним підпростором лінійного нормованого простору встановлено існування екстремального елемента, критерій екстремальності елемента, побудовано задачу, двоїсту до розглядуваної, розроблено збіжний чисельний метод розв'язування цих задач, оснований на ідеї методу січної площини розв'язування задачі опуклого програмування, отримано двосторонні оцінки збіжності.

Постановка задачі. ***Існування екстремального елемента.*** Нехай X — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір; X^* — простір, спряжений з X; $B^* = \left\{ f \in X^* : \| f \| \le 1 \right\}$; x_p, $p = \overline{1,r}$, — довільні елементи простору X; $A = co\{x_1, ..., x_r\}$ — опукла оболонка множини $\{x_1, ..., x_r\}$ ($A = \left\{ \sum_{p=1}^{r} \alpha_p x_p : \sum_{p=1}^{r} \alpha_p = 1, \alpha_p \ge 0, p = \overline{1,r} \right\}$ — опуклий многогранник простору X); $y_1, ..., y_n$ — лінійно незалежні елементи простору X, B — підпростір простору X, породжений цими елементами, тобто $B = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i : \beta_i \in R, i = \overline{1,n} \right\}$.

Задачею відшукання відстані (найкращої) між опуклим многогранником A та скінченновимірним підпростором B простору X будемо називати задачу відшукання величини

$$E(A,B)=\inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}}\|x-y\|=\inf_{\substack{\sum_{p=1}^{r}\alpha_p=1,\\ \alpha_p\ge 0,\, p=\overline{1,r};\\ \beta_i\in R,\, i=\overline{1,n}}}\left\|\sum_{p=1}^{r}\alpha_p x_p-\sum_{i=1}^{n}\beta_i y_i\right\| \qquad (1)$$

(див., наприклад, [1, с. 65]).

Якщо існує елемент $\left(x^*,y^*\right)\in A\times B$ такий, що

$$E(A,B)=\inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}}\|x-y\|=\left\|x^*-y^*\right\|,$$

то його будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Оскільки A є компактом простору X (див., наприклад, [2, с. 28]), а B є його скінченновимірним підпростором, то згідно з наслідком 3 [3] екстремальний елемент для задачі відшукання величини (1) існує.

Актуальність теми. Загальновідомо, що ідея наближення є визначальною ідеєю в питаннях зв'язків математики з практикою.

Центральною галуззю теорії наближення є теорія наближення функції, фундамент якої закладено у працях П. Л. Чебишова, який ще у 50-х роках 19 століття поставив задачу про найкраще рівномірне наближення неперервної на сегменті функції множиною алгебраїчних поліномів степення, що не перевищує деякого натурального числа.

З розвитком теорії лінійних нормованих просторів стало зрозумілим, що згадана вище задача П. Л. Чебишова та низка інших задач теорії наближення допускають загальну постановку в термінах нормованих просторів, якщо в якості міри відхилення розглядати норму простору.

Внаслідок цього було сформульовано, зокрема, задачу найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору скінченновимірним підпростором цього простору.

Ця задача є частинним випадком задачі (1), отримується з неї при $r=1$ та має вигляд

$$\mathrm{E}\left(x_1,B\right)=\inf_{y\in B}\left\|x_1-y\right\|=\inf_{\beta_i\in R,\, i=\overline{1,n}}\left\|x_1-\sum_{i=1}^{n}\beta_i y_i\right\|. \qquad (2)$$

Основні результати дослідження величини (2) підсумовані, зокрема, у монографіях Н. І. Ахієзера [4], В. К. Дзядика [5], М. П. Корнєйчука [6], О. І. Степанця [7, 8], В. М. Тихомирова [9] та ін.

Оскільки задача відшукання величини (2) є частковим випадком задачі відшукання величини (1), то становлять інтерес результати загального характеру, отримані при дослідженні задачі (1), які можуть бути відправним пунктом для подальшого дослідження задачі (2) та інших задач, що включаються у схему постановки задачі (1).

Актуальним, зокрема, є питання встановлення співвідношення двоїстості для задачі (1), критерію її екстремального елемента, побудови збіжного чисельного методу розв'язування задачі (1) та двоїстої до неї задачі тощо.

Мета роботи. Встановити для задачі відшукання величини (1) існування її екстремального елемента, його критерій, співвідношення двоїстості; побудувати збіжний чисельний метод розв'язання задачі (1) та двоїстої до неї задачі.

Співвідношення двоїстості для задачі відшукання величини (1). Задача, двоїста до задачі відшукання величини (1).

Теорема 1. Має місце співвідношення двоїстості

$$E\left(A,B\right)=\max_{\substack{f\left(y_i\right)=0,i=\overline{1,n},\\ f\in B^*}}\ \min_{1\le p\le r} f\left(x_p\right). \tag{3}$$

Доведення. Згідно з наслідком 3 [10]

$$E\left(A,B\right)=\max_{\substack{f\in B^*,\\ f\in B^{\perp}}}\inf_{x\in A} f\left(x\right), \tag{4}$$

де $B^{\perp}=\left\{f\in X^*: f\left(y\right)=0, y\in B\right\}$.

Оскільки A є компактом простору X, то для $f\in X^*$: $\inf\limits_{x\in A} f\left(x\right)=\min\limits_{x\in A} f\left(x\right)$.

З урахуванням цього та рівності (4) отримаємо, що

$$E\left(A,B\right)=\max_{\substack{f\in B^*,\\ f\in B^{\perp}}}\min_{x\in A} f\left(x\right). \tag{5}$$

Нехай $f\in B^{\perp}$. Оскільки $y_i\in B$, $i=\overline{1,n}$, то $f\left(y_i\right)=0$, $i=\overline{1,n}$.

Тому

$$B^{\perp}\subset\left\{f\in X^*: f\left(y_i\right)=0, i=\overline{1,n}\right\}. \tag{6}$$

Нехай тепер $f\in\left\{f\in X^*: f\left(y_i\right)=0, i=\overline{1,n}\right\}$. Тоді для будь-якого

$$y=\sum_{i=1}^{n}\beta_i y_i\in B,\ \beta_i\in R,\ i=\overline{1,n},$$

$$f\left(y\right)=f\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i y_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i f\left(y_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\cdot 0=0.$$

Тому

$$\left\{f\in X^*: f\left(y_i\right)=0, i=\overline{1,n}\right\}\subset B^{\perp}. \tag{7}$$

Зі співвідношень (6), (7) випливає, що

$$B^{\perp} = \left\{ f \in X^{*} : f\left(y_i\right) = 0, i = \overline{1,n} \right\}. \tag{8}$$

Крім того, для $x \in A$ маємо, що $x = \sum_{p=1}^{r} \alpha_p x_p$, $\sum_{p=1}^{r} \alpha_p = 1$, $\alpha_p \geq 0$, $p = \overline{1,r}$. Тому для $f \in X^{*}$

$$\min_{x \in A} f\left(x\right) = \min_{\substack{\sum_{p=1}^{r} \alpha_p = 1, \\ \alpha_p \geq 0,\, p = \overline{1,r}}} f\left(\sum_{p=1}^{r} \alpha_p x_p\right) = \min_{\substack{\sum_{p=1}^{r} \alpha_p = 1, \\ \alpha_p \geq 0,\, p = \overline{1,r}}} \sum_{p=1}^{r} \alpha_p f\left(x_p\right) \geq$$

$$\geq \min_{\substack{\sum_{p=1}^{r} \alpha_p = 1, \\ \alpha_p \geq 0,\, p = \overline{1,r}}} \sum_{p=1}^{r} \alpha_p \left(\min_{1 \leq p \leq r} f\left(x_p\right)\right) = \min_{1 \leq p \leq r} f\left(x_p\right).$$

Отже,

$$\min_{x \in A} f\left(x\right) \geq \min_{1 \leq p \leq r} f\left(x_p\right), \ f \in X^{*}. \tag{9}$$

З іншого боку, нехай для $f \in X^{*}$ $\min_{1 \leq p \leq r} f\left(x_p\right) = f\left(x_{p_f}\right)$, де $p_f \in \left\{1, ..., r\right\}$. Тоді

$$\min_{1 \leq p \leq r} f\left(x_p\right) = f\left(x_{p_f}\right) = f\left(\sum_{p=1}^{r} \bar{\alpha}_p x_p\right) \geq$$

$$\geq \min_{\substack{\sum_{p=1}^{r} \alpha_p = 1, \\ \alpha_p \geq 0,\, p = \overline{1,r}}} f\left(\sum_{p=1}^{r} \alpha_p x_p\right) = \min_{x \in A} f\left(x\right),$$

де $\bar{\alpha}_p = 0$, $p \neq p_f$; $\bar{\alpha}_{p_f} = 1$. Тому

$$\min_{1 \leq p \leq r} f\left(x_p\right) \geq \min_{x \in A} f\left(x\right). \tag{10}$$

Зі співвідношень (9), (10) випливає рівність

$$\min_{1 \leq p \leq r} f\left(x_p\right) = \min_{x \in A} f\left(x\right). \tag{11}$$

Рівності (5), (8), (11) дозволяють зробити висновок про справедливість рівності (3).

Задачу відшукання величини

$$\max_{\substack{f\left(y_i\right) = 0, 1 \leq i \leq n, \\ f \in B^{*}}} \min_{1 \leq p \leq r} f\left(x_p\right) \tag{12}$$

назвемо задачею, двоїстою до задачі відшукання величини (1).

Критерій екстремальності елемента для задачі відшукання величини (1).

Теорема 2. Для того щоб елемент $\left(x^*, y^*\right) \in A \times B$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо існування функціонала $f^* \in X^*$ такого, що

1) $\left\|f^*\right\| \leq 1$ ($f^* \in B^*$),

2) $f^*\left(x^* - y^*\right) = \left\|x^* - y^*\right\|$,

3) $f^*\left(x^*\right) = \min\limits_{1 \leq p \leq r} f^*\left(x_p\right)$,

4) $f^*\left(y_i\right) = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\left(x^*, y^*\right)$ є екстремальним елементом для величини (1). Згідно з наслідком 7 [10] існує функціонал $f^* \in X^*$, для якого виконуються умови 1), 2) та

$3'$) $f^*\left(x^*\right) = \inf\limits_{x \in A} f^*\left(x\right)$,

$4'$) $f^*\left(y\right) = 0$, $y \in B$.

Зі співвідношень (11) маємо, що $\inf\limits_{x \in A} f^*\left(x\right) = \min\limits_{1 \leq p \leq r} f^*\left(x_p\right)$. Звідси і $3'$) випливає 3).

Внаслідок (8) і $4'$) робимо висновок, що $f^*\left(y_i\right) = 0$, $i = \overline{1, n}$, тобто, що має місце 4).

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для $\left(x^*, y^*\right) \in A \times B$ існує елемент $f^* \in X^*$, для якого справедливі співвідношення 1)-4). З рівностей 3) та (11) випливає $3'$), а з 4) та (8) випливає $4'$). Оскільки мають місце співвідношення 1), 2), $3'$), $4'$), то згідно з наслідком 7 [10] $\left(x^*, y^*\right)$ є екстремальним елементом для величини (1).

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Чисельний метод одночасного розв’язування задач відшукання величин (1) та (12). Перейдемо до описання методу одночасного розв’язування задачі відшукання величини (1) та двоїстої до неї задачі відшукання величини (12). На попередньому кроці методу вибираємо функціонали $f_j \in B^*$, $j = \overline{1, m_1}$, для яких виконується умова:

$$\min\left\{\max_{1\le j\le m_1}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(-f_j\left(y_i\right)\right):\left(\beta_1,...,\beta_n\right)\in R^n,\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2=1\right\}=\bar{\mu}>0\,. \quad (13)$$

Існування таких функціоналів випливає із лінійної незалежності елементів $y_1,...,y_n$.

На *k*-му кроці ($k \ge 1$) будемо розв'язувати задачу лінійного програмування:

$$\inf\theta \quad (14)$$

$$\sum_{p=1}^{r}\alpha_p f_j\left(x_p\right)-\sum_{i=1}^{n}\beta_i f_j\left(y_i\right)-\theta\le 0\,,\ j=\overline{1,m_1+k-1}\,, \quad (15)$$

$$\sum_{p=1}^{r}\alpha_p=1\,, \quad (16)$$

$$\alpha_p\ge 0\,,\ p=\overline{1,r}\,;\ \beta_i\in R\,,\ i=\overline{1,n}\,, \quad (17)$$

та двоїсту до неї задачу лінійного програмування

$$\sup\gamma \quad (18)$$

$$\left(\sum_{s=1}^{m_1+k-1}\gamma_s f_s\right)\left(x_1\right)\ge\gamma\,, \quad (19)$$

$$\left(\sum_{s=1}^{m_1+k-1}\gamma_s f_s\right)\left(x_r\right)\ge\gamma\,,$$

$$\left(\sum_{s=1}^{m_1+k-1}\gamma_s f_s\right)\left(y_1\right)=0\,, \quad (20)$$

$$\left(\sum_{s=1}^{m_1+k-1}\gamma_s f_s\right)\left(y_n\right)=0\,,$$

$$\sum_{s=1}^{m_1+k-1}\gamma_s=1\,, \quad (21)$$

$$\gamma_s\ge 0, s=\overline{1,m_1+k-1}\,. \quad (22)$$

Переконаємося, що задачі (14)-(17) та (18)-(22) мають оптимальні розв'язки. Дійсно, задача лінійного програмування (14)-(17) має допустимий розв'язок. Таким допустимим розв'язком, зокрема, буде вектор $\left(\bar{\alpha}_1,...,\bar{\alpha}_r;\bar{\beta}_1,...,\bar{\beta}_n;\bar{\theta}\right)$, де координати вектора $\left(\bar{\alpha}_1,...,\bar{\alpha}_r\right)\in R^r$ вибрано так, що $\sum_{p=1}^{r} \bar{\alpha}_p = 1$, $\bar{\alpha}_p \geq 0$, $p = \overline{1,r}$; координати вектора $\left(\bar{\beta}_1, ..., \bar{\beta}_n\right) \in R^n$ вибрано довільно, а $\bar{\theta} = \max_{1 \leq j \leq m_1 + k - 1} \left(\sum_{p=1}^{r} \bar{\alpha}_p f_j\left(x_p\right) - \sum_{i=1}^{n} \bar{\beta}_i f_j\left(y_i\right) \right)$. Для всіх допустимих розв'язків $\left(\alpha_1, ..., \alpha_r; \beta_1, ..., \beta_n; \theta\right)$ задачі (14)-(17) маємо, що

$$\theta \geq \sum_{p=1}^{r} \alpha_p f_j\left(x_p\right) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_j\left(-y_i\right), \quad j = \overline{1, m_1}.$$

Звідси випливає, що при $\left(\beta_1, ..., \beta_n\right) \neq 0$

$$\theta \geq \min_{1 \leq j \leq m_1} \min_{1 \leq p \leq r} f_j\left(x_p\right) + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2}} f_j\left(-y_i\right),$$

$$j = \overline{1, m_1},$$

$$\theta \geq \min_{1 \leq j \leq m_1} \min_{1 \leq p \leq r} f_j\left(x_p\right) + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2} \max_{1 \leq j \leq m_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2}} f_j\left(-y_i\right). \qquad (23)$$

Згідно з (13) $\max_{1 \leq j \leq m_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2}} f_j\left(-y_i\right) \geq \bar{\mu} > 0$. З урахуванням цього та нерівності (23) робимо висновок, що $\theta \geq \min_{1 \leq j \leq m_1} \min_{1 \leq p \leq r} f_j\left(x_p\right)$ для будь-якого допустимого розв'язку $\left(\alpha_1, ..., \alpha_r; \beta_1, ..., \beta_n; \theta\right)$ задачі (14)-(17).

Це означає, що цільова функція θ задачі (14)-(17) лінійного програмування обмежена знизу на множині її допустимих розв'язків. Тому ця задача має оптимальний розв'язок (див., наприклад, [11, с. 134]). Тоді оптимальний розв'язок має також двоїста до неї задача (18)-(22) (див., наприклад, [11, с. 163]).

Теорема 3. Якщо $\left(\alpha^k, \beta^k, \theta^k\right) = \left(\alpha_1^{\ k}, ..., \alpha_r^{\ k}; \beta_1^{\ k}, ..., \beta_n^{\ k}; \theta^k\right)$ є оптимальним розв'язком задачі (14)-(17), то мають місце співвідношення

$$\theta^k \leq E\left(A, B\right) \leq \left\| \sum_{p=1}^{r} \alpha_p^{\ k} x_p - \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{\ k} y_i \right\|. \qquad (24)$$

Якщо для деякого натурального числа k $\theta^k = \left\| \sum_{p=1}^{r} \alpha_p{}^k x_p - \sum_{i=1}^{n} \beta_i^k y_i \right\|$, то елемент $\left(x^k, y^k\right)$, де $x^k = \sum_{p=1}^{r} \alpha_p^k x_p \in A$, $y^k = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^k y_i \in B$, є екстремальним елементом для величини (1) та справедлива рівність

$$\theta^k = E\left(A, B\right) = \left\| x^k - y^k \right\|. \tag{25}$$

Доведення. Оскільки вектор $\left(\alpha^k, \beta^k, \theta^k\right)$ є оптимальним розв’язком задачі (14)-(17), то

$$\theta^k = \inf \left\{ \theta : f_j\left(\sum_{p=1}^{r} \alpha_p x_p - \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i \right) \le \theta,\ j = \overline{1, m_1 + k - 1}, \right.$$

$$\left. \sum_{p=1}^{r} \alpha_p = 1,\ \alpha_p \ge 0,\ p = \overline{1, r},\ \beta_i \in R,\ i = \overline{1, n} \right\} =$$

$$= \max_{1 \le j \le m_1 + k - 1} f_j\left(\sum_{p=1}^{r} \alpha_p{}^k x_p - \sum_{i=1}^{n} \beta_i^k y_i \right) = \max_{1 \le j \le m_1 + k - 1} f_j\left(x^k - y^k\right) \le$$

$$\le \inf \left\{ \theta : f\left(\sum_{p=1}^{r} \alpha_p x_p - \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i \right) \le \theta,\ f \in B^*,\ \sum_{p=1}^{r} \alpha_p = 1, \right.$$

$$\left. \alpha_p \ge 0,\ p = \overline{1, r},\ \beta_i \in R,\ i = \overline{1, n} \right\} =$$

$$= \inf \left\{ \max_{f \in B^*} f\left(\sum_{p=1}^{r} \alpha_p x_p - \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i \right) : \sum_{p=1}^{r} \alpha_p = 1,\ \alpha_p \ge 0,\ p = \overline{1, r},\ \beta_i \in R,\ i = \overline{1, n} \right\} =$$

$$= \inf \left\{ \left\| \sum_{p=1}^{r} \alpha_p x_p - \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i \right\| : \sum_{p=1}^{r} \alpha_p = 1,\ \alpha_p \ge 0,\ p = \overline{1, r},\ \beta_i \in R,\ i = \overline{1, n} \right\} =$$

$$= \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \left\| x - y \right\| = E\left(A, B\right) \le \left\| x^k - y^k \right\|. \tag{26}$$

З (26) випливає (24).

Якщо для деякого натурального числа k $\theta^k = \left\| x^k - y^k \right\| = \left\| \sum_{p=1}^{r} \alpha_p{}^k x_p - \sum_{i=1}^{n} \beta_i^k y_i \right\|$, то з (24) випливає рівність (25) та висновок, що $\left(x^k, y^k\right)$ є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

З доведеної теореми одержуємо, що коли справедлива рівність $\theta^k = \left\| x^k - y^k \right\|$, то величина $E(A,B)$ дорівнює $\theta^k = \left\| x^k - y^k \right\|$, а $\left(x^k, y^k \right)$ є екстремальним елементом для цієї величини.

Розглянемо випадок, коли $\theta^k < \left\| x^k - y^k \right\|$. Тоді знаходимо функціонал $f_{m_1+k} \in B^*$ такий, що

$$\left\| x^k - y^k \right\| = \max_{f \in B^*} f\left(x^k - y^k \right) = f_{m_1+k}\left(x^k - y^k \right) = f_{m_1+k}\left(\sum_{p=1}^{r} \alpha_p{}^k x_p - \sum_{i=1}^{n} \beta_i^k y_i \right),$$

та до обмежень (15) задачі лінійного програмування (14)-(17) додаємо обмеження

$$\sum_{p=1}^{r} \alpha_p f_{m_1+k}\left(x_p \right) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_{m_1+k}\left(y_i \right) - \theta \le 0 ,$$

знаходимо оптимальний розв’язок

$$\left(\alpha^{k+1}, \beta^{k+1}, \theta^{k+1} \right) = \left(\alpha_1{}^{k+1}, \ldots, \alpha_r{}^{k+1}; \beta_1{}^{k+1}, \ldots, \beta_n{}^{k+1}; \theta^{k+1} \right)$$

одержаної внаслідок цього нової задачі лінійного програмування, розв’язуємо двоїсту до неї задачу і т.д.

Теорема 4. Послідовність $\left\{ \theta^k \right\}_{k=1}^{\infty}$ є неспадною, існує $\lim\limits_{k \to \infty} \theta^k$. Послідовність $\left(\alpha^k, \beta^k \right) = \left(\alpha_1{}^k, \ldots, \alpha_r{}^k; \beta_1{}^k, \ldots, \beta_n{}^k \right)$, $k = 1, 2, \ldots$, є обмеженою послідовністю простору R^{r+n}.

Для будь-якої часткової границі $\left(\alpha^*, \beta^* \right) = \left(\alpha_1{}^*, \ldots, \alpha_r{}^*; \beta_1{}^*, \ldots, \beta_n{}^* \right)$ послідовності $\left(\alpha^k, \beta^k \right)$, $k = 1, 2, \ldots$, елемент $\left(x^*, y^* \right) = \left(\sum_{p=1}^{r} \alpha_p^* x_p, \sum_{i=1}^{n} \beta_i^* y_i \right) \in$ $\in A \times B$ є екстремальним елементом для величини (1).

Мають місце співвідношення

$$\theta^* = \lim_{k \to \infty} \theta^k = E(A,B) = \lim_{k \to \infty} \left\| x^k - y^k \right\|,$$

де $x^k = \sum_{p=1}^{r} \alpha_p^k x_p$, $y^k = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^k y_i$, $k = 1, 2, \ldots$.

Доведення. Оскільки всі обмеження задачі лінійного програмування (14)-(17), яка розв’язується на k -му кроці, є серед обмежень задачі лінійного програмування, яка розв’язується на $k+1$-му кроці методу, а цільові функції цих задач однакові (дорівнюють θ), то для відповідних їх оптимальних розв'язків $\left(\alpha^k, \beta^k, \theta^k\right) = \left(\alpha_1{}^k, ..., \alpha_r{}^k; \beta_1{}^k, ..., \beta_n{}^k; \theta^k\right)$ та $\left(\alpha^{k+1}, \beta^{k+1}, \theta^{k+1}\right) = \left(\alpha_1{}^{k+1}, ..., \alpha_r{}^{k+1}; \beta_1{}^{k+1}, ..., \beta_n{}^{k+1}; \theta^{k+1}\right)$ виконується нерівність $\theta^k \le \theta^{k+1}$, $k = 1, 2, ...$. Відповідно до теореми 3 $\theta^k \le E(A, B)$, $k = 1, 2, ...$. Отже, послідовність $\left\{\theta^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ є неспадною та обмеженою зверху. Тому існує

$$\lim_{k\to\infty} \theta^k = \theta^* \le E(A, B) . \tag{27}$$

Переконаємося, що послідовність $\left\{\beta^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю простору R^n . Припустимо супротивне. Тоді існує її підпослідовність $\left\{\beta^{k_\nu}\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ така, що $\lim_{\nu\to\infty} \left\|\beta^{k_\nu}\right\| = +\infty$.

Оскільки $\left(\alpha_1{}^{k_\nu}, ..., \alpha_r{}^{k_\nu}; \beta_1^{k_\nu}, ..., \beta_n{}^{k_\nu}; \theta^{k_\nu}\right)$ є оптимальним розв'язком задачі типу задачі (14)-(17), яка розв'язується на кроці k_ν , то для $\nu = 1, 2, ...$ маємо, що

$$\sum_{p=1}^{r} \alpha_p{}^{k_\nu} f_j\left(x_p\right) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{k_\nu} f_j\left(-y_i\right) - \theta^{k_\nu} \le 0 , \ j = \overline{1, m_1} ,$$

$$\sum_{p=1}^{r} \alpha_p{}^{k_\nu} = 1, \ \alpha_p{}^{k_\nu} \ge 0, \ p = \overline{1, r}, \ \beta_i^{k_\nu} \in R, \ i = \overline{1, n} .$$

Звідки

$$\sum_{p=1}^{r} \frac{\alpha_p{}^{k_\nu}}{\left\|\beta^{k_\nu}\right\|} f_j\left(x_p\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i^{k_\nu}}{\left\|\beta^{k_\nu}\right\|} f_j\left(-y_i\right) - \frac{1}{\left\|\beta^{k_\nu}\right\|} \theta^{k_\nu} \le 0 , \ \ j = \overline{1, m_1} . \tag{28}$$

Оскільки $\left(\frac{\beta_1^{k_\nu}}{\left\|\beta^{k_\nu}\right\|}, ..., \frac{\beta_n^{k_\nu}}{\left\|\beta^{k_\nu}\right\|}\right) \in S_{R^n} = \left\{\left(\beta_1, ..., \beta_n\right) \in R^n : \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 = 1\right\}$,

$\nu = 1, 2, ...$, то з послідовності $\left\{\left(\frac{\beta_1^{k_\nu}}{\left\|\beta^{k_\nu}\right\|}, ..., \frac{\beta_n^{k_\nu}}{\left\|\beta^{k_\nu}\right\|}\right)\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ можна вибрати збіжну підпослідовність.

Без обмеження загальності будемо вважати, що сама ця послідовність є збіжною до $\left(\beta_1', ..., \beta_n'\right) \in S_{R^n}$.

З урахуванням обмеженості послідовностей $\left\{\left(\alpha_1^{k_\nu},...,\alpha_r^{k_\nu}\right)\right\}_{\nu=1}^{\infty}$, $\left\{\theta^{k_\nu}\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ внаслідок переходу у співвідношенні (28) до границі при $\nu\to\infty$ одержуємо, що $\sum_{i=1}^{n}\beta_i' f_j\left(-y_i\right)\le 0$, $j=\overline{1,m_1}$, причому $\left(\beta_1',...,\beta_n'\right)\in S_{R^n}$.

Звідки $\max_{1\le j\le m_1}\sum_{i=1}^{n}\beta_i' f_j\left(-y_i\right)\le 0$, що суперечить (13). Отже, $\left\{\beta^k\right\}_{k=1}^{\infty}=\left\{\left(\beta_1^k,...,\beta_n^k\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю. Оскільки $\sum_{p=1}^{r}\alpha_p^k=1$ та $\alpha_p^k\ge 0$, $k=1,2,...$, то обмеженою є також послідовність $\left\{\alpha^k\right\}_{k=1}^{\infty}$. З проведених міркувань випливає, що обмеженою буде послідовність $\left(\alpha^k,\beta^k\right)=\left(\alpha_1^k,...,\alpha_r^k;\beta_1^k,...,\beta_n^k\right)$, $k=1,2,...$. Нехай $\left(\alpha^*,\beta^*\right)=\left(\alpha_1^*,...,\alpha_r^*;\beta_1^*,...,\beta_n^*\right)$ є її частковою границею. Переконаємося, що елемент $\left(x^*,y^*\right)=\left(\sum_{p=1}^{r}\alpha_p^* x_p,\sum_{i=1}^{n}\beta_i^* y_i\right)$ є екстремальним елементом для величини (1). Існує підпослідовність $\left(\alpha^{k_\nu},\beta^{k_\nu}\right)=\left(\alpha_1^{k_\nu},...,\alpha_r^{k_\nu};\beta_1^{k_\nu},...,\beta_n^{k_\nu}\right)$, $\nu=1,2,...$, така, що

$$\begin{aligned}\lim_{\nu\to\infty}\left(\alpha^{k_\nu},\beta^{k_\nu}\right)&=\lim_{\nu\to\infty}\left(\alpha_1^{k_\nu},...,\alpha_r^{k_\nu};\beta_1^{k_\nu},...,\beta_n^{k_\nu}\right)=\\&=\left(\alpha^*,\beta^*\right)=\left(\alpha_1^*,...,\alpha_r^*;\beta_1^*,...,\beta_n^*\right).\end{aligned}\tag{29}$$

До обмежень задачі лінійного програмування типу задачі (14)-(17), яка розв'язується на кроці k_ν, добавлено обмеження $\sum_{p=1}^{r}\alpha_p f_{m_1+k_\nu}\left(x_p\right)-\sum_{i=1}^{n}\beta_i f_{m_1+k_\nu}\left(y_i\right)-\theta\le 0$, де функціонал $f_{m_1+k_\nu}\in B^*$ вибрано так, що

$$\begin{aligned}\left\|x^{k_\nu}-y^{k_\nu}\right\|&=\max_{f\in B^*}f\left(x^{k_\nu}-y^{k_\nu}\right)=\\&=f_{m_1+k_\nu}\left(x^{k_\nu}-y^{k_\nu}\right)=f_{m_1+k_\nu}\left(\sum_{p=1}^{r}\alpha_p^{k_\nu}x_p-\sum_{i=1}^{n}\beta_i^{k_\nu}y_i\right),\end{aligned}\tag{30}$$

розв'язано отриману, внаслідок цього, нову задачу лінійного програмування і т.д.

Тому уже

$$\sum_{p=1}^{r} \alpha_p^{k_{\nu+1}} f_{m_1+k_\nu}\left(x_p\right) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{k_{\nu+1}} f_{m_1+k_\nu}\left(y_i\right) - \theta^{k_{\nu+1}} \le 0 . \tag{31}$$

З урахуванням (30), (31) отримаємо, що

$$\left| \left\| x^{k_\nu} - y^{k_\nu} \right\| - \left(\sum_{p=1}^{r} \alpha_p^{k_{\nu+1}} f_{m_1+k_\nu}\left(x_p\right) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{k_{\nu+1}} f_{m_1+k_\nu}\left(y_i\right) \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{p=1}^{r} \alpha_p^{k_\nu} f_{m_1+k_\nu}\left(x_p\right) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{k_\nu} f_{m_1+k_\nu}\left(y_i\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{p=1}^{r} \alpha_p^{k_{\nu+1}} f_{m_1+k_\nu}\left(x_p\right) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{k_{\nu+1}} f_{m_1+k_\nu}\left(y_i\right) \right) \right| \le$$

$$\le \sum_{p=1}^{r} \left| \alpha_p^{k_\nu} - \alpha_p^{k_{\nu+1}} \right| \left| f_{m_1+k_\nu}\left(x_p\right) \right| + \sum_{i=1}^{n} \left| \beta_i^{k_\nu} - \beta_i^{k_{\nu+1}} \right| \left| f_{m_1+k_\nu}\left(y_i\right) \right| \le$$

$$\le \sum_{p=1}^{r} \left| \alpha_p^{k_\nu} - \alpha_p^{k_{\nu+1}} \right| \left\| x_p \right\| + \sum_{i=1}^{n} \left| \beta_i^{k_\nu} - \beta_i^{k_{\nu+1}} \right| \left\| y_i \right\| .$$

З урахуванням (27), (29), (31) звідси одержуємо, що

$$\lim_{\nu\to\infty} \left\| x^{k_\nu} - y^{k_\nu} \right\| = \lim_{\nu\to\infty} \left\| \sum_{p=1}^{r} \alpha_p^{k_\nu} x_p - \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{k_\nu} y_i \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{p=1}^{r} \alpha_p^{*} x_p - \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{*} y_i \right\| = \left\| x^* - y^* \right\| =$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} \left(\sum_{p=1}^{r} \alpha_p^{k_{\nu+1}} f_{m_1+k_\nu}\left(x_p\right) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{k_{\nu+1}} f_{m_1+k_\nu}\left(y_i\right) \right) \le$$

$$\le \lim_{\nu\to\infty} \theta^{k_{\nu+1}} = \theta^* \le E\left(A, B\right) \le \left\| x^* - y^* \right\| , \tag{32}$$

оскільки $x^* \in A$, $y^* \in B$.

Зі співвідношення (32) випливає, що

$$\lim_{\nu\to\infty} \theta^{k_{\nu+1}} = \theta^* = E\left(A, B\right) = \left\| x^* - y^* \right\| = \lim_{\nu\to\infty} \left\| x^{k_\nu} - y^{k_\nu} \right\| =$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} \left\| \sum_{p=1}^{r} \alpha_p^{k_\nu} x_p - \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{k_\nu} y_i \right\| = \left\| \sum_{p=1}^{r} \alpha_p^{*} x_p - \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{*} y_i \right\| . \tag{33}$$

Оскільки (33) має місце для будь-якої граничної точки послідовності $\left(\alpha^k, \beta^k\right) = \left(\alpha_1{}^k, ..., \alpha_r{}^k; \beta_1{}^k, ..., \beta_n{}^k\right)$, то справедлива рівність

$$E\left(A, B\right) = \lim_{\nu \to \infty} \left\| x^k - y^k \right\| = \lim_{\nu \to \infty} \left\| \sum_{p=1}^{r} \alpha_p{}^k x_p - \sum_{i=1}^{n} \beta_i{}^k y_i \right\|. \qquad (34)$$

Рівності (33), (34) дозволяють зробити висновок про справедливість теореми.

Теорему доведено.

Зауважимо, що з доведеної теореми випливає, що оцінки (24) можна використати для відшукання величини $E\left(A, B\right)$ з наперед заданою точністю.

Переконаємося, що з допомогою побудованого методу можна розв'язувати також задачу відшукання величини (12), двоїсту до задачі відшукання величини (1).

Теорема 5. Нехай $\gamma_k = \left(\gamma_1^k, ..., \gamma_{m_1+k-1}^k, \gamma^k\right)$ є оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування (18)-(22), яка є двоїстою до задачі (14)-(17), що розв'язується на k-му кроці методу відшукання величини (1). Тоді послідовність $f^k = \sum\limits_{s=1}^{m_1+k-1} \gamma_s^k f_s$, $k = 1, 2, \ldots$, є мінімізуючою послідовністю для задачі відшукання величини (12).

Доведення. Оскільки γ_k, $k = 1, 2, \ldots$, є оптимальним розв'язком задачі (18)-(22), то

$$\gamma^k = \min_{1 \le p \le r} \left(\sum_{s=1}^{m_1+k-1} \gamma_s^k f_s \right)\left(x_p\right) = \min_{1 \le p \le r} f^k\left(x_p\right),$$

$$\left(\sum_{s=1}^{m_1+k-1} \gamma_s^k f_s \right)\left(y_i\right) = f^k\left(y_i\right) = 0, \ i = \overline{1, n},$$

$$\left\| f^k \right\| = \left\| \sum_{s=1}^{m_1+k-1} \gamma_s^k f_s \right\| \le \sum_{s=1}^{m_1+k-1} \left\| \gamma_s^k f_s \right\| = \sum_{s=1}^{m_1+k-1} \gamma_s^k \left\| f_s \right\| \le \sum_{s=1}^{m_1+k-1} \gamma_s^k = 1,$$

оскільки $f_s \in B^*$, $\gamma_s^k \ge 0$, $s = \overline{1, m_1 + k - 1}$, $\sum\limits_{s=1}^{m_1+k-1} \gamma_s^k = 1$.

Звідси випливає, що f^k є допустимим розв'язком задачі (12), для якого

$$\gamma^k = \min_{1 \le p \le r} f^k\left(x_p\right), \ k = 1, 2, \ldots. \qquad (35)$$

Оскільки θ^k є оптимальним значенням цільової функції θ задачі лінійного програмування (14)-(17), а γ^k є оптимальним значенням цільової функції γ задачі лінійного програмування (18)-(22), двоїстої до задачі (14)-(17), то згідно з першою теоремою двоїстості в лінійному програмуванні (див., наприклад, [11, с. 163])

$$\gamma_k = \theta^k, \; k = 1, 2, \ldots . \tag{36}$$

При доведенні теореми 4 встановлено, що $\lim\limits_{k\to\infty} \theta^k = E(A, B)$. Звідси та із співвідношень (35), (36) випливає, що $\lim\limits_{k\to\infty} \min\limits_{1\le p\le r} f^k(x_p) = E(A, B)$.

Це й означає, що $\left\{f^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ є мінімізуючою послідовністю для задачі відшукання величини (12).

Теорему доведено.

Теорема 6. Якщо X — сепарабельний простір, то будь-який функціонал $f^* \in X^*$, який є граничною в розумінні слабкої збіжності послідовностей простору X^* точкою послідовності $\left\{f^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, описаної в теоремі 5, є оптимальним розв'язком задачі (12), двоїстої до задачі (1).

Доведення. Оскільки X — сепарабельний простір, $\left\|f^k\right\| \le 1$, $k = 1, 2, \ldots$, то існують граничні у розумінні слабкої збіжності точки послідовності $\left\{f^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ (див., наприклад, [1, с. 199, 200]).

Нехай f^* є однією із них. Тоді існує підпослідовність $\left\{f^{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{f^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, яка слабко збігається до f^*. Оскільки $f^{k_l}(y_i) = 0$, $i = \overline{1, n}$, $l = 1, 2, \ldots$, то

$$\lim_{l\to\infty} f^{k_l}(y_i) = f^*(y_i) = 0, \; i = \overline{1, n}. \tag{37}$$

Оскільки $\left\|f^{k_l}\right\| \le 1$, $l = 1, 2, \ldots$, а $\left\|f^*\right\| \le \varliminf\limits_{l\to\infty} \left\|f^{k_l}\right\|$ (див., наприклад, [12, с. 168]), то

$$\left\|f^*\right\| \le 1. \tag{38}$$

Зі співвідношень (37), (38) випливає, що f^* є допустимим розв'язком задачі (12). Згідно з теоремою 5

$$\lim_{k\to\infty}\min_{1\le p\le r} f^{k_l}\left(x_p\right)=E\left(A,B\right).$$

Маємо, що $\left|\min_{1\le p\le r} f^{k_l}\left(x_p\right)-\min_{1\le p\le r} f^{*}\left(x_p\right)\right|\le \max_{1\le p\le r}\left|f^{k_l}\left(x_p\right)-f^{*}\left(x_p\right)\right|$ (див., наприклад, [6, с. 306]) та $\lim_{l\to\infty} f^{k_l}\left(x_p\right)=f^{*}\left(x_p\right),\ p=\overline{1,r}$. Тому $\lim_{l\to\infty}\min_{1\le p\le r} f^{k_l}\left(x_p\right)=\min_{1\le p\le r} f^{*}\left(x_p\right)=E\left(A,B\right)$.

Оскільки, крім цього, f^{*} є допустимим розв'язком задачі (12), то f^{*} є її оптимальним розв'язком.

Теорему доведено.

Висновки. Встановлено умови існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (1), співвідношення двоїстості для цієї задачі, критерій екстремальності її елемента; розроблено збіжний чисельний метод розв'язування задачі відшукання величини (1) та двоїстої їй задачі (12); отримано двосторонні оцінки збіжності, що дозволяють відшукати величину (1) з наперед заданою точністю.

Список використаних джерел:

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1976. 544 с.
2. Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. Москва: Физматлит, 2004. 416 с.
3. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Умови існування екстремального елемента для задачі відшукання відстані між двома множинами, єдиності екстремального елемента еквівалентної їй задачі, властивості функції відстані. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2020. Вип. 21. С. 13-25.
4. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. Москва: Наука, 1965. 407 с.
5. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций. Москва: Наука, 1977. 510 с.
6. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. Москва: Наука, 1976. 320 с.
7. Степанец А. И. Методы теории приближений. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. I. 427 с.
8. Степанец А. И. Методы теории приближений. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. II. 468 с.
9. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1976. 307 с.
10. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Співвідношення двоїстості та критерії екстремальності елемента для задачі відшукання відстані між двома опукли-

ми множинами лінійного нормованого простору. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. Вип. 18. С. 65-77.
11. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование (теория, методы и приложения). Москва: Наука, 1969. 424 с.
12. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. Москва: Высш. школа, 1982. 271 с.

NUMERICAL METHOD OF SIMULTANEOUS SOLUTION THE PROBLEM OF FINDING THE DISTANCE (BEST) BETWEEN A CONVEX POLYHEDRON AND A FINITE-DIMENSIONAL SUBSPACE OF A LINEAR NORMED SPACE AND DUAL TASK

One of the most developing areas of mathematics is theory of approximations, including the theory of approxi-mations of functions. It is begins from of task of P. L. Chebyshev on the uniform (Chebyshev) approximation of a continuous on a segment of a real-valued function by a set of algebraic polynomials of degree not exceeding *n*.

Later, a number of other formulations of problems on the best approximation of functions were considered, one of which is the problem of uniform approximation of a function continuous on a compact set by a finite-dimensional subspace generated by other functions continuous on this compact set.

An important place in the theory of approximation is occupied by the problem of approximation of an element of linear normed space by the elements of its finite-dimensional subspace, partial cases of which are the problems discussed above.

An important questioni of this problem are general theorems of existence of an extremal element, duality theorems and criteria of an extremal element, construction of numerical methods for finding this element and the magnitude of the best approximation, which have been studied by many mathematicians.

The paper considers the problem of finding the distance (best) between a convex polyhedron and a finite-dimensional subspace of a linear normalized space, a partial case of which is the problem of the best approximation of an element of a linear normed space by its finitedimensional subspace.

For this problem the existence of an extremal element, the ratio of duality, the criterion of an extremal element are established. A convergent numerical method of simultaneous solution of direct and dual problems is constructed, bilateral estimates of convergence are obtained, which allow to find corresponding values with predetermined accuracy.

Key words: *the linear normed space, the distance between a convex polyhedron and a finite-dimensional subspace, the dual problems, the numerical method.*

Отримано: 18.10.2021