УДК 519.1
DOI: 10.32626/2308-5878.2021-22.63-74

О. О. Ємець, д-р фіз.-мат. наук, професор,
О. О. Черненко, канд. фіз.-мат. наук,
Т. В. Чілікіна, канд. фіз.-мат. наук,
О. В. Ольховська, канд. фіз.-мат. наук

Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«Полтавський університет економіки і торгівлі», м. Полтава

ОГЛЯД ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ВИЗНАЧЕННЯ РЕНТАБЕЛЬНОСТІ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОГО ВИРОБНИЦТВА ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

У роботі представлено огляд робіт полтавських дослідників присвячених математичному моделюванню задач на евклідових комбінаторних множинах. Викладено постановки практичних задач сільськогосподарського виробництва, а саме: задачі про забезпечення максимальної рентабельності виробництва; задачі про порядок засівання ділянок для отримання максимальної прибутковості; задачі про порядок засівання частини ділянок для максимального прибутку з урахуванням внесення добрив; задачі на знаходження оптимальних обсягів вирощування культур двома господарствами (різні модифікації). Побудовано моделі цих задач у вигляді задач евклідової комбінаторної оптимізації. Математична модель задачі про забезпечення максимальної рентабельності виробництва зводиться до умовної задачі з дробово-лінійною цільовою функцією на множині розміщень. Задача про порядок засівання ділянок для отримання максимальної прибутковості інтерпретована як повністю комбінаторна задача на множині переставлень. Для задачі про порядок засівання частини ділянок для максимального прибутку з урахуванням внесення добрив побудовано модель у вигляді частково комбінаторної задачі на переставній множині. Задачі на знаходження оптимальних обсягів вирощування культур двома господарствами розглядаються як задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу з обмеженнями, що задають множину переставлень. Для розглянутих класів задач розроблено методи їх розв'язування. Для умовної задачі з дробово-лінійною цільовою функцією на комбінаторній множині розміщень запропоновано лінеаризацію функції та подальше застосування методу комбінаторного відсікання. Для умовних задач на вершинно розташованих множинах побудовано алгоритм комбінаторного відсікання, як для повністю, так і для частково комбінаторних задач, та модифікований метод гілок та меж. Задачі ігрового типу на переставних множинах розв'язуються різними ітераційними методами. Для всіх типів задач проведено числові експерименти, що підтвердили ефективність алгоритмів та швидкодію.

Ключові слова: *задачі комбінаторної оптимізації, задача на вершинно розташованих множинах, задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу.*

Вступ. Дослідження задач дискретної оптимізації є передумовою успішного моделювання важливих економічних, соціальних та інших процесів. Велика кількість публікацій в області дискретної оптимізації свідчить про необхідність та важливість подібних досліджень. В Україні серед вчених, роботи яких присвячені різним напрямкам дискретної оптимізації, в першу чергу слід назвати Сергієнка І. В., Шора Н. З., Стояна Ю. Г., а також Гуляницького Л. Ф., Донця Г. П., Ємця О. О., Ляшенка І. М., Павлова О. А., Панішева А. В., Червака Ю. Ю., Шила В. П., Яковлева С. В. та керовані ними наукові колективи.

Важливий клас дискретних оптимізаційних задач складають оптимізаційні задачі комбінаторного типу, зокрема, задачі евклідової комбінаторної оптимізації. Задачі комбінаторної оптимізації все частіше зустрічаються на практиці і потребують дослідження та розв'язання [1-13].

Основні результати. Розглянемо задачу про порядок засівання частини ділянок для максимальної рентабельності. На η ділянках $g_1, g_2, ..., g_\eta$ із заданими площами засівається m культур ($m < \eta$). Визначено мінімально та максимально допустиму площу для кожної ділянки, засіяною цією культурою. Відомі необхідні витрати ресурсів кожного виду при вирощуванні однієї культури на 1 га площі ділянки для цієї культури. Відома врожайність культури та прибуток з 1 га ділянки. Заданий мінімально потрібний обсяг продукції, одержаної з j -ої культури. Відомі витрати на 1 га ділянки, засіяної цією культурою.

Необхідно визначити, які ділянки і як засівати, щоб забезпечити максимальну рентабельність виробництва, при умові, що кожна ділянка засівається лише однією культурою і одна культура може бути посіяна лише на одній ділянці.

Побудуємо математичну модель даної задачі у вигляді евклідової комбінаторної задачі на множині розміщень.

Нехай $G = \left\{ g_1, g_2, g_3, ..., g_\eta \right\}$ — мультимножина площ ділянок. Тоді всі можливі m-вибірки з мультимножини G утворюють загальну множину розміщень $E^m_{\eta n}(G)$, де n — число різних елементів в G. Використаємо позначення: x_j — площа ділянки, засіяної j -ою культурою; $S_{j\min}$, $S_{j\max}$ — мінімально та максимально допустимі площі посіву j -ої культури; ω_j — врожайність j -ої культури на 1 га ділянки; c_j — прибуток з 1 га ділянки, засіяної j -ою культурою; c_0 — прибуток, що не залежить від того, як засіваються ділянки; Q_j — мінімально потрібний обсяг продукції, одержаної з j -ої культури; d_j — витрати на 1 га ділянки, засіяної j -ою культурою; d_0 — витрати, що не залежать від того, як засіваються ділянки, r — кількість видів виробничих ресурсів; b_p — наявність виробничих ресурсів p -го виду; α_{pj} – затрати ресурсів p -го виду на 1 га ділянки, засіяної j -ою культурою.

Тоді математична модель набуває вигляду: знайти впорядковану пару $\left\langle F(x^*), x^* \right\rangle$ таку, що

$$F(x^*) = \max_{x \in R^m} \frac{\sum_{j=1}^{m} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{m} d_j x_j + d_0}, \quad x^* = \arg\max_{x \in R^m} \frac{\sum_{j=1}^{m} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{m} d_j x_j + d_0},$$

за комбінаторної умови

$$x = \left(x_1, x_2, ..., x_m\right) \in E_{\eta n}^m\left(G\right) \subset R^m ,$$

та додаткових лінійних обмеженнях:
на посівні площі

$$S_{j\min} \le x_j \le S_{j\max} \quad \forall j \in J_m ;$$

на використання ресурсів

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{pj} x_j \le b_p \quad \forall p \in J_r ;$$

на обсяг одержуваної продукції

$$x_j \omega_j \ge Q_j \quad \forall j \in J_m .$$

Дана задача також розглядалася в роботах [6, 10] з дробово-лінійною функцією цілі на загальній множині переставлень.

Для розв'язування цієї задачі досліджено властивості, розроблено методи та проведено ряд числових експериментів, які підтвердили їх ефективність та швидкодію [9].

Розглянемо задачу про порядок засівання ділянок для отримання максимальної прибутковості, як повністю комбінаторну задачу на множині переставлень. На n ділянках із заданими площами $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ засівається k видів культур ($n > k$). Відома врожайність j -ої культури на *i*-му полі та її прибуток з 1 га ділянки. Визначено мінімально та максимально допустиму площу для кожної ділянки, яку засівають цією культурою. Відомі необхідні витрати ресурсів кожного виду при вирощуванні однієї культури на 1 га площі ділянки для цієї культури. Заданий мінімальний потрібний обсяг виробництва j -ої культури.

Необхідно визначити, які ділянки і як засівати, щоб забезпечити максимальну прибутковість виробництва, при умові, що кожна ділянка засівається лише однією культурою [11].

Побудуємо математичну модель даної задачі у вигляді евклідової комбінаторної задачі на множині переставлень.

Розглянемо мультимножину $G=\{g_1,g_2,...,g_s\}$ площ полів, у якій n ненульових елементів, $\eta=n\cdot k$. Нехай є $\eta-n$ фіктивних полів, тобто полів із нульовими площами, $g_1=g_2=...=g_{s-n}=0$, $g_{s-n+1}=\sigma_1$, $g_{s-n+2}=\sigma_2,...,g_{s-n+1}=\sigma_n$. Всі можливі k -вибірки з мультимножини G утворюють множину переставлень $E_{\eta\nu}$, де ν — число різних елементів в G (якщо всі поля різні, то $\nu=n+1$). Використаємо позначення: x_{ij} — площа *i*-ої ділянки, засіяної j -ою культурою; $S_{j\min}$, $S_{j\max}$ — мінімально та максимально допустимі площі посіву j -ої культури; ω_j — врожайність j -ої культури з 1 га *i*-го поля; c_{ij} — прибуток культури j-го виду на і-му полі з 1 га ділянки; Q_j — мінімальний потрібний обсяг виробництва j -ої культури; r — кількість видів виробничих ресурсів; a_{pji} — затрати ресурсів p -го виду на 1 га *i*-го поля, засіяної j -ою культурою, b_p — наявність виробничих ресурсів p -го виду.

Тоді математична модель набуває вигляду: знайти впорядковану пару $\left\langle F(x^*),x^*\right\rangle$, таку, що

$$Z^*=\max_{x\in R^n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}c_{ij}x_{ij},\ x^*=\arg\max_{x\in R^n}Z^*,$$

за комбінаторної умови

$$x=\left(x_{11},...,x_{1k},x_{21},x_{2k},...,x_{n1},...,x_{nk}\right)\in E_{\eta\nu}\left(G\right)\subset R^{\eta},$$

та за додаткових лінійних обмежень:
на посівні площі

$$S_{j\min}\le\sum_{i=1}^{n}x_{ij}\le S_{j\max}\quad\forall j\in J_k\,;$$

на використання ресурсів

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} a_{pji}x_{ij} \le b_p \quad \forall p \in J_r \ ;$$

на обсяг одержуваної продукції

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\omega_{ij} \ge Q_j \quad \forall j \in J_k \ .$$

Зазначимо, що одержана модель — це повністю комбінаторна задача. Для розв'язання цієї задачі розроблено методи, які викладені в [11] та проведено ряд числових експериментів, що показали його ефективність.

Розглянемо задачу нелінійної оптимізації на переставленнях, одну із задач розподілу мінеральних добрив, у якій з урахуванням виконання обсягів продажу продукції відповідно до угод при наявності певних виробничих ресурсів і ресурсів мінеральних добрив необхідно отримати максимальний прибуток від урожаю сільськогосподарських культур.

Нехай у наявності в господарства є n полів площами $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ відповідно, k видів культур, r видів виробничих ресурсів і m видів мінеральних добрив. Відома врожайність j-ої культури на i-му полі та її прибутковість з 1 га i-ої ділянки. Визначено мінімально та максимально допустиму площу для кожної ділянки, яку засівають певною культурою. Відомі витрати ресурсів кожного виду при вирощуванні певної культури на 1 га площі ділянки під цією культурою. Заданий мінімальний потрібний обсяг виробництва j-ої культури. Знайти, які поля і як треба засівати, щоб отримати максимальний прибуток за умови, що поле засівається однією культурою.

Розглянемо мультимножину $G = \{g_1, g_2, ..., g_\eta\}$ площ полів, у якій n ненульових елементів, $\eta = n \cdot k$. Нехай введено у розгляд $\eta - n$-фіктивних полів, тобто полів із нульовими площами, тоді: $g_1 = g_2 = ... = g_{\eta-n} = 0, \quad g_{\eta-n+1} = \sigma_1, g_{\eta-n+2} = \sigma_2, ..., g_\eta = \sigma_n$. У цьому випадку кожний можливий набір площ полів $x = \{x_{11}, ..., x_{1k}, x_{21}, x_{2k}, ..., x_{n1}, ..., x_{nk}\}$ є елементом множини переставлень з елементів мультимножини G, тобто $x \in E_{\eta\nu}(G)$, де ν — число різних в G елементів.

При побудові математичної моделі будемо вважати, що поле засівається тільки однією культурою. Введемо позначення: x_{ij} — площа в га під j-ою культурою на i-ому полі; y_{ijl} — обсяг добрив l-го виду, які вносять під j-ту культуру на i-ому полі в центнерах; c'_{ij} — прибуток, який отримують від продажу 1 ц j-ої культури з 1 га i-ого поля; c''_{ij} — витрати на збирання, транспортування 1 ц j-ої культури, зібраної з 1 га i-ого поля; ν_{ij} — коефіцієнт підвищення врожайності j-ої культури на i-ому полі від внесення добрив; d_l — витрати на внесення добрив виду l-го виду на 1 ц; Y_l — обсяг добрив l-го виду, який отримує господарство; γ_l — вміст діючої речовини в добриві l-го виду; p_{ijl} — максимальна доза добрив l-го виду, які необхідно внести на 1 га площі під культуру j-го виду на i-му полі.

$S_{j\min}$, $S_{j\max}$, a_{pji}, b_p, r мають той же сенс, що і в задачі 1. Величини c'_{ij}, c''_{ij}, d_l — в одних грошових одиницях.

Z^* — прибуток, який отримується при виробництві при внесенні мінеральних добрив.

Задача приймає вигляд: знайти впорядковану пару $\left\langle Z^*, z^*\right\rangle$:

$$Z^* = \max_{x\in R^s,\, y\in R^p}\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\left(c'_{ij} - c''_{ij}\right)x_{ij}\nu_{ij}\right) - \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{m} d_l x_{ij} y_{ijl}\ ,$$

$$z^* = \left(x^*_{11},\ldots,x^*_{nk},y^*_{111},\ldots,y^*_{nkm}\right) = \arg\max_{x\in R^s,\, y\in R^p} Z^*,$$

за комбінаторної умови:

$$x = \left(x_{11},\ldots,x_{1k},x_{21},\ldots,x_{2k},\ldots,x_{n1},\ldots,x_{nk}\right)\in E_{\eta\nu}\left(G\right)\subset R^{\eta}$$

та за додаткових лінійних обмежень:
на баланс ресурсів добрив

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} y_{ijl} \le Y_l \quad \forall l \in J_m\ ;$$

по максимально можливим дозам внесення добрив

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{m} \gamma_l x_{ij} y_{ijl} \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{m} p_{ijl}\ ;$$

на посівні площі

$$S_{j\min} \le \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le S_{j\max} \quad \forall j \in J_k\ ;$$

на використання ресурсів

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} a_{pji} x_{ij} \le b_p \quad \forall p \in J_r\ ;$$

на обсяг одержуваної продукції

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\omega_{ij} \ge Q_j \quad \forall j \in J_k \,.$$

Зауважимо, що одержана модель — це частково комбінаторна задача: змінні x_{ij} — комбінаторні, а y_{ijl} — неперервні.

Для розв'язування задачі запропоновано методи, які викладено в [11], доведено та обґрунтовано ефективність їх роботи.

Розглянемо економічні інтерпретації та математичні моделі задач сільського господарства, які є задачами комбінаторної оптимізації ігрового типу.

Нехай є два конкуруючі фермерські господарства, які займаються вирощування та збутом сільськогосподарської продукції. На кожному із власних *m* полів перше господарство вирощує *m* видів зернових. Оскільки площа кожного з полів різна, то від того на якому із полів буде посаджена сільськогосподарська культура залежить вирощена її кількість. Прибуток від реалізації обох господарств залежить від того, яку кількість продукції кожного виду виростить господарство. Необхідно розробити оптимальні плани вирощування зернових культур першого та другого фермерських господарств.

Припустимо, що у другого господарства відсутні обмеження на вирощування зернових, це можливо коли поля знаходяться поруч і виробник може дозволити собі вирощувати ту кількість кожної культури яку вважає найбільш прибутковою, то комбінаторні обмеження накладаються лише на стратегії першого гравця. Розглянемо математичну модель даної задачі.

Нехай елементи P_i^x мультимножини $P^x = \left\{P_1^x, ..., P_m^x\right\}$ $0 \le P_i^x \le 1$, $i \in J_m = \{1, 2, ..., m\}$, сума їх $\sum_{i=1}^{m} P_i^x = 1$. У векторі $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$ елемент x_i — ймовірність застосування стратегії з номером i, належить P^x, $x_i \in P^x$, а сам вектор X належить множині $E_{mv}\left(P^x\right)$ m-перестановок з елементів мультимножини P^x, тобто $X = \left(x_1, x_2, ..., x_m\right) \in E_{mv}\left(P^x\right)$. Очевидно, що $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$.

Гра полягає в тому, що перший гравець обирає стратегію-вектор $X = \left(x_1, x_2, ..., x_m\right) \in E_{mv}\left(P^x\right)$, а другий обирає стратегію-число $j \in J_n$. Ці стратегії назвемо чистими. При цьому другий гравець платить першому платежі $a'_{1j}, ..., a'_{mj}$ з ймовірностями $x_1, ..., x_m$, де a'_{ij} — задані дійсні числа $\forall i \in J_m \ \forall \ j \in J_n$.

Позначимо A' матрицю з елементами a'_{ij}. Середній платіж (математичне сподівання) другого гравця першому (при виборі стратегії $x^i = \left(x_{1i}, ..., x_{mi} \right) \in E_{m\nu}\left(P^x \right)$ і стратегії $j \in J_n$ відповідно першим та другим гравцями, $i \in J_k$) виражається функцією:

$$F\left(x^i, j \right) = \sum_{t=1}^{m} a'_{tj} x_{it} = a_{ij}, \tag{1}$$

де $k = \left| E_{m\nu}\left(P^x \right) \right| = \dfrac{m!}{\eta_1! \cdot ... \cdot \eta_\nu!}$.

Необхідно знайти стратегії гравців X^* і j^*, які дозволять першому гравцю максимізувати свій виграш, а другому — мінімізувати програш:

$$X^* = \arg \max_{X \in E_{m\nu}\left(P^x \right)} \left(\min_{j \in J_n} F\left(X, j \right) \right),$$

$$j^* = \arg \min_{j \in J_n} \left(\max_{X \in E_{m\nu}\left(P^x \right)} F\left(X, j \right) \right)$$

де функція $F\left(X, j \right)$ має вигляд (1).

Якщо виконується умова

$$\min_{j \in J_n} \max_{X \in E_{m\nu}\left(P^x \right)} F\left(X, j \right) = \max_{X \in E_{m\nu}\left(P^x \right)} \min_{j \in J_n} F\left(X, j \right) = F\left(X^*, j^* \right), \tag{2}$$

то очевидно, що задача розв'язана з ціною гри $\upsilon = F\left(X^*, j^* \right)$ та оптимальними чистими стратегіями X^*, j^* першого та другого гравців відповідно. При цьому кажуть, що існує сідлова точка гри $\left(X^*, j^* \right)$.

Якщо умова (2) не виконується, то, очевидно, що використання кожним з грацiв його фіксованої чистої стратегії дозволяють іншому отримувати переваги. З огляду на це, кожен з гравців для того, щоб при багатократному повторенні гри досягти своєї мети, повинен застосувати свої чисті стратегії з певною частотою (ймовірністю).

У цьому випадку для пошуку оптимальних стратегій, введемо поняття мішаних стратегій. Позначимо

$$S_k = \left\{ p = (p_1, p_2, ..., p_k),\ \sum_{i=1}^{k} p_i = 1,\ p_i \ge 0 \ \ \forall i \in J_n \right\},$$

$$S_n = \left\{ q = (q_1, ..., q_n),\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,\ q_j \ge 0 \ \ \forall j \in J_m \right\},$$

де k — кількість елементів в $E_{mv}\left(P^x\right)$, $p \in S_k$ — мішана стратегія першого гравця, $p = (p_1, p_2, ..., p_k)$, $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. Аналогічно, мішаною стратегією другого гравця є елемент $q \in S_n$, $q = (q_1, ..., q_n)$, $q_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$. Числа p_i, q_j є ймовірностями застосування стратегій $x^i \in E_{mv}\left(P^x\right)$ та $j \in J_n$ першого та другого гравців відповідно.

Очікуваною платою другого гравця першому є величина $F(p,q)$ — математичне сподівання випадкової величини, яка реалізується при одночасному настанні випадкових подій: вибір стратегії x^i першим гравцем та вибір стратегії j — другим. Ця випадкова величина приймає значення a_{ij} $\forall i \in J_k$, $\forall j \in J_n$ з ймовірністю $p_i q_j$:

$$F\left(p,q\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{t=1}^{m} a'_{tj} x_{it} p_i q_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i q_j , \tag{3}$$

де p_i — ймовірність вибору $x^i = \left(x_{i1}, ..., x_{im}\right)$, а q_j — ймовірність вибору j.

Природно, що очікуваний програш другого гравця обчислюється аналогічно відповідно формули (3), оскільки маємо гру з нульовою сумою.

Не важко бачити, що перший гравець може забезпечити собі виграш не менше $\max\limits_{p \in S_k} \min\limits_{q \in S_n} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i q_j$, а другий гравець може забезпечити собі програш не більше $\min\limits_{p \in S_k} \max\limits_{q \in S_n} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i q_j$. Якщо $\left(p^*, q^*\right)$ - сідлова точка функції $F\left(p,q\right)$, що визначається (2.3), тобто виконуються нерівності

$$F\left(p^*, q\right) \leq F\left(p^*, q^*\right) \leq F\left(p, q^*\right)$$

то p^*, q^* називають оптимальними мішаними стратегіями першого та другого гравців відповідно. У цьому випадку, як відомо,

$$\upsilon = F\left(p^*, q^*\right) = \min_{q \in S_n} \max_{p \in S_k} F\left(X, Y\right) = \max_{p \in S_k} \min_{q \in S_n} F\left(p, q\right).$$

При цьому будемо казати, що задача комбінаторної оптимізації ігрового типу на перестановках має розв’язок в мішаних стратегіях, а $F\left(p^*, q^*\right)$ — ціна гри.

Якщо ж у другого господарства є l полів, на яких вирощується l різних сільськогосподарських культур. У такій ситуації прибутки обох фермерів залежать від кількості кожної вирощеної культури господарством. Необхідно розробити оптимальні обсяги вирощення культур обома господарствами. Розглянута задача є задачею комбінаторної оптимізації ігрового типу з обмеженнями-перестановками на стратегії обох гравців. Опишемо математичну модель даної задачі.

Розглянемо випадок, коли і на стратегії другого гравця накладаються обмеження, що визначені перестановками, тобто вектор $P^y = (P_1^y, P_2^y, ..., P_l^y)$ — вектор, для якого виконується: $Y = (y_1, y_2, ..., y_l) \in E_{L\mu}(P^y)$, $P_j^y \geq 0 \quad \forall j \in J_l$; $\sum_{j=1}^{l} P_j^y = 1$. Необхідно знайти стратегії гравців X^* і Y^*, які дозволять першому гравцю максимізувати свій виграш, а другому — мінімізувати програш:

$$X^* = \arg \max_{X \in E_{mv}\left(P^x\right)} \left(\min_{Y \in E_{L\mu}(P^y)} F\left(X, Y\right) \right),$$

$$Y^* = \arg \min_{Y \in E_{L\mu}(P^y)} \left(\max_{X \in E_{mv}\left(P^x\right)} F\left(X, Y\right) \right),$$

де

$$F(X, Y) = \sum_{i=1}^{k} x_i \sum_{j=1}^{l} a'_{ij} y_j = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} a'_{ij} x_i y_j ,$$

$$k = \left| E_{mv}\left(P^x\right) \right| = \frac{m!}{\eta_1! \cdot \ldots \cdot \eta_v!}, \ l = \left| E_{L\mu}\left(P^x\right) \right| = \frac{L!}{\lambda_1! \cdot, \ldots, \cdot \lambda_v!} .$$

Ця математична модель описує задачу комбінаторної оптимізації ігрового типу з обмеженнями-перестановками на стратегії обох гравців.

Для розв’язування описаних задач комбінаторної оптимізації розроблено методи, оцінена швидкість збіжності та складності роботи алгоритмів [12].

Висновки. Таким чином, в даній публікації розглянуті економічні інтерпретації та побудовано математичні моделі задач сільськогосподарського виробництва, які можуть використовуватись для моделювання задач більш складного змісту. Для розглянутих класів задач розроблено методи їх розв’язування.

Список використаних джерел:

1. Сергиенко И. В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. Київ: Наук. думка, 1985. 382 с.; 2-е изд., доп. и перераб., 1988. 472 с.
2. Стоян Ю. Г., Ємець О. О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Київ: Інститут системних досліджень освіти, 1993. 188 с.
3. Стоян Ю. Г., Ємець О. О., Ємець Є. М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи: монографія. Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. 103 с.
4. Хіміч О. М. Методи комп’ютерного дослідження математичних моделей з наближено заданими вихідними даними: автореф. дис. … д-ра фіз.-мат. наук: 01.05.02. Київ, 2003. 30 с.
5. Гребеннік І. В. Математичні моделі та методи комбінаторної оптимізації в геометричному проектуванні: автореф. дис. … д-ра техн. наук: спец. 01.05.02. Харків, 2006. 34 с.
6. Ємець О. О., Колєчкіна Л. М. Задачі комбінаторної оптимізація з дробово-лінійними цільовими функціями: монографія / за заг. ред. І. В. Сергієнка. Київ: Наук. думка, 2005. 117 с.
7. Емец О. А., Барболина Т. Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях: монография / под общ. ред. И. В. Сергиенко. Київ: Наук. думка, 2008. 159 с.
8. Устьян Н. Ю. Задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу: автореф. дис.: 01.05.01. Київ: Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова, 2009. 20 с.
9. Емец О. А., Черненко О. А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях: монография. Київ: Наукова думка, 2011. 154 с.
10. Ємець О. О., Черненко О. О. Моделі евклідової комбінаторної оптимізації: монографія. Полтава: РВЦ ПУЕТ, 2011. 204 с.
11. Чілікіна Т. В. Умовні задачі комбінаторної оптимізації на вершинно розташованих множинах та їх розв'язування: автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: спец. 01.05.01 «Теоретичні основи інформатики та кібернетики». Київ, 2012. 30 с.
12. Ольховська О. В. Комбінаторні задачі ігрового типу на множині розміщень: автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.01. Київ, 2015. 20 с.
13. Барболіна Т. М. Теорія і методи комбінаторної оптимізації на розміщеннях: детерміновані та стохастичні задачі: автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук: 01.05.01. Київ, 2020. 34 с.

OVERVIEW OF THE PROBLEMS OF COMBINATORY OPTIMIZATION OF DETERMINATION OF PROFITABILITY OF AGRICULTURAL PRODUCTION AND METHODS OF THEIR SOLUTION

The paper presents an overview of the works of Poltava researchers devoted to mathematical modeling of problems on Euclidean combinatorial sets. Statements of practical tasks of agricultural production are stated, namely: tasks on maintenance of the maximum profitability of production; tasks on the procedure for sowing plots to obtain maximum profitability; tasks on the procedure for sowing part of the plots for maximum profit, taking into account the application of fertilizers; the task of finding the optimal amount of crops grown by two farms (various modifications). Models of these problems in the form of Euclidean combinatorial optimization problems are constructed. The mathematical model of the problem of ensuring maximum profitability of production is reduced to a conditional problem with a fractional-linear objective function on a set of placements. The problem of the order of sowing plots to obtain maximum profitability is interpreted as a completely combinatorial problem on a set of permutations.

For the problem of the order of sowing part of the plots for maximum profit, taking into account the application of fertilizers, a model was built in the form of a partially combinatorial problem on the permutable set. Problems for finding the optimal amount of cultivation of crops by two farms are considered as problems of combinatorial optimization of the game type with constraints that specify the set of permutations. Methods for solving them have been developed for the considered classes of problems. For a conditional problem with a fractional-linear objective function on a combinatorial set of placements, the linearization of the function and further application of the combinatorial clipping method are proposed.

For conditional problems on vertex-set sets, a combinatorial clipping algorithm is constructed, both for fully and partially combinatorial problems, and a modified method of branches and boundaries is constructed. Game-type problems on permutable sets are solved by various iterative methods. Numerical experiments were performed for all types of problems, which confirmed the efficiency of algorithms and speed.

Key words: *combinatorial optimization problems, the problem of vertically arranged sets, combinatorial game-type optimization problems.*

Отримано: 8.10.2021