УДК 519.1
DOI: 10.32626/2308-5878.2022-23.44-48

А. Ю. Динич*,
О. В. Зеленський,** канд. фіз.-мат. наук,
В. М. Дармосюк*,** канд. фіз.-мат. наук

* Відокремлений структурний підрозділ «Кам'янець-Подільський фаховий коледж» НРЗВО «Кам'янець-Подільський державний інститут» м. Кам'янець-Подільський,
** Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,
*** Миколаївський національний університет імені Сухомлинського, м. Миколаїв

ВЕРШИННО-ЗВАЖЕНА ГІПОТЕЗА СЕЙМУРА

Гіпотеза Сеймура – одна з найвідоміших у теорії графів невирішених математичних проблем, яку сформулював Пол Сеймур у 1990 році. Ця проблема також відома під назвою «задача другої околиці».

Орієнтований граф моделює соціальну мережу, у якій жодні дві людини одночасно не знають один одного. Ця гіпотеза стверджує, що знайдеться хоча б одна людина, для якої знайомих знайомих буде не менше, ніж знайомих.

Означення та базові теореми теорії графів описані в [1-3]. Для довільного графа гіпотеза Сеймура залишається невирішеною, проте вже існують доведення для часткових випадків та для деяких видів графів, які наведені у [4-6].

Seacrest Tyler [5] дослідив гіпотезу Сеймура для графів зі зваженими дугами,

В [6] доведено, що кожен орієнтований граф без петель та циклів довжини два містить вершину v, для якої другий окіл більше або рівне за перший помножений на певну константу.

В [7] наведено достатні умови, за яких може існувати вершина Сеймура $v \in V(D)$, а також розглянуто властивості мінімального графа, який не має такої вершини. Доведено, що якщо існує один такий граф, то існує нескінченна кількість сильно зв'язних графів, які не мають такої вершини.

Актуальність обраної теми дослідження визначається стрімкими темпами розвитку сучасної теорії графів, які пов'язані із розширенням її сфери використання: бізнес, логістика, туризм і, головне, моделювання різних мереж.

Одним із продовжень гіпотези є розгляд вершинно-зважених орієнтованих графів. У цій статті ми представили версію гіпотези для вершинно-зважених орієнтованих графів і довели, що гіпотеза Сеймура еквівалентна гіпотезі для вершинно-зважених орієнтованих графів.

Ключові слова: *гіпотеза Сеймура, орієнтований граф, зв'язний граф, орієнтований граф без циклів довжини два.*

Вступ. Усі розглянуті у роботі графи – орієнтовані графи без петель та кратних ребер, що не мають циклів довжини два, тобто граф не може містити одночасно дві дуги (v,u) та (u,v).

Гіпотеза Сеймура. У будь-якому орієнтованому графі D без циклів довжини два існує вершина $v \in V(D)$, для якої $d^{++}(v) \geq d^{+}(v)$.

Таку вершину v називають вершиною Сеймура.

Fisher [4] довів, що остання гіпотеза виконується, якщо D є турнірним графом. Крім цього, було розглянуто узагальнений варіант гіпотези Сеймура для зважених орієнтованих графів [5].

Вершино-зважена гіпотеза Сеймура. Гіпотеза Сеймура може бути розглянута на вершинно-зважених орієнтованих графах. Такі графи мають вагову функцію η, яка присвоює кожній вершині додатне дійсне число. Це можна розширити до знаходження вагової функції на множині вершин S, де

$$\eta(S) = \sum_{v \in S} \eta(v).$$

Вершину v, для якої $\eta\left(N^{++}(v)\right) \geq \eta\left(N^{+}(v)\right)$, назвемо вершиною Сеймура.

Гіпотеза 1 (вершино-зважена гіпотеза Сеймура). Кожний вершинно-зважений орієнтований граф без циклів довжини два містить вершину Сеймура.

Теорема 1. Гіпотеза Сеймура еквівалентна гіпотезі 1.

Доведення. Припустимо, що виконується вершино-зважена гіпотеза. Тоді існує граф із зваженими вершинами D, у якому є вершина Сеймура, для якої виконується $\eta\left(N^{++}(v)\right) \geq \eta\left(N^{+}(v)\right)$. Якщо взяти вагу усіх вершин рівній 1, тобто $\eta(v) = 1$, то з попередньої нерівності слідуватиме $d^{++}(v) \geq d^{+}(v)$, тому $v-$ вершина Сеймура звичайної гіпотези Сеймура. Отже, з справедливості вершинно-зваженої гіпотези випливає справедливість звичайної.

Тепер припустимо, що виконується звичайна гіпотеза Сеймура, та доведемо, що виконується вершинно-зважена. Нехай вершинно-зважений граф D має вагову функцію η та n вершин, $V(D) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Спочатку розглянемо випадок, коли η приймає натуральні значення, тобто $\eta(v) \in \mathbb{N}$. Побудуємо незважений граф D^*, який складається з n підграфів $S_1, S_2, \ldots, S_n$, причому підграф S_i складається з $\eta(v_i)$ ізольованих вершин $\left(\left|V(S_i)\right| = \eta(v_i)\right)$. Якщо $\left(v_i, v_j\right) \in A(D)$, то з кожної вершини підграфа S_i іде дуга в кожну вершину підграфа S_j. Якщо $\left(v_i, v_j\right) \notin A(D)$, то у графі D^* немає жодної дуги, яка починається у вершині підграфа S_i та закінчується у вершині підграфа S_j.

Оскільки звичайна гіпотеза виконується, то граф D^* має вершину Сеймура v^*. Нехай $v^* \in V(S_i)$, тоді $d^{++}\left(v^*\right) \geq d^{+}\left(v^*\right)$, тобто повертаючись до графа D, одержимо, що $\eta\left(N^{++}(v_i)\right) \geq \eta\left(N^{+}(v_i)\right)$, тому граф D має вершину Сеймура v_i, отже, вершинно-зважена гіпотеза виконується.

Розглянемо випадок, коли η приймає додатні раціональні значення, тобто $\eta(v) \in \mathbb{Q}_+$. Нехай $\eta(v_i) = \dfrac{m_i}{\mathrm{n}_i}$, та $p = НСК(n_1, n_2, \ldots, n_k)$. Побудуємо нову вагову функцію $\eta^*(v_i) = p\eta(v_i)$. Зрозуміло, що $\eta^*(v_i) \in \mathbb{N}$, тому за попереднім випадком у графі D з ваговою функцією η^* існує вершина v^*, для якої

$$\eta^*\left(N^{++}\left(v^*\right)\right) \geq \eta^*\left(N^{+}\left(v^*\right)\right) \Leftrightarrow \frac{\eta^*\left(N^{++}\left(v^*\right)\right)}{p} \geq$$

$$\geq \frac{\eta^*\left(N^{+}\left(v^*\right)\right)}{p} \Leftrightarrow \eta\left(N^{++}\left(v^*\right)\right) \geq \eta\left(N^{+}\left(v^*\right)\right).$$

Отже, початковий граф D з функцією η має вершину Сеймура.

Розглянемо випадок коли η приймає додатні дійсні значення, тобто $\eta(v) \in \mathbb{R}_+$. Припустимо протилежне, що граф D з функцією η не має вершини Сеймура. Тоді для довільної вершини v виконується $\eta\left(N^{+}(v)\right) > \eta\left(N^{++}(v)\right)$. Позначимо

$$\varepsilon = \min_{v \in V(D)} \left\{ \eta\left(N^{+}(v)\right) - \eta\left(N^{++}(v)\right) \right\} \qquad (1)$$

Нехай $\varepsilon^* = \dfrac{\varepsilon}{n}$, $\eta(v_i) = a_i$. Оскільки множина раціональних чисел є всюди щільною множиною в множині дійсних чисел, то між двома дійсними числами a_i і $a_i + \varepsilon^*$ завжди знайдеться раціональне число. Позначимо таке число через q_i, тоді $a_i < q_i < a_i + \varepsilon^*$. Побудуємо нову вагову функцію $\eta^*(v_i) = q_i$.

За попереднім випадком, граф D із функцією η^* має вершину Сеймура v, для якої

$$\eta^*\left(N^+(v)\right) \le \eta^*\left(N^{++}(v)\right) \Leftrightarrow \eta^*\left(N^+(v)\right) - \eta^*\left(N^{++}(v)\right) \le 0,$$

$$\eta\left(N^+(v)\right) - \eta\left(N^{++}(v)\right) \le \eta\left(N^+(v)\right) -$$

$$-\eta\left(N^{++}(v)\right) - \left(\eta^*\left(N^+(v)\right) - \eta^*\left(N^{++}(v)\right)\right) =$$

$$= \left(\eta\left(N^+(v)\right) - \eta^*\left(N^+(v)\right)\right) +$$

$$+\left(\eta^*\left(N^{++}(v)\right) - \eta\left(N^{++}(v)\right)\right) < n\varepsilon^* = \varepsilon.$$

Отже, $\eta\left(N^+(v)\right) - \eta\left(N^{++}(v)\right) < \varepsilon$. Отримали суперечність з формулою (1), тоді початковий граф D має вершину Сеймура. Теорему 2 доведено.

Висновки. Розглянуто узагальнену варіацію гіпотези Сеймура, у якій кожна вершина має певну додатну вагу.

Доведено еквівалентність початкової гіпотези Сеймура вершинно-зваженій гіпотезі Сеймура.

Список використаних джерел:

1. Карнаух Т. О., Ставровський А. Б. Теорія графів у задачах. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2004. 90 с.
2. Дяченко М. П. Методичні рекомендації щодо забезпечення самостійної роботи з дисципліни «Дискретні структури». Київ: МАУП, 2018. 77 с.
3. Diestel R. Graph Theory. *Graduate Texts in Mathematics*. 2000. Vol. 173. P. 7.
4. Fisher D. C. Squaring a tournament: a proof of Dean's conjecture. *J. Graph Theory*. 1996. Vol. 23. №1. P. 43-48.
5. Seacrest T. The Arc-Weighted Version of the Second Neighborhood Conjecture. *Journal of Graph Theory*. 2015. Vol. 78 (3). P. 219-228.
6. Chen G., Shen J., Yuster R. Second neighborhood via first neighborhood in digraphs. *Ann. Comb.* 2003. Vol. 7. Issue 1. P. 15-20.
7. Brantner J., Brockman G., Kay B., Snively E. Contributions to Seymour’s second neighborhood conjecture. *Involve.* 2009. Vol. 2. №4. P. 390.

SEYMOUR'S VERTECES-WEIGHTED CONJECTURE

Seymour's conjecture is one of the most famous unsolved mathematical problems in graph theory, which was formulated by Paul Seymour in 1990.

This problem is also known as the «second neighborhood problem». A directed graph models a social network in which no two people know each other at the same time. This conjecture states that there will be at least one person for whom acquaintances of acquaintances will be no less than acquaintances. Definitions and basic theorems of graph theory are described in [1-3]. For an arbitrary graph, Seymour's hypothesis remains unsolved, but there are already proofs for partial cases and for some types of graphs, which are given in [4-6].

Seacrest Tyler [5] investigated Seymour's conjecture for graphs with weighted arcs.

In [6] showed that every simple digraph without loops or digons contains a vertex v for which the second neighborhood is greater than or equal to the first multiplied by a certain constant.

In [7] provided sufficient conditions under which there must exist some $v \in V(D)$, as well as examine properties of a minimal graph which does not have such a vertex. We show that if one such graph exists, then there exist infinitely many strongly-connected graphs having no such vertex.

The relevance of the chosen research topic is determined by the rapid pace of development of modern graph theory, which is associated with the expansion of its scope of use: business, logistics, tourism and, most importantly, modeling of various networks.

One extension of the conjecture is to consider vertex-weighted digraphs. In this paper we introduce a version of the conjecture for vertex-weighted digraphs and proved that the Seymour conjecture is equivalent to conjecture for vertex-weighted digraphs..

Key words: *Seymour's Conjecture, oriented graph, connected graph, directed graph.*

Отримано: 27.10.2022