УДК 517.9
DOI: 10.32626/2308-5878.2022-23.67-86

В. В. Мороз, старший викладач

Хмельницький кооперативний
торговельно-економічний інститут, м. Хмельницький

КРАЙОВА ЗАДАЧА З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ З ОПЕРАТОРАМИ БЕССЕЛЯ — ЕЙЛЕРА — ЛЕЖАНДРА НА СЕГМЕНТІ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПОЛЯРНОЇ ОСІ

Композитні матеріали знаходять широке застосування в різноманітних технологічних процесах, будівництві, енергозбереженні, у зв'язку із чим виникає необхідність постановки і розв'язання задач теплопровідності в середовищах, неоднорідних по своїй структурі (багатошарові тіла). При цьому неоднорідність середовища приводить до розгляду крайових задач із кусково-неперервними або кусково-сталими коефіцієнтами [3] та диференціальними операторами типу Бесселя, Ейлера, Лежандра, Фур'є, що моделюють неоднорідність середовища по геометричній змінній.

В класичній постановці процеси поширення тепла вивчались у припущенні, що межа середовища жорстка по відношенню до відбиття хвиль. Однак, якщо припустити, що на межі середовища може відбуватись поглинання хвиль (м'яка межа), одержимо крайову задачу, що містить похідну по часу в операторах крайових умов та умов спряження виду (1).

Аналітичний розв'язок відповідної крайової задачі можна отримати за допомогою інтегральні перетворення із спектральним параметром, які спрацьовують для задач з м'якими межами за такою ж логічною схемою, як інтегральні перетворення без спектрального параметра в задачах з жорсткими межами.

Побудові одного класу таких гібридних інтегральних перетворень, породжених гібридним диференціальним оператором типу Бесселя — Ейлера — Лежандра на полярній осі, присвячується дана робота.

У роботі також одержано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку мішаної задачі для рівнянь параболічного типу на трискладовому сегменті полярної осі з м'якими межами методом гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя — Ейлера — Лежандра в припущенні, що крайові умови та умови спряження містять похідну по часовій змінній.

Ключові слова: *параболічне рівняння, гібридний диференціальний оператор, функції Коші, впливу та Гріна крайової задачі, гібридне інтегральне перетворення з спектральним параметром, основна тотожність, головні розв'язки.*

Вступ. Моделювання процесів теплопровідності у композитних матеріалах приводить до необхідності будувати розв'язки мішаних крайових задач для рівнянь параболічного чи гіперболічного типу на багатоскладових сегментах декартової або полярної осі [1]. Крайові умови цих задач на межі області Γ задають тепловий режим або тепловий потік у напрямку нормалі $\vec{n}$ чи теплообмін за законом Ньютона із зовнішнім середовищем через поверхню і в загальному випадку мають вигляд [10]:

$$\left(h_1 \frac{\partial}{\partial \vec{n}} + h_2 \right) T(M,t) \Bigg|_{\Gamma} = g(t),$$

де точка $M \in \Gamma$, $\vec{n}$ — зовнішня нормаль, і відображають процес поширення тепла, коли межа тіла є жорсткою по відношенню до відбиття теплових хвиль.

Якщо припустити, що на межі середовища може відбуватись поглинання хвиль (м'яка межа), то оператор крайової умови міститиме похідну по часу:

$$\left(h_1 \frac{\partial}{\partial \vec{n}} + h_2 \frac{\partial}{\partial t} + h_3 \right) T(M,t) \Bigg|_{\Gamma} = g(t), \;\; M \in \Gamma .$$

Крайові умови з похідною по часу розглядалися у монографії [9], в якій закладено основи узагальненої термомеханіки.

У випадку кусково-однорідних середовищ, що мають різні фізико-технічні характеристики або моделюються за різними законами, похідні по часу входитимуть і в умови спряження, а тому диференціальний оператор умови спряження в загальному випадку матиме вигляд:

$$L_{jk} = \left(\alpha_{jk} + \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \beta_{jk} + \gamma_{jk} \frac{\partial}{\partial t}, \tag{1}$$

$k = 1, 2$, j — номер точки спряження.

У статті розглядається мішана крайова задача для еволюційних рівнянь параболічного типу з операторами Бесселя-Ейлера-Лежандра на кусково-однорідній полярній осі з двома точками спряження та м'якими межами.

Постановка задачі. Розглянемо задачу про знаходження обмеженого в області

$$D_2^+ = \{(t,r) : t \in (0,\infty);\, r \in I_2 = (R_0,R_1) \cup (R_1,R_2) \cup (R_2,R_3);\;\; R_0 > 0,\, R_3 < \infty\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь параболічного типу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[u_1] = f_1(t,r), \;\; r \in (R_0, R_1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\gamma_2^2 u_2 - a_2^2 B_{\alpha_2}^*[u_2] = f_2(t,r),\ \ r\in(R_1,R_2), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\gamma_3^2 u_3 - a_3^2 \Lambda_{(\mu)}[u_3] = f_3(t,r),\ \ r\in(R_2,R_3).$$

з нульовими початковими умовами, крайовими умовами

$$\left.\left[\left(\alpha_{11}^0+\delta_{11}^0\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{11}^0+\gamma_{11}^0\frac{\partial}{\partial t}\right]u_1(t,r)\right|_{r=R_0} = g_0(t)\,, \tag{3}$$

$$\left.\left[\left(\alpha_{22}^3+\delta_{22}^3\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{22}^3+\gamma_{22}^3\frac{\partial}{\partial t}\right]u_3(t,r)\right|_{r=R_3} = g_R(t)$$

та умовами спряження

$$\left\{\left[\left(\alpha_{j1}^k+\delta_{j1}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^k+\gamma_{j1}^k\frac{\partial}{\partial t}\right]u_k(t,r) - \left[\left(\alpha_{j2}^k+\delta_{j2}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\beta_{j2}^k+\gamma_{j2}^k\frac{\partial}{\partial t}\right]u_{k+1}(t,r)\right\}\Bigg|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t),\quad j,k=1,2. \tag{4}$$

У систему (2) входять диференціальні оператори Бесселя [6] $B_{\nu,\alpha_1} = \dfrac{d^2}{dr^2}+(2\alpha_1+1)\,r^{-1}\dfrac{d}{dr}-(\nu^2-\alpha_1^2)\,r^{-2}$; Ейлера 2-го порядку [5] $B_{\alpha_2}^* = r^2\dfrac{d^2}{dr^2}+(2\alpha_2+1)\,r\dfrac{d}{dr}+\alpha_2^2$, а також узагальнений диференціальний оператор Лежандра [3]

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2}+\operatorname{cth} r\frac{d}{dr}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1-\operatorname{ch} r}+\frac{\mu_2^2}{1+\operatorname{ch} r}\right).$$

Припускаємо, що на коефіцієнти крайових умов, умов спряження та диференціальних операторів накладені умови: $|\alpha_{11}^0|+|\beta_{11}^0|\neq 0$, $|\alpha_{22}^3|+|\beta_{22}^3|\neq 0$, $\alpha_{jm}^k\ge 0$, $\beta_{jm}^k\ge 0$, $\delta_{jm}^k\ge 0$, $\gamma_{jm}^k\ge 0$, $c_{11,k}\,c_{21,k}>0$, $c_{j1,k}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$, $j,m,k=1,2$; $(\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2)$, $2\alpha_k+1>0$ ($k=1,2$); $\nu\ge\alpha_1$, $\mu_1\ge\mu_2\ge 0$, $(\mu)=(\mu_1,\mu_2)$; $\gamma_j^2\ge 0$, $a_j^2>0$ ($j=\overline{1,3}$).

Побудова інтегрального перетворення. Побудуємо інтегральне перетворення, породжене на множині

$$I_2=\{r: r\in(R_0,R_1)\cup(R_1,R_2)\cup(R_2,R_3);\ R_0>0,\ R_3<\infty\}$$

гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)} = \theta(r-R_0)\,\theta(R_1-r)\,a_1^2\,B_{\nu,\alpha_1}+$$

$$+\theta(r-R_1)\,\theta(R_2-r)\,a_2^2\,B_{\alpha_2}^*+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\,a_3^2\Lambda_{(\mu)},$$

де $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [11], B_{ν,α_1}, $B^*_{\alpha_2}$, $\Lambda_{(\mu)}$ — відповідно диференціальні оператори Бесселя, Ейлера 2-го порядку та узагальнений диференціальний оператор Лежандра; $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$, $2\alpha_j+1>0$, $\nu\geq\alpha_1$, $\mu_1\geq\mu_2\geq 0$, $\mu=(\mu_1,\mu_2)$; $a_j>0$ ($j=\overline{1,3}$).

Означення. Областю задання ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ назвемо множину G функцій $g(r)=\{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями:

1) функція $f(r)=\{B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)], B^*_{\alpha_2}[g_2(r)], \Lambda_{(\mu)}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2;
2) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}^k_{j1}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}^k_{j1}\right)g_k(r)-\left(\tilde{\alpha}^k_{j2}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}^k_{j2}\right)g_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k}=0,\quad j,k=1,2;\tag{5}$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left(\tilde{\alpha}^0_{11}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}^0_{11}\right)g_1(r)\Bigg|_{r=R_0}=0,\quad \left(\tilde{\alpha}^3_{22}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}^3_{22}\right)g_3(r)\Bigg|_{r=R_3}=0.\tag{6}$$

У рівностях (5), (6) беруть участь коефіцієнти: $\tilde{\alpha}^k_{jm}=\alpha^k_{jm}-(\beta^2+\gamma^2)\,\delta^k_{jm}$, $\tilde{\beta}^k_{jm}=\beta^k_{jm}-(\beta^2+\gamma^2)\,\gamma^k_{jm}$; $\gamma^2\geq 0$, β — спектральний параметр.

Припустимо, що виконані умови на коефіцієнти:

$$\alpha^k_{jm}\geq 0,\ \beta^k_{jm}\geq 0,\ \delta^k_{jm}\geq 0,\ \gamma^k_{jm}\geq 0;\ c_{j1,k}=\alpha^k_{2j}\beta^k_{1j}-\alpha^k_{1j}\beta^k_{2j};$$

$$c_{11,k}\cdot c_{21,k}>0,\ c_{j2,k}=\delta^k_{2j}\gamma^k_{1j}-\delta^k_{1j}\gamma^k_{2j}=0,$$

$$\alpha^k_{1j}\gamma^k_{2j}-\alpha^k_{2j}\gamma^k_{1j}=\beta^k_{1j}\delta^k_{2j}-\beta^k_{2j}\delta^k_{1j};\ j,m,k=1,2;$$

$$\tilde{\alpha}^3_{22}=\alpha^3_{22}-\delta^3_{22}(\beta^2+\gamma^2),\ \tilde{\beta}^3_{22}=\beta^3_{22}-\gamma^3_{22}(\beta^2+\gamma^2);$$

$$|\alpha^3_{22}|+|\beta^3_{22}|\neq 0;\ |\delta^3_{22}|+|\gamma^3_{22}|\neq 0.$$

Наведемо необхідні в подальшому допоміжні твердження.

Лема 1. Для функцій $u(r)=\{u_1(r);u_2(r);u_3(r)\}\in G$ та $v(r)=\{v_1(r);v_2(r);v_3(r)\}\in G$ з умов спряження (4) випливає базова тотожність

$$\begin{gathered}\left[u'_k(r)v_k(r)-u_k(r)v'_k(r)\right]\Big|_{r=R_k}=\\=\frac{c_{21,k}}{c_{11,k}}\left[u'_{k+1}(r)v_{k+1}(r)-u_{k+1}(r)v'_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}.\end{gathered}\tag{7}$$

Доведення. Введемо до розгляду числа

$$\tilde{a}_{11}^k = \tilde{\alpha}_{11}^k \tilde{\alpha}_{22}^k - \tilde{\alpha}_{21}^k \tilde{\alpha}_{12}^k, \ \tilde{a}_{21}^k = \tilde{\beta}_{11}^k \tilde{\alpha}_{22}^k - \tilde{\beta}_{21}^k \tilde{\alpha}_{12}^k,$$

$$\tilde{a}_{12}^k = \tilde{\alpha}_{11}^k \tilde{\beta}_{22}^k - \tilde{\alpha}_{21}^k \tilde{\beta}_{12}^k, \ \tilde{a}_{22}^k = \tilde{\beta}_{11}^k \tilde{\beta}_{22}^k - \tilde{\beta}_{21}^k \tilde{\beta}_{12}^k.$$

Безпосереднім обчисленням встановлюємо рівність

$$\tilde{a}_{11}^k \ \tilde{a}_{22}^k - \tilde{a}_{12}^k \ \tilde{a}_{21}^k = c_{11,k} \cdot c_{21,k}. \tag{8}$$

Розглянемо алгебраїчну систему:

$$\tilde{\alpha}_{j1}^k u_k'(R_k) + \tilde{\beta}_{j1}^k u_k(R_k) = \tilde{\alpha}_{j2}^k u_{k+1}(R_k) + \tilde{\beta}_{j2}^k u_{k+1}(R_k), \ \ j = 1, 2 \tag{9}$$

стосовно чисел $u_k(R_k)$ та $u_k'(R_k)$.

Визначник алгебраїчної системи (9) обчислюється безпосередньо

$$\tilde{\alpha}_{11}^k \tilde{\beta}_{11}^k - \tilde{\alpha}_{21}^k \tilde{\beta}_{11}^k = -c_{11,k} \neq 0.$$

Алгебраїчна система (9) має єдиний розв’язок [4]:

$$u_k'(R_k) = \frac{1}{c_{11,k}} \left[\tilde{a}_{21}^k u_{k+1}'(R_k) + \tilde{a}_{22}^k u_{k+1}(R_k) \right], \tag{10}$$

$$u_k(R_k) = -\frac{1}{c_{11,k}} \left[\tilde{a}_{11}^k u_{k+1}'(R_k) + \tilde{a}_{12}^k u_{k+1}(R_k) \right].$$

Рівностями (10) зв’язані і компоненти функції $v(r)$:

$$v_k'(R_k) = \frac{1}{c_{11,k}} \left[\tilde{a}_{21}^k v_{k+1}'(R_k) + \tilde{a}_{22}^k v_{k+1}(R_k) \right], \tag{11}$$

$$v_k(R_k) = \frac{1}{c_{11,k}} \left[\tilde{a}_{11}^k v_{k+1}'(R_k) + \tilde{a}_{12}^k v_{k+1}(R_k) \right].$$

Безпосередньо знаходимо, що

$$\begin{aligned} u_k'(R_k)\, v_k(R_k) - u_k(R_k)\, v_k'(R_k) &= \frac{\tilde{a}_{11}^k \tilde{a}_{22}^k - \tilde{a}_{12}^k \tilde{a}_{21}^k}{c_{11,k}^2} \left[u_{k+1}'(r) v_{k+1}(r) - \right. \\ \left. - u_{k+1}(r) v_{k+1}'(r) \right] \Big|_{r=R_k} &= \frac{c_{21,k}}{c_{11,k}} \left[u_{k+1}'(r)\, v_{k+1}(r) - u_{k+1}(r) v_{k+1}'(r) \right] \Big|_{r=R_k}. \end{aligned} \tag{12}$$

Оскільки рівність (12) співпадає з рівністю (7), то доведення леми завершено.

Визначимо величини

$$a_1^2 \sigma_1 = \frac{c_{11,1}\, c_{11,2}\, R_1^{2\alpha_2+1}}{c_{21,1}\, c_{21,2} R_1^{2\alpha_1+1}} \frac{\operatorname{sh} R_2}{R_1^{2\alpha_1+1}}, \ a_2^2 \sigma_2 = \frac{c_{11,2} \operatorname{sh} R_2}{c_{21,2}\, R_2^{2\alpha_2+1}}, \ a_3^2 \sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\begin{aligned} \sigma(r) = \theta(r - R_0)\,\theta(R_1 - r)\,\sigma_1\, r^{2\alpha_1+1} + \\ + \theta(r - R_1)\,\theta(R_2 - r)\,\sigma_2\, r^{2\alpha_2-1} + \theta(r - R_2)\,\theta(R_3 - r)\,\sigma_3 \operatorname{sh} r \end{aligned} \tag{13}$$

та скалярний добуток

$$\big(u(r),v(r)\big)=\int_{R_0}^{R_1}u(r)v(r)\sigma(r)\,dr\equiv\int_{R_0}^{R_1}u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr+ \\ +\int_{R_1}^{R_2}u_2(r)v_2(r)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}\,dr+\int_{R_2}^{R_3}u_3(r)v_3(r)\sigma_3\,\mathrm{sh}\,r\,dr. \tag{14}$$

Лема 2. ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ самоспряжений.

Доведення. Згідно правила (14) скалярний добуток

$$\Big(M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[u],v(r)\Big)=\int_{R_0}^{R_1}\Big(a_1^2B_{\nu,\alpha_1}[u_1]\Big)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}\,dr+ \\ +\int_{R_1}^{R_2}\Big(a_2^2B_{\alpha_2}^*[u_2]\Big)v_2(r)\sigma_2\,\mathrm{sh}\,r\,dr+\int_{R_2}^{R_3}\Big(a_3^2\Lambda_\mu[u_3]\Big)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}\,dr. \tag{15}$$

Проінтегруємо в (15) під знаком інтегралів два рази частинами:

$$\Big(M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[u],v\Big)=a_1^2\sigma_1\left[r^{2\alpha_1+1}\left(\frac{du_1}{dr}v_1-u_1\frac{dv_1}{dr}\right)\right]\Bigg|_{R_0}^{R_1}+ \\ +\int_{R_0}^{R_1}u_1(r)\Big(a_1^2B_{\nu,\alpha_1}[v_1]\Big)\sigma_1r^{2\alpha_1+1}\,dr+a_2^2\,\sigma_2\left[r^{2\alpha_2+1}\left(\frac{du_2}{dr}v_2-u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\right]\Bigg|_{R_1}^{R_2}+ \\ +\int_{R_1}^{R_2}u_2(r)\Big(a_2^2B_{\alpha_2}^*[v_2]\Big)\sigma_2r^{2\alpha_2-1}\,dr+a_3^2\sigma_3\left[\mathrm{sh}\,r\left(\frac{du_3}{dr}v_3-u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\right]\Bigg|_{R_2}^{R_3}+ \\ +\int_{R_2}^{R_3}u_3(r)\Big(a_3^2\Lambda_{(\mu)}[v_3]\Big)\,\sigma_3\,\mathrm{sh}\,r\,dr. \tag{16}$$

Якщо $\tilde{\alpha}_{11}^0\neq0$, то знаходимо, що

$$\left(\frac{du_1}{dr}v_1-u_1\frac{dv_1}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_0}=\Big(\tilde{\alpha}_{11}^0\Big)^{-1}\left(\tilde{\alpha}_{11}^0\frac{du_1}{dr}+\tilde{\beta}_{11}^0u_1\right)\Bigg|_{r=R_0}\cdot v_1(R_0)- \\ -\left(\tilde{\alpha}_{11}^0\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{11}^0\right)v_1(r)\Bigg|_{r=R_0}\cdot u_1(R_0)=\Big(\tilde{\alpha}_{11}^0\Big)^{-1}\big[0\cdot v_1(R_0)-0\cdot u_1(R_0)\big]=0 \tag{17}$$

Якщо $\tilde{\alpha}_{22}^3\neq0$, то знаходимо, що

$$\left(\frac{du_3}{dr}v_3-u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_3}=\Big(\tilde{\alpha}_{22}^3\Big)^{-1}\left(\tilde{\alpha}_{22}^3\frac{du_3}{dr}v_3+\tilde{\alpha}_{22}^3\frac{dv_3}{dr}u_3\right)\Bigg|_{r=R_3}=$$

$$
\begin{aligned}
&=\left(\tilde{\alpha}_{22}^{3}\right)^{-1}\left[\left(\tilde{\alpha}_{22}^{3}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{22}^{3}\right)u_3(r)\Big|_{r=R_3}\cdot v_3(R_3)-\right.\\
&\left.-\left(\tilde{\alpha}_{22}^{3}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{22}^{3}\right)v_3(r)\Big|_{r=R_3}\cdot u_3(R_3)\right]=\\
&=\left(\tilde{\alpha}_{22}^{3}\right)^{-1}\left[0\cdot v_3(R_3)-0\cdot u_3(R_3)\right]=0.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Внаслідок базової тотожності (7) в точці $r=R_1$ маємо:

$$
\begin{aligned}
&a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\left(\frac{du_1}{dr}v_1-u_1\frac{dv_1}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_1}-a_2^2\sigma_2R_1^{2\alpha_2+1}\left(\frac{du_2}{dr}v_2-u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_1}=\\
&=\left(a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}}-a_2^2\sigma_2R_1^{2\alpha_2+1}\right)\left(\frac{du_2}{dr}v_2-u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_1}=0
\end{aligned}
\tag{19}
$$

тому що в силу вибору чисел σ_1, σ_2 вираз

$$
\begin{aligned}
&a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}}-a_2^2\,\sigma_2R_1^{2\alpha_2+1}=\frac{c_{11,1}\,c_{11,2}}{c_{21,1}\,c_{21,2}}\cdot\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\operatorname{sh}R_2\cdot\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}}-\\
&-\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\frac{\operatorname{sh}R_2}{R_2^{2\alpha_2+1}}R_1^{2\alpha_2+1}=\frac{c_{11,2}R_1^{2\alpha_2+1}}{c_{21,2}R_2^{2\alpha_2+1}}\operatorname{sh}R_2(1-1)\equiv 0\,.
\end{aligned}
$$

Внаслідок базової тотожності (4) в точці $r=R_2$ маємо:

$$
\begin{aligned}
&a_2^2\sigma_2R_2^{2\alpha_2+1}\left(\frac{du_2}{dr}v_2-u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_2}-a_3^2\sigma_3\operatorname{sh}R_2\left(\frac{du_3}{dr}v_3-u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_2}=\\
&=\left(a_2^2\sigma_2R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}}-a_3^2\sigma_3\operatorname{sh}R_2\right)\left(\frac{du_3}{dr}v_3-u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_2}=0
\end{aligned}
\tag{20}
$$

тому що в силу вибору чисел σ_2 та σ_3 вираз

$$
a_2^2\sigma_2R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}}-a_3^2\sigma_3\operatorname{sh}R_2=\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\operatorname{sh}R_2\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}}-\operatorname{sh}R_2(1-1)=0\,.
$$

Внаслідок рівностей (17)-(20) рівність (16) набуває вигляду

$$
\left(M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[u(r)],v(r)\right)=\left(u(r),M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[v(r)]\right). \tag{21}
$$

Рівність (21) означає, що ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ самоспряжений оператор.

Доведення леми завершено.

Оскільки ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ самоспряжений і не має на множині I_2 особливих точок, то його спектр дійсний і дискретний [7].

Власні елементи ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ (власні числа та відповідні їм власні функції) знайдемо в результаті розв'язання відповідної задачі Штурма-Ліувілля.

Побудуємо на множині I_2 розв'язок системи диференціальних рівнянь Бесселя, Ейлера та Лежандра

$$\begin{gathered}\left(B_{\nu_1,\alpha_1}+b_1^2\right)V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)=0\,,\ r\in(R_0,R_1)\\ \left(B_{\alpha_2}^{*}+b_3^2\right)V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)=0\,,\ r\in(R_1,R_2)\\ \left(\Lambda_{(\mu)}+b_2^2\right)V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)=0\,,\ r\in(R_2,R_3)\end{gathered}\qquad(22)$$

за крайовими умовами (3) та умовами спряження (4).

Тут $b_j=a_j^{-1}(\beta^2+k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2\geq 0$, $j=\overline{1,3}$; $V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)$ — компоненти спектральної функції

$$V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta)=\sum_{j=1}^{3}\theta(r-R_{j-1})\theta(R_j-r)V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)\,.\qquad(23)$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\nu,\alpha_1}+b_1^2\right)v=0$ утворюють функції Бесселя $J_{\nu,\alpha_1}(b_1r)$ та $N_{\nu,\alpha_1}(b_1r)$ [6]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $\left(B_{\alpha_2}^{*}+b_2^2\right)v=0$ утворюють функції $r^{-\alpha_2}\cos(b_2\ln r)$ та $r^{-\alpha_2}\sin(b_3\ln r)$ [5]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)}+b_3^2\right)v=0$ утворюють функції $A_{\nu_3^*}^{(\mu)}(\operatorname{ch}r)$ та $B_{\nu_3^*}^{(\mu)}(\operatorname{ch}r)$, $\nu_3^*=-1/2+i\,b_3$ [3].

Якщо в силу лінійності задачі Штурма-Ліувілля покласти

$$\begin{gathered}V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)=A_1J_{\nu,\alpha_1}(b_1r)+B_1N_{\nu,\alpha_1}(b_1r)\,,\ r\in(R_0,R_1)\,,\\ V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)=A_2\,r^{-\alpha_2}\cos(b_2\ln r)+B_2\,r^{-\alpha_2}\sin(b_2\ln r)\,,\ r\in(R_1,R_2)\,,\qquad(24)\\ V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)=A_3\,A_{\nu_3^*}^{(\mu)}(\operatorname{ch}r)+B_3\,B_{\nu_3^*}^{(\mu)}(\operatorname{ch}r)\,,\ r\in(R_2,R_3)\,,\end{gathered}$$

то крайові умови (3) та умови спряження (4) для визначення величин A_j, B_j ($j=\overline{1,3}$) дають однорідну алгебраїчну систему із шести рівнянь:

$$\begin{gathered}u_{\nu,\alpha_1;11}^{01}(b_1R_0)A_1+u_{\nu,\alpha_1;11}^{02}(b_1R_0)B_1=0\\ u_{\nu,\alpha_1;j1}^{11}(b_1R_1)A_1+u_{\nu,\alpha_1;j1}^{12}(b_1R_1)B_1-Y_{\alpha_2;j2}^{11}(b_2,R_1)A_2-Y_{\alpha_2;j1}^{12}(b_2,R_1)B_2=0\,,\\ Y_{\alpha_2;j1}^{21}(b_2,R_2)A_2+Y_{\alpha_2;j1}^{22}(b_2,R_2)B_2-Y_{\nu_3^*;j2}^{(\mu),21}(\operatorname{ch}R_2)A_3-Y_{\nu_3^*;j2}^{(\mu),22}(\operatorname{ch}R_2)B_3=0\qquad(25)\end{gathered}$$

$$Y^{(\mu),31}_{\nu_3^*;22}(\operatorname{ch} R_3)A_3 + Y^{(\mu),32}_{\nu_3^*;22}(\operatorname{ch} R_3)B_3 = 0 .$$

Функції, що беруть участь у системі (25), загальноприйняті [8].

Введемо до розгляду функції:

$$\delta_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_0, b_1R_1) = u^{01}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_0)\, u^{12}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_1) -$$

$$-u^{02}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_0)\, u^{11}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_1),\ j = 1, 2;$$

$$\delta_{\alpha_2;jk}(b_2; R_1, R_2) = Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_2, R_1)\, Y^{22}_{\alpha_2;k1}(b_2, R_2) -$$

$$-Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_2, R_1)\, Y^{21}_{\alpha_2;k1}(b_2, R_2), k = 1, 2;$$

$$\delta^{(\mu)}_{\nu_3^*;j2}(\operatorname{ch} R_2, \operatorname{ch} R_3) = Y^{(\mu),21}_{\nu_3^*;j2}(\operatorname{ch} R_2)Y^{(\mu),32}_{\nu_3^*;22}(\operatorname{ch} R_3) - Y^{(\mu),22}_{\nu_3^*;j2}(\operatorname{ch} R_2)Y^{(\mu),31}_{\nu_3^*;22}(\operatorname{ch} R_3);$$

$$a_{\nu,(\alpha);j}(\beta) = \delta_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_0, b_1R_1)\delta_{\alpha_2;2j}(b_2; R_1, R_2) -$$

$$-\delta_{\nu,\alpha_1;21}(b_1R_0, b_1R_1)\delta_{\alpha_2;1j}(b_2; R_1, R_2).$$

Алгебраїчна система (25) має ненульовий розв'язок тоді й тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю [4]:

$$\delta^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta) \equiv \delta^{(\mu)}_{\nu_3^*;22}(\operatorname{ch} R_2, \operatorname{ch} R_3)\, a_{\nu,(\alpha);1}(\beta) - -\delta^{(\mu)}_{\nu_3^*;12}(\operatorname{ch} R_2, \operatorname{ch} R_3)\, a_{\nu,(\alpha);2}(\beta) = 0. \quad (26)$$

Алгебраїчне рівняння (26) — це трансцендентне рівняння для обчислення власних чисел β_n ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ (β_n — корінь рівняння (26)).

Підставимо в систему (25) $\beta = \beta_n$ $(b_j(\beta_n) = b_{jn})$ й відкинемо останнє рівняння в силу лінійної залежності. Припустимо, що $A_1 = -A_0u^{02}_{\nu,\alpha_1;11}(b_{1n}R_0)$, $B_1 = A_0u^{01}_{\nu,\alpha_1;11}(b_{1n}R_0)$, де $A_0 \neq 0$ підлягає визначенню. Перше рівняння системи (25) стає тотожністю, а друге й третє рівняння системи дають для визначення величин A_2, B_2 алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_{2n}, R_1)A_2 + Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_{2n}, R_1)B_2 = A_0\delta_{\nu,\alpha_1;j1}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1),\ j = 1, 2 . \quad (27)$$

Визначник алгебраїчної системи (27) обчислюється безпосередньо

$$q_{\alpha_2}(\beta_n) = Y^{11}_{\alpha_2;12}(b_{2n}, R_1)Y^{12}_{\alpha_2;22}(b_{2n}, R_1) -$$

$$-Y^{11}_{\alpha_2;22}(b_{2n}, R_1)Y^{12}_{\alpha_2;12}(b_{2n}, R_1) = c_{21,1}b_{2n}R_1^{2\alpha_2+1} \neq 0.$$

Алгебраїчна система (24) має єдиний розв'язок [4]:

$$A_2 = \frac{A_0}{q_{\alpha_2}(\beta_n)}\Big[\delta_{\nu,\alpha_1;11}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1)Y^{11}_{\alpha_2;22}(b_{2n}, R_1) - -\delta_{\nu,\alpha_1;21}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1)Y^{12}_{\alpha_2;12}(b_{2n}, R_1)\Big], \quad (28)$$

$$B_2 = \frac{A_0}{q_{\alpha_2}(\beta_n)}\Big[\delta_{\nu,\alpha_1;21}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1)Y^{11}_{\alpha_2;12}(b_{2n}, R_1) -$$
$$-\delta_{\nu,\alpha_1;11}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1)Y^{11}_{\alpha_2;22}(b_{2n}, R_1)\Big].$$

При визначених вже A_2, B_2 для визначення величин A_3, B_3 четверте й п'яте рівняння системи дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$Y^{(\mu),21}_{\nu^*_{3n};j2}(\operatorname{ch} R_2)A_3 + Y^{(\mu),22}_{\nu^*_{3n};j2}(\operatorname{ch} R_2)B_3 = -A_0\left[q_{\alpha_2}(\beta_n)\right]^{-1} a_{\nu,(\alpha);j}(\beta_n) . \quad (29)$$

Визначник алгебраїчної системи (29) обчислюється безпосередньо:

$$q_{(\mu)}(\beta_n) = Y^{(\mu),21}_{\nu^*_{3n};12}(\operatorname{ch} R_2)Y^{(\mu),22}_{\nu^*_{3n};22}(\operatorname{ch} R_2) -$$
$$-Y^{(\mu),21}_{\nu^*_{3n};22}(\operatorname{ch} R_2)Y^{(\mu),22}_{\nu^*_{3n};12}(\operatorname{ch} R_2) = \frac{c_{22}}{s_{(\mu)}(b_{3n})\operatorname{sh} R_2} \neq 0.$$

Алгебраїчна система (29) має єдиний розв'язок [4]:

$$A_0 = q_{\alpha_2}(\beta_n)q_{(\mu)}(\beta_n), \; A_3 = -\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta_n), \; B_3 = \omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta_n); \quad (30)$$

$$\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(\beta_n) = a_{\nu,(\alpha);1}(\beta_n)Y^{(\mu),2j}_{\nu^*_{3n};22}(\operatorname{ch} R_2) - a_{\nu,(\alpha);2}(\beta_n)Y^{(\mu),2j}_{\nu^*_{3n};12}(\operatorname{ch} R_2); \; j = 1, 2 .$$

Підставимо визначені формулами (28) та (30) величини A_j, B_j у рівності (24). Одержуємо компоненти спектральної функції $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)$:

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n) = q_{\alpha_2}(\beta_n)q_{(\mu)}(\beta_n)\times$$
$$\times\Big[u^{01}_{\nu,\alpha;11}(b_{1n}R_0)N_{\nu,\alpha_1}(b_{1n}r) - u^{02}_{\nu,\alpha;11}(b_{1n}R_0)J_{\nu,\alpha_1}(b_{1n}r)\Big].$$

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = q_{(\mu)}(\beta_n)\Big[\delta_{\nu,\alpha_1;11}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1)\psi^1_{\alpha_2;22}(b_{2n}, r) -$$
$$-\delta_{\nu,\alpha_1;21}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1)\psi^1_{\alpha_2;12}(b_{2n}, r)\Big], \quad (31)$$

$$\psi^1_{\alpha_2;j2}(b_{2n}, r) = Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_{2n}, R_1)r^{-\alpha_2}\cos(b_{2n}\ln r) - Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_{2n}, R_1)r^{-\alpha_2}\sin(b_{2n}\ln r),$$

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3} = \omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta_n)B^{(\mu)}_{\nu^*_{3n}}(\operatorname{ch} r) - \omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta_n)A^{(\mu)}_{\nu^*_{3n}}(\operatorname{ch} r),$$

$$\nu^*_{3n} = -1/2 + i\,b_{3n} .$$

Згідно формули (23) спектральна функція визначена.

Відомо [7], що система $\left\{V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ власних функцій узагальнено ортогональна на множині I_2 з ваговою функцією $\sigma(r)$. Квадрат норми власної функції обчислюється за правилом:

$$\| V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|_1^2 = \int\limits_{R_0}^{R_3} [V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)]^2 \sigma(r)\, dr + \theta_2(\beta_n,\beta_n) . \qquad (32)$$

Перейдемо в подальшому до ортонормованої системи власних функцій:

$$\left\{ V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n) : \| V_{\nu(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|_1 \right\}_{n=1}^{\infty} \equiv \left\{ v_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n) \right\}_{n=1}^{\infty} .$$

Наявність вагової функції $\sigma(r)$, спектральної функції $v_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)$ дозволяє визначити пряме $H_{\nu,(\alpha);n}^{(\mu)}$ й обернене $H_{\nu,(\alpha);n}^{-(\mu)}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП), породжене на множині I_2 ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$:

$$H_{\nu,(\alpha);n}^{(\mu)}[g(r)] = \int\limits_{R_0}^{R_3} g(r)\, v_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)\, \sigma(r)\, dr \equiv \tilde{g}_n , \qquad (33)$$

$$H_{\nu,(\alpha);n}^{-(\mu)}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n\, v_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n) \equiv g(r) . \qquad (34)$$

Математичним обгрунтуванням правил (33), (34) є твердження.

Теорема 1. Корені β_n трансцендентного рівняння $\delta_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta) = 0$ складають дискретний спектр ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$: дійсні, різні, симетричні відносно точки $\beta = 0$ й на піввісі $\beta > 0$ утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою $\beta = \infty$.

Теорема 2. Система $\left\{ v_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n) \right\}_{n=1}^{\infty}$ власних функції ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ узагальнено ортонормована, повна й замкнена.

Теорема 3. Будь-яка функція $g(r) \in G$ зображається абсолютно й рівномірно збіжним на множині I_2 рядом Фур'є за системою $\left\{ v_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n) \right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_{R_0}^{R_3} g(\rho) v_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)\, \sigma(\rho)\, d\rho \right) v_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n) . \qquad (35)$$

Застосування правил (33), (34) до розв'язування відповідних задач базується на основній тотожності інтегрального перетворення ГДО $M_{\nu(\alpha)}^{(\mu)}$.

Визначимо величини та функції:

$$d_1 = \frac{a_1^2 \sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}}{c_{11,1}}\ ;\ d_2 = \frac{a_2^2 \sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}}{c_{11,2}}\ ;$$

$$\tilde{g}_{1n} = \int_{R_0}^{R_1} g_1(r)\, v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\, \sigma_1\, r^{2\alpha_1+1} dr\ ;$$

$$\tilde{g}_{2n} = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r)\, v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta_n)\, \sigma_2\, r^{2\alpha_2-1}\, dr\ ;$$

$$\tilde{g}_{3n} = \int_{R_2}^{R_3} g_3(r)\, v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\, \sigma_3 \operatorname{sh} r\, dr\ ;$$

$$Z_{\nu,(\alpha);i2}^{(\mu),k}(\beta_n) = \left(\tilde{\alpha}_{i2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{i2}^k\right) v_{\nu,(\alpha);k+1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_k}\ ;\ i,k = 1,2\ .$$

Теорема 4. Якщо функція

$$f(r) = \left\{ B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)];\ B_{\alpha_2}^*[g_2(r)];\ \Lambda_{(\mu)}[g_3(r)] \right\}$$

неперервна на множині I_2, а функції $g_i(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{22}^0 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{22}^3\right) v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right]\Big|_{r=R_0} = g_0\ ,$$

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{22}^3 d/dr + \tilde{\beta}_{22}^3\right) v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right]\Big|_{r=R_3} = g_R \tag{36}$$

та умови спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j1}^k\right) g_k(r) - \left(\tilde{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^k\right) g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}\ ;\ j,k = 1,2\ , \tag{37}$$

то має місце основна тотожність інтегрального перетворення ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$:

$$\begin{aligned} H_{\nu,(\alpha);n}^{(\mu)}\left[M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)]\right] &= -\beta_n^2\, \tilde{g}_n - \sum_{m=2}^{3} k_m^2 \tilde{g}_{mn} + \\ &+ \left(-\tilde{\alpha}_{11}^0\right)^{-1} v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)\, a_1^2 \sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1} g_0 + \\ &+ \left(\tilde{\alpha}_{22}^3\right)^{-1} v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n) a_3^2 \sigma_3 \operatorname{sh} R_3 g_R + \\ &+ \sum_{k=1}^{2} d_k \left[Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),k}(\beta_n)\, \omega_{2k} - Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),k}(\beta_n)\, \omega_{1k} \right]. \end{aligned} \tag{38}$$

Доведення. Згідно правила (33) маємо:

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);n}\left[\; M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]\right] \equiv \int\limits_{R_0}^{R_3} M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[g(r)] v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\,\sigma(r)\,dr =$$

$$= \int\limits_{R_0}^{R_1}\left(a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)]\right) v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)\,\sigma_1\, r^{2\alpha_1+1} dr + \int\limits_{R_1}^{R_2}\left(a_2^2 B^*_{\alpha_2}[g_2(r)]\right)\times \tag{39}$$

$$\times v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\,\sigma_2\, r^{2\alpha_2-1}\,dr + \int\limits_{R_2}^{R_3}\left(a_3^2 \Lambda_{(\mu)}[g_3(r)]\right) v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)\,\sigma_3 \operatorname{sh} r\,dr\;.$$

Проінтегруємо рівності (39) під знаками інтегралів два рази частинами:

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);n}\left[M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]\right] =$$

$$= a_1^2\sigma_1\left[r^{2\alpha_1+1}\left(\frac{dg_1}{dr} v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n) - g_1(r)\frac{dv^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}}{dr}\right)\right]\Bigg|_{R_0}^{R_1} +$$

$$+\int\limits_{R_0}^{R_1} g_1(r)\left(a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)]\right)\sigma_1\, r^{2\alpha_1+1}\,dr +$$

$$+a_2^2\sigma_2\left[r^{2\alpha_2-1}\left(\frac{dg_2}{dr} v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n) - g_2\frac{dv^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}}{dr}\right)\right]\Bigg|_{R_1}^{R_2} +$$

$$+\int\limits_{R_1}^{R_2} g_2(r)\left(a_2^2 B^*_{\alpha_1}[v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)]\right)\sigma_2\, r^{2\alpha_2-1}\,dr + \tag{40}$$

$$+a_3^2\sigma_3\left[\operatorname{sh} r\left(\frac{dg_3}{dr} v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n) - g_3(r)\frac{d\,v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}}{dr}\right)\right]\Bigg|_{R_2}^{R_3} +$$

$$+\int\limits_{R_2}^{R_3} g_3(r)\left(a_3^2\;\Lambda_{(\mu)}[v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)]\right)\sigma_3 \operatorname{sh} r\,dr\;.$$

Якщо $\tilde{\alpha}^0_{11} \neq 0$, то знаходимо, що

$$-a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}\left(\frac{dg_1}{dr} v^{(\mu)}_{n,(\alpha),1} - g_1\frac{dv^{(\mu)}_{\nu,(\alpha),1}}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_0} = \left(-\tilde{\alpha}^0_{11}\right)^{-1} a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}\times$$

$$\times\left[\left(\tilde{\alpha}_{11}^{0}\frac{dg_1}{dr}+\tilde{\beta}_{11}^{0}g_1\right)\bigg|_{r=R_0} v_{\nu,(\alpha),1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)-\right.$$
$$\left.-\left(\tilde{\alpha}_{11}^{0}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{11}^{0}\right)v_{\nu,(\alpha),1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\bigg|_{r=R_0}\cdot g_1(R_0)\right]= \tag{41}$$
$$=\left(-\tilde{\alpha}_{11}^{0}\right)^{-1}a_1^2\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}\left[g_0v_{\nu,(\alpha),1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)-0\cdot g_1(R_0)\right]=$$
$$=\left(-\tilde{\alpha}_{11}^{0}\right)^{-1}v_{\nu,(\alpha),1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)a_1^2\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}\cdot g_0.$$

Якщо $\tilde{\alpha}_{33}^{3}\neq 0$, то знаходимо, що

$$a_3^2\sigma_3\,\mathrm{sh}\,R_3\left(\frac{dg_3}{dr}v_{\nu,(\alpha),3}^{(\mu)}(r,\beta_n)-g_3(r)\frac{dv_{\nu,(\alpha),3}^{(\mu)}}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_3}=a_3^2\sigma_3\,\mathrm{sh}\,R_3\left(\tilde{\alpha}_{22}^{3}\right)^{-1}\times$$
$$\times\left[\left(\tilde{\alpha}_{22}^{3}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{33}^{3}\right)g_3(r)\bigg|_{r=R_3} v_{\nu,(\alpha),3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)-\right.$$
$$\left.-\left(\tilde{\alpha}_{22}^{3}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{33}^{3}\right)v_{\nu,(\alpha),3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\bigg|_{r=R_3}\cdot g_3(R_3)\right]= \tag{42}$$
$$=\left(\tilde{\alpha}_{22}^{3}\right)^{-1}v_{\nu,(\alpha),3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)a_3^2\sigma_3\,\mathrm{sh}\,R_3\cdot g_R-0\cdot g_3(R_3)a_3^2\sigma_2\,\mathrm{sh}\,R_3\left(\tilde{\alpha}_{22}^{3}\right)^{-1}=$$
$$=\left(\tilde{\alpha}_{22}^{3}\right)^{-1}v_{\nu,(\alpha),3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)a_3^2\sigma_3\,\mathrm{sh}\,R_3\cdot g_R\equiv\left(\tilde{\alpha}_{22}^{3}\right)^{-1}v_{\nu,(\alpha),3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)\,\mathrm{sh}\,R_3\cdot g_R.$$

Для випадку, коли умови спряження неоднорідні, базова тотожність (7) має структуру

$$u_k'(R_k)v_k(R_k)-u_k(R_k)v_k'(R_k)=$$
$$=\frac{c_{21,k}}{c_{11,k}}\left[u_{k+1}'(R_k)v_{k+1}(R_k)-u_{k+1}(R_k)v_{k+1}'(R_k)\right]+ \tag{43}$$
$$+c_{11,k}^{-1}\left[Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),k}(\beta_n)\,\omega_{2k}-Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),k}(\beta_n)\,\omega_{1k}\right].$$

Внаслідок базової тотожності (43) в точці спряження R_1 маємо:

$$a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\left(g_1'v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}-g_1v_{\nu,(\alpha);1}^{\prime(\mu)}\right)\bigg|_{r=R_1}-$$
$$-a_2^2\sigma_2R_2^{2\alpha_2+1}\left(g_2'v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}-g_2v_{\nu,(\alpha);2}^{\prime(\mu)}\right)\bigg|_{r=R_1}=$$

$$=\left(a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}}-a_2^2\sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1}\right)\times$$

$$\times\left.\left(\frac{dg_2}{dr}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)-g_2(r)\frac{dv^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}}{dr}\right)\right|_{r=R_1}+ \qquad (44)$$

$$+a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}c_{11,1}^{-1}\left[Z^{(\mu),1}_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)\omega_{21}-Z^{(\mu),1}_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)\omega_{11}\right]=$$

$$=d_1\left[Z^{(\mu),1}_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)\omega_{21}-Z^{(\mu),1}_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)\omega_{11}\right]$$

тому що в силу вибору σ_1, σ_2 вираз

$$a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}}-a_2^2\sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1}=\frac{c_{11,1}}{c_{21,1}}\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\operatorname{sh}R_2\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}}-$$

$$-\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\operatorname{sh}R_2=\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\operatorname{sh}R_2(1-1)\equiv 0\,.$$

Внаслідок базової тотожності (43) в точці спряження $r=R_2$ маємо:

$$a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}\left.\left(\frac{dg_2}{dr}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}-g_2\frac{dv^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}}{dr}\right)\right|_{r=R_2}-$$

$$-a_3^2\sigma_3\operatorname{sh}R_2\left.\left(\frac{dg_3}{dr}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}-g_3\frac{dv^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}}{dr}\right)\right|_{r=R_2}=$$

$$=\left(a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}}-a_3^2\sigma_3\operatorname{sh}R_2\right)\times \qquad (45)$$

$$\times\left(\frac{dg_3}{dr}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}-g_3\frac{dv^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}}{dr}\right)+a_3^2\sigma_3\operatorname{sh}R_2\times$$

$$\times c_{11,2}^{-1}\left(Z^{(\mu),2}_{\nu,(\alpha),12}(\beta_n)\omega_{22}-Z^{(\mu),2}_{\nu,(\alpha),22}(\beta_n)\omega_{12}\right)=$$

$$=d_2\left(Z^{(\mu),2}_{\nu,(\alpha),12}(\beta_n)\omega_{22}-Z^{(\mu),2}_{\nu,(\alpha),22}(\beta_n)\omega_{12}\right),$$

тому, що в силу вибору чисел σ_2 та σ_3 вираз

$$a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}}-a_3^2\sigma_3\operatorname{sh}R_2=\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\operatorname{sh}R_2\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}}-\operatorname{sh}R_2=\operatorname{sh}R_2(1-1)\equiv 0\,.$$

Внаслідок диференціальних тотожностей

$$\left[\,a_1^2B_{\nu,\alpha_1}+(\beta_n^2+k_1^2)\right]v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)\equiv 0\,;$$

$$\left[\,a_2^2B^*_{\alpha_2}+(\beta_n^2+k_2^2)\right]v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\equiv 0\,;$$

$$\left[\, a_3^2\Lambda_{(\mu)} + (\beta_n^2 + k_3^2)\right] v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta_n) \equiv 0$$

отримуємо диференціальні рівності

$$a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}\left[\, v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right] = -(\beta_n^2 + k_1^2) v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\ ,$$
$$a_2^2 B_{\alpha_2}^{*}\left[\, v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right] = -(\beta_n^2 + k_2^2) v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta_n)\ , \qquad (46)$$
$$a_3^2 \Lambda_{(\mu)}\left[\, v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right] = -(\beta_n^2 + k_3^2) v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\ .$$

Підставимо в рівність (37) одержані функціональні рівності (38)-(46). Рівність (40) набуває вигляду:

$$H_{\nu,(\alpha);n}^{(\mu)}\left[\, M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)]\right] = \left(-\tilde{\alpha}_{11}^{0}\right)^{-1} v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)\, a_1^2 \sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1} g_0 +$$
$$+\left(\tilde{\alpha}_{22}^{3}\right)^{-1} v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)(\operatorname{sh} R_3) g_R + \qquad (47)$$
$$+\sum_{k=1}^{2} d_k \left[Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{2k} - Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{1k}\right] - \sum_{m=1}^{3} (\beta_n^2 + k_m^2)\tilde{g}_{mn}$$

Оскільки

$$\sum_{m=1}^{3} (\beta_n^2 + k_m^2)\tilde{g}_{mn} = \beta_n^2 \sum_{m=1}^{3} \tilde{g}_{mn} + \sum_{m=1}^{3} k_m^2 \tilde{g}_{mn} = \beta_n^2 \tilde{g}_n + \sum_{m=1}^{3} k_m^2 \tilde{g}_{mn}\ ,$$

то рівність (47) співпадає з рівністю (38).

Доведення теореми завершене.

Побудова розв’язку крайової задачі. Запишемо систему (2) і нульові початкові умови в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \gamma_1^2 - a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}\right) u_1(t,r) \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \gamma_3^2 - a_3^2 B_{\alpha_2}^{*}\right) u_3(t,r) \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \gamma_2^2 - a_2^2 \Lambda_{(\mu)}\right) u_2(t,r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t,r) \\ f_2(t,r) \\ f_3(t,r) \end{bmatrix};\ \left.\begin{bmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \\ u_3(t,r) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (48)$$

Інтегральний оператор $H_{\nu,(\alpha);n}^{(\mu)}$, який діє за правилом (33), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{\nu,(\alpha);n}^{(\mu)}[\cdots] = \left[\int_0^{R_1} \cdots v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\, \sigma_1 r^{2\alpha_1+1} dr \right.$$
$$\left. \int_{R_1}^{R_2} \cdots v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta_n)\, \sigma_2\, r^{2\alpha_2-1} dr \qquad \int_{R_2}^{R_3} \cdots v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\, \sigma_3 \operatorname{sh} r\, dr \right]. \qquad (49)$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (49) за правилом множення матриць до задачі (48). Внаслідок основної тотожності (38) маємо задачу Коші [11]:

$$\frac{d\,\tilde{u}_n}{dt} + (\beta_n^2 + \gamma^2)\,\tilde{u}_n = \tilde{F}_n(t)\,, \tag{50}$$

$$\tilde{u}_n(t)\,|_{t=0} = 0\ ;\ \gamma^2 = \max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\}\ .$$

Тут функція

$$\tilde{F}_n = \tilde{f}_n(t) + \sum_{k=1}^{2} d_k \left[Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)\,\omega_{2k}(t) - Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)\,\omega_{1k}(t) \right] +$$

$$+\left(-\tilde{\alpha}^0_{11}\right)^{-1} v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta_n)\,a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1} g_0(t) + \left(\tilde{\alpha}^3_{22}\right)^{-1} v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n)\,\mathrm{sh}\,R_3 g_R(t)\,.$$

Розв’язком задачі Коші (50) є функція

$$\tilde{u}_n(t) = \int_0^t e^{-(\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)}\ \tilde{F}_n(\tau)\,d\tau\ . \tag{51}$$

Оператор $H^{-(\mu)}_{\nu,(\alpha);n}$ згідно правила (34) як обернений до (33) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H^{-(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[\cdots] = \begin{bmatrix} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdots v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdots v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdots v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n) \end{bmatrix}. \tag{52}$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (52) за правилом множення матриць до матриці елементу $[\tilde{u}_n(t)]$, де функція $\tilde{u}_n(t)$ визначена за формулою (51). У результаті елементарних перетворень маємо єдиний розв’язок задачі (2)-(4):

$$u_j(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(t)\,v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n) = \int_0^t \int_0^{R_1} H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j1}(t-\tau,r,\rho)\ f_1(\tau,\rho)\,\times$$

$$\times\sigma_1\,\rho^{2\alpha_1+1} d\rho\,d\tau + \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j2}(t-\tau,r,\rho)\ f_2(\tau,\rho)\,\sigma_2\,\rho^{2\alpha_2-1}\,d\rho\,d\tau +$$

$$+\int_0^t \int_{R_2}^{R_3} H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j3}(t-\tau,r,\rho)\ f_3(\tau,\rho)\,\sigma_3\,\mathrm{sh}\,\rho\,d\rho\,d\tau + \tag{53}$$

$$+\int_0^t W^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1j}(t-\tau,r)g_0(\tau)\,d\tau+\int_0^t W^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3j}(t-\tau,r)g_R(\tau)\,d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}d_k\int_0^t\Big[R^{(\mu),j,k}_{\nu,(\alpha);12}(t-\tau,r)\,\omega_{2k}(\tau)-$$

$$-R^{(\mu),j,k}_{\nu,(\alpha);22}(t-\tau,r)\,\omega_{1k}(\tau)\Big]d\tau\,;\;\; j=\overline{1,3}\,.$$

У рівностях (50) беруть участь головні розв'язки даної параболічної задачі:

1) породжені неоднорідністю системи функцій впливу

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j3}(t,r,\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}\;v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)\,v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta_n)\,,\;\; j,k=\overline{1,3}\,; \quad (54)$$

2) породжені крайовою умовою у точках $r=R_0$ та $r=R_3$ функції Гріна

$$W^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1j}(t,r)=(-\tilde{\alpha}^0_{11})^{-1}R_0^{2\alpha_1+1}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}\;v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(R_0,\beta_n)\,v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)\,; \quad (55)$$

$$W^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3j}(t,r)=\left(\tilde{\alpha}^3_{22}\right)^{-1}R_3^{2\alpha_2+1}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}\;v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(R_3,\beta_n)\,v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)\,;$$

$$j=\overline{1,3}\,;$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^{(\mu),j,k}_{\nu,(\alpha);12}(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}\;Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);i2}(\beta_n)\,v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)\,;\;\; i,k=1,2\,;\;\; j=\overline{1,3} \quad (53)$$

Функція

$$u(t,r)=\theta(r-R_0)\,\theta(R_1-r)\,u_1(t,r)+$$

$$+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)u_2(t,r)+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\,u_3(t,r)$$

повністю характеризує процес в даному середовищі.

Зауваження 2. Якщо $\gamma^2=\gamma_1^2>0$, то $k_1^2=0$, $k_2^2=\gamma_1^2-\gamma_2^2\ge 0$, $k_3^2=\gamma_1^2-\gamma_3^2\ge 0$; якщо $\gamma^2=\gamma_2^2>0$, то $k_1^2=\gamma_2^2-\gamma_1^2\ge 0$, $k_2^2=0$; $k_3^2=\gamma_2^2-\gamma_3^2\ge 0$; якщо $\gamma^2=\gamma_3^2>0$, то $k_1^2=\gamma_3^2-\gamma_1^2\ge 0$, $k_2^2=\gamma_3^2-\gamma_2^2\ge 0$, $k_3^2=0$.

Зауваження 3. Інтегральне зображення (53) аналітичного розв'язку параболічної задачі (2)-(4) носить алгоритмічний характер. Параметри допускають реалізацію будь-якого часткового випадку безпосереднім вибором із загальних структур (в рамках моделі, звичайно).

Зауваження 4. Якщо початкові умови ненульові ($u_j|_{t=0} = g_j(r)$), то в рівностях (50) будуть брати участь ще доданки

$$\sum_{k=1}^{2} d_k \left[R^{(\mu),j,k}_{\nu,(\alpha);12}(t,r)\,\psi_{2k} - R^{(\mu),j,k}_{\nu,(\alpha);22}(t,r)\,\psi_{1k} \right] + W^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3j}(t,r)\psi_{33};$$

$$\psi_{jk} = \left[\delta^k_{j1} g'_k(R_k) + \gamma^k_{j1}\, g_k(R_k)\right] - \left[\delta^k_{j2} g'_{k+1}(R_k) + \gamma^k_{j2}\, g_{k+1}(R_k)\right], \quad (57)$$

$$\psi_{33} = \delta^3_{22}\; g'_3(R_3) + \gamma^3_{22}\; g_3(R_3); \quad j,k = 1,2 .$$

Поява доданків (57) відображає вплив початкових умов на м’якість середовища по відношенню до відбиття теплових хвиль. Якщо $\delta^k_{im} = 0$, $\gamma^k_{im} = 0$, то ми одержуємо випадок жорсткої межі кусково-однорідного середовища D_2.

Висновки. Методом скінченного гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя-Ейлера-Лежандра зі спектральним параметром одержано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку мішаної задачі для рівнянь параболічного типу на трискладовому сегменті полярної осі з м’якими межами. Побудований розв’язок неперервно залежать від параметрів та даних задачі й може використовуватись як в теоретичних дослідженнях, так і при комп’ютерному моделюванні еволюційних процесів в кусково-однорідних середовищах.

Список використаних джерел:

1. Mantic V. Mathematical Methods and Models in Composites. *Computational and Experimental Methods in Structures*. Vol. 5. 506 p.
2. Конет І. М., Ленюк М. П. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. Чернівці: Прут, 2002. 248 с.
3. Конет І. М., Пилипюк Т. М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах: монографія. Кам’янець-Подільський: Абетка-Світ, 2016. 244 с.
4. Курош А. Г. Курс вышей алгебры. Москва: Наука, 1971. 432 с.
5. Ленюк М. П. Інтегральні перетворення, породжені диференціальним оператором Ейлера другого порядку. Чернівці, 2012.
6. Ленюк М. П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. Киев, 1983. 62 с. (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 83.3).
7. Ленюк М. П., Мороз В. В. Побудова скінченного гібридного інтегрального перетворення при наявності спектрального параметру в крайових умовах та умовах спряження. *Науковий вісник Чернівецького університету.* Чернівці: Рута, 2006. Вип. 314-315. Математика. С. 105-113.
8. Ленюк М. П., Шинкарик М. І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур’є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. Тернопіль: Економ. думка, 2004. 368 с.
9. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. Київ: Наук. думка, 1976. 310 с.

10. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1977. 736 с.
11. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Москва: Физматгиз, 1959. 468 с.
12. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. Москва: Наука, 1965. 328 с.

BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH SOFT BOUNDARIES FOR PARABOLIC-TYPE EQUATIONS WITH BESSEL-EULER-LEGENDRE OPERATORS ON A SEGMENT OF A PIECEWISE HOMOGENEOUS POLAR AXIS

Composite materials are widely used in a variety of technological processes, building, energy saving, in connection with which there is a need to pose and solve problems of thermal conductivity in environments that are heterogeneous in their structure (multilayer bodies). At the same time, the heterogeneity of the medium leads to the consideration of boundary value problems with piecewise continuous or piecewise constant coefficients [3] and differential operators of the Bessel, Euler, Legendre, and Fourier type, which model the heterogeneity of the medium in terms of a geometric variable.

In the classical setting, the processes of heat propagation were studied under the assumption that the boundary of the medium is rigid in relation to the reflection of waves. However, if we assume that wave absorption can occur at the boundary of the medium (soft boundary), we obtain a boundary value problem containing a time derivative in the operators of boundary conditions and conjugation conditions of the form (1).

The analytical solution of the corresponding boundary value problem can be obtained using integral transformations with a spectral parameter, which work for problems with soft boundaries according to the same logical scheme as integral transformations without a spectral parameter in problems with hard boundaries.

This paper is devoted to the construction of one class of such hybrid integral transformations generated by a hybrid differential operator of the Bessel-Euler-Legendre type on the polar axis.

In this article an integral image of the exact analytical solution of a mixed problem for parabolic equations on a three-complex segment of the polar axis with soft boundaries is obtained by the method of a hybrid integral transformation of the Bessel-Euler-Legendre type under the assumption that the boundary conditions and conjugation conditions contain a derivative with respect to the time variable.

Key words: *parabolic equation, hybrid differential operator, Cauchy’s functions and Green's functions of the boundary value problem, hybrid integral transformations with spectral parameter, the primary identity, main solutions.*

Отримано: 11.10.2022