УДК 536.2
DOI: 10.32626/2308-5878.2023-24.91-100

Р. С. Мусій, д-р фіз.-мат. наук, професор,
М. І. Клапчук, канд. фіз.-мат. наук,
Р. Я. Пелех, аспірант,
О. М. М'яус, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

ВИЗНАЧЕННЯ ДВОВИМІРНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У ПЛИТАХ ТА ПАНЕЛЯХ З ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИМИ МЕЖАМИ ЗА НАЯВНОСТІ ДЖЕРЕЛ ТЕПЛА

Сформульовано нестаціонарні двовимірні задачі теплопровідності для плит та панелей з плоскопаралельними межами за наявності в них об'ємно розподілених нестаціонарних джерел тепла. Запропоновано методику побудови розв'язку сформульованих задач теплопровідності для розглядуваних тіл. Методика використовує апроксимацію розподілу температури в обох елементах по товщинній змінній кубічним поліномом. Коефіцієнти апроксимаційного полінома подаються через інтегральні по товщинній змінній характеристики температури та умови на крайові значення температури на зовнішніх поверхнях плити та панелі. У результаті вихідні двовимірні початково-крайові задачі на температуру для плити і панелі зведено до одновимірних початково-крайових задач на інтегральні характеристики температури.

Для побудови розв'язку початково-крайової задачі на інтегральні характеристики температури у випадку безмежної по поздовжній і поперечній координатах плити використано інтегральне перетворення Лапласа за часом та інтегральне перетворення Фур'є за поздовжньою координатою. Розв'язок задачі на інтегральні характеристики температури у випадку панелі знайдено з використанням інтегрального перетворення Лапласа за часом і скінченого інтегрального перетворення за поперечною координатою. Вирази інтегральних характеристик температури для плити та панелі отримано у вигляді згорток функцій, що відповідають однорідним розв'язкам початково-крайових задач на інтегральні характеристики температури та функцій, що описують наявні нестаціонарні джерела тепла у цих тілах і задані поверхневі значення температури.

Записано загальні розв'язки двовимірних початково-крайових задач теплопровідності для плити та панелі за наявних в них довільно змінних по просторових координатах нестаціонарних джерел тепла та умов конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем на поверхнях розглядуваних тіл.

Ключові слова: *двовимірні задачі теплопровідності, плита, панель, нестаціонарне температурне поле, кубічна апроксимація, інтегральні характеристики, інтегральне перетворення Фур’є, скінчене інтегральне перетворення, перетворення Лапласа.*

Вступ. В якості елементів будівельних та інженерних конструкцій часто використовують плити та панелі з плоскопаралельними межами. У процесі функціонування та експлуатації таких елементів у них виникають об’ємно розподілені нестаціонарні джерела тепла. Ці джерела тепла зумовлюють відповідний розподіл температури, який має суттєвий вплив на міцність і надійність плит та панелей та тривалість їх експлуатації.

У літературі добре відомі методи побудови розв’язків, як правило, одновимірних за координатами нестаціонарних задач теплопровідності для відповідних елементів канонічної форми. Загальні положення теорії теплопровідності у твердих тілах викладено у монографії [1, с. 17-45]. Вплив нестаціонарних температурних полів на температурні напруження у елементах конструкцій різної форми, зокрема, розглянуто в роботі [2, с. 28-54, с. 67-156]. Монографія [3, с. 22-60, с. 86-118, с. 146-192] присвячена розрахунку одновимірних температурних полів і напружень у тілах канонічної форми за умов конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем. У праці [4, с. 3-12] розглянуто визначення і аналіз тепла Джоуля та температури у електропровідному пластинчастому елементі за короткочасного індукційного нагріву нестаціонарним електромагнітним полем. У монографії [5, с. 48-198] розглянуто визначення та аналіз одновимірних температурних полів і напружень у неферомагнітних електропровідних тілах з плоскопаралельними границями за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди.

З аналізу даних літературних джерел встановлено, що розрахунок одновимірних температурних полів та температурних напружень, зумовлених різними фізичними факторами у одновимірних тілах канонічної форми, розглянуто в достатньому обсязі. Однак розрахунок та аналіз двовимірних температурних полів у пластинчастих та трубчастих елементах відповідних інженерних конструкцій вивчено не достатньо.

У даному розділі запропоновано ефективну методику моделювання та наближеного визначення двовимірних нестаціонарних температурних полів у плитах та панелях за наявності нестаціонарних об’ємно розподілених джерел тепла та умов конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем. Дана задача є актуальна для оцінки впливу характеру температурних режимів на роботоздатність, надійність і тривалість експлуатації розглядуваних елементів.

Температурне поле у тілі з плоскопаралельними межами. Розглядаємо тіло з плоскопаралельними межами, віднесене до Декартової системи координат $Ox_1^* x_2^* x_3^*$, площина $x_1^* O x_2^*$ якої співпадає з серединною площиною тіла товщиною $2h$ вздовж осі Ox_3^*. Температурне поле $T(x_1, x_2, x_3, Fo)$, яке зумовлене дією нестаціонарних неперервно розподілених теплових джерел Q, описується рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} + (\Delta_1 - \frac{\partial}{\partial Fo})T = -\frac{h^2}{\lambda} Q. \tag{1}$$

Тут $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$; x_1, x_2, x_3 – безрозмірні Декартові координати, віднесені до півтовщини тіла h; $Fo = \frac{at}{h^2}$ – критерій Фур'є; t – час; a і λ – коефіцієнти температуро- і теплопровідності.

На поверхнях тіла $x_3 = \pm 1$ виконуються умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)^{\pm} \pm Bi^{\pm}(T^{\pm} - T_c^{\pm}) = 0. \tag{2}$$

Тут $B_i^{\pm} = H^{\pm} h$ – критерій Біо; $H^{\pm}$ – відносний коефіцієнт тепловіддачі з поверхонь $x_3 = \pm 1$; $T^{\pm}$ і $\left(\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)^{\pm}$ – значення температури і її похідної на поверхнях $x_3 = \pm 1$; $T_c^{\pm}$ – температури зовнішніх середовищ, які контактують із поверхнями $x_3 = \pm 1$ $\left(T_c^{\pm}(x_1, x_2, 0) = T_c^{(0)}(x_1, x_2, 0)\right)$; $T_c^{(0)}$ – початкова температура зовнішнього середовища.

Значення температури T у початковий момент часу $Fo = 0$ є відомим

$$T(x_1, x_2, x_3, 0) = T_c^{(0)}(x_1, x_2, 0). \tag{3}$$

Для наближеного розв'язування задачі (1)-(3) будемо апроксимувати розподіл температури за товщинною координатою x_3 поліноміальним законом

$$T(x_1, x_2, x_3, Fo) = \sum_{j-1}^{m} b_{j-1}(x_1, x_2, F_0) x_3^{j-1}. \tag{4}$$

Функції $b_{j-1}(x_1, x_2, Fo)$ виражаємо через інтегральні характеристики температурного поля

$$T_s = \frac{2s-1}{2} \int_{-1}^{1} T(x_1, x_2, x_3, Fo) x_3^{s-1} \partial x_3 \tag{5}$$

і задані крайові умови (2). Рівняння для визначення s ($s = m - 2$) інтегральних характеристик T_s отримуємо множенням рівняння (1) на x_3^{s-1} та інтегруванням по цій координаті згідно формулb (5) з врахуванням виразу (4).

Тоді, обмежуючись кубічним законом розподілу температури по товщині тіла, для визначення інтегральних характеристик T_1 і T_2 отримуємо таку систему рівнянь

$$(\Delta_1 - \frac{\partial}{\partial F_0})T_1 - 2R_1T_1 - 2R_2T_2 = -W_1 - 3(R_4T_c^+ + R_5T^-)$$

$$(\Delta_1 - \frac{\partial}{\partial F_0})T_2 - 6R_3T_2 - 6R_2T_1 = W_2 - 15(R_1T_c^+ - R_6T_c^-) \,. \tag{6}$$

Коефіцієнти $b_{j-1}(j = \overline{1,4})$ апроксимаційного полінома (4) для даного випадку будуть

$$b_0 = (1 + \frac{1}{3}R_1)T_1 + \frac{1}{3}R_2T_2 - \frac{1}{2}(R_4T_c^+ + R_5T_c^-)\,,$$

$$b_1 = \frac{3}{5}R_2T_1 + (1 + \frac{3}{5}R_3)T_2 - \frac{3}{2}(R_1T_c^+ - R_6T_c^-)\,,$$

$$b_2 = -R_1T_1 - R_2T_2 + \frac{3}{2}(R_4T_c^+ + R_5T_c^-)\,,$$

$$b_3 = -R_2T_1 - R_3T_2 + \frac{5}{2}(R_7T_c^+ - R_6T_c^-)\,. \tag{7}$$

Тут

$$R_1 = 3\frac{3(B_i^+ + B_i^-) + B_i^+B_i^-}{R_8}\,;\ R_2 = \frac{15}{2}\frac{B_i^+ - B_i^-}{R_8}\,;$$

$$R_3 = -5\frac{3 + 2(B_i^+ + B_i^-) + B_i^+B_i^-}{R_8}\,;\ R_4 = \frac{B_i^+(6 + B_i^-)}{R_8}\,;$$

$$R_5 = \frac{B_i^-(6 + B_i^+)}{R_8}\,;\ R_6 = \frac{B_i^-(3 + B_i^+)}{R_8}\,;\ R_7 = \frac{B_i^+(3 + B_i^-)}{R_8}\,;$$

$$R_8 = 36 + 9(B_i^+ + B_i^-) + 2B_i^+B_i^-\,;$$

$W_s = \frac{h^2}{\lambda}\frac{2S-1}{2}\int_{-1}^{1} Qx_3^{s-1}dx_3$ (s = 1, 2) – інтегральні характеристики джерел тепла Q.

У випадку граничних умов 1-го роду, тобто при

$$T(x_1, x_2, \pm 1, Fo) = T_c^{\pm}(x_1, x_2, Fo) \tag{8}$$

система рівнянь (6) запишеться у вигляді

$$\left(\Delta_1 - \frac{\partial}{\partial Fo}\right) T_1 - 3T_1 = -W_1 - \frac{3}{2}(T_c^+ + T_c^-)\,,$$

$$\left(\Delta_1 - \frac{\partial}{\partial Fo}\right) T_2 - 15T_2 = -W_2 - \frac{15}{2}(T_c^+ - T_c^-)\,. \tag{9}$$

Відповідно коефіцієнти $b_{j-1}(j=\overline{1,4})$ будуть рівні

$$b_0 = \frac{3}{2}T_1 - \frac{1}{4}(T_c^+ + T_c^-); \quad b_1 = \frac{5}{2}T_2 - \frac{3}{4}(T_c^+ - T_c^-)\,;$$

$$b_2 = -\frac{3}{2}T_1 + \frac{3}{4}(T_c^+ + T_c^-); \quad b_3 = -\frac{5}{2}T_2 + \frac{5}{4}(T_c^+ - T_c^-)\,. \tag{10}$$

Для граничних умов 2-го роду

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)^{\pm} = \pm q^{\pm}, \tag{11}$$

де $q^{\pm}$ – задана інтенсивність теплових потоків на поверхнях $x_3 = \pm 1$, отримуємо відомим граничним переходом з рівнянь (6) таку вихідну систему рівнянь для інтегральних характеристик T_1 і T_2 :

$$\left(\Delta_1 - \frac{\partial}{\partial Fo}\right) T_1 = -W_1 + \frac{1}{2}(q^+ + q^-)$$

$$\left(\Delta_1 - \frac{\partial}{\partial Fo}\right) T_2 - \frac{5}{2}T_2 = -W_2 - \frac{5}{4}(q^+ - q^-)\,, \tag{12}$$

де коефіцієнти $b_{j-1}(j=\overline{1,4})$ апроксимаційного полінома визначаються співвідношеннями:

$$b_0 = T_1 + \frac{1}{4}(q^+ + q^-); \quad b_1 = \frac{5}{4}T_2 + \frac{1}{8}(q^+ - q^-)\,;$$

$$b_2 = \frac{1}{4}(q^+ + q^-); \quad b_3 = -\frac{5}{12}T_2 - \frac{5}{24}(q^+ - q^-)\,. \tag{13}$$

Початкові умови на інтегральні характеристики T_s $(s = 1, 2)$ відповідно до виразів (4) і (5) запишуться

$$T_s(x_1, x_2, 0) = \frac{2s-1}{2}\int_{-1}^{1} T(x_1, x_2, x_3, 0)\, x_3^{s-1}\, dx_3\,. \tag{14}$$

Зокрема, коли температура середовища стала й початкова температура тіла дорівнює цій температурі, умови (14) будуть

$$T_s(x_1, x_2, 0) = 0\,. \tag{15}$$

Таким чином, рівняннями на інтегральні характеристики T_s температури T, яка відраховується від початкової, будуть рівняння (6), (9) і (12) при $T_s^{\pm} = 0$.

До систем рівнянь (6), (9) і (12) і початкових умов (14) або (15) необхідно приєднати теплові крайові умови для функцій T_s на торцевих поверхнях тіла. Ці умови отримуються інтегруванням, згідно формули (5), наявних на торцевих поверхнях тіла умов теплообміну.

Якщо джерела тепла Q не залежать від однієї з координат наприклад x_l $(l = 1,2)$, то при певних крайових умовах температурне поле може не залежати від цієї координати. Тоді для знаходження інтегральних характеристик T_s такого температурного поля необхідно в системах рівнянь (6), (9) і (12) оператор $\Delta_l = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ замінити оператором $\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}$. При цьому співвідношення (7), які описують коефіцієнти $b_{j-1}(j = \overline{1,4})$ апроксимаційного полінома (4) через інтегральні характеристики T_s, залишаються без змін.

Температурне поле у безмежній плиті. Розглядаємо безмежну за координатами x_1 і x_2 плиту з плоскопаралельними межами $x_3 = \pm 1$.

Використаємо пряме і обернене інтегральні перетворення Фур'є за координатою x_1 та виконаємо безпосереднє інтегрування за часом у перетворених рівняннях (6) за врахування нульових початкових умов на функції T_1, T_2. У результаті отримуємо такі вирази інтегральних характеристик температури

$$T_1(x_1, Fo) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{2} \int_0^{F_0} \frac{e^{\rho_i \tau}}{2p_i + \xi_1} \left[\tilde{W}_1(\xi, Fo - \tau) \frac{P_i + \xi^2 + 6R_3}{2R_2} - \right. \tag{16}$$
$$\left. -\tilde{W}_2(\xi, Fo - \tau) \right] d\tau e^{-i\xi x_1} d\xi.$$

$$T_2(x_1, Fo) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2R_2} \left[\tilde{W}_2(\xi, Fo) - \left(\frac{\partial}{\partial F_0} + \xi^2 + 2R_1 \right) \tilde{T}_1(\xi, Fo) - e^{-i\xi x_1} \right] d\xi. \tag{17}$$

Тут $\tilde{W}_1(\xi, Fo) = \frac{h^2}{\lambda} \tilde{Q}_1(\xi, Fo)$; $\tilde{W}_2(\xi, Fo) = \frac{h^2}{\lambda} \tilde{Q}_2(\xi, Fo)$, $\tilde{T}_1(\xi, Fo)$ – трансформанти Фур'є інтегральних характеристик джерел тепла Q та інтегральної характеристики температури $T_1(x_1, Fo)$; ξ – параметр інтегрального перетворення Фур'є;

$$p_{1,2} = -\frac{\xi_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\xi_1}{\alpha}\right)^2 - \xi_2}; \quad \xi_1 = 2\xi^2 + 2R_1 + 6R_3;$$

$$\xi_2 = \xi^4 + \xi^2(2R_1 + 6R_3) + 12R_1R_3 - 6R_2.$$

Вирази R_j $(j = \overline{1,3})$ наявні у формулах (7).

При знайдених функціях T_1, T_2, на основі співвідношень (4) і (7), використовуючи подання (16), (17) отримуємо вирази для нестаціонарного температурного поля $T\left(x_1, x_3, Fo\right)$ у безмежній плиті.

Температурне поле у панелі. Розглянемо панель на основах $x_3 = \pm 1$ і торцевих $x_1 = \pm d$ поверхнях якої мають місце умови (2) конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем.

Приймаємо, що температура зовнішнього середовища постійна і початкова температура панелі дорівнює цій температурі. Визначення температурного поля у розглядуваній панелі зводиться до розв'язування системи рівнянь (6) на інтегральні характеристики $T_s (s = 1, 2)$ температури за умови конвективного теплообміну на поверхнях $x_3 = \pm 1$. Побудуємо для даного випадку розв'язок системи рівнянь (6) з урахуванням прийнятих умов конвективного теплообміну також на торцевих перетинах $x_1 = \pm d$. Застосуємо по координаті x_1 скінчене інтегральне перетворення

$$\tilde{T}_s(\beta_m, F_0) = \int_{-d}^{d} T_s(x_1, F_0) K(\beta_m, x_1) dx_1 . \tag{18}$$

Тут: $K(\beta_m, x_1)$ – ядро інтегрального перетворення, що відповідає умовам конвективного теплообміну на торцевих перетинах $x_1 = \pm d$; β_m – корені трансцендентного рівняння, що відповідає крайовим умовам (2) на торцевих перетинах $x_1 = \pm d$.

Ядро інтегрального перетворення має вигляд [6, с. 168-185]

$$K(\beta_m, x_1) = \sqrt{2}\Big[(\beta_m \cos\beta_m d + \bar{Bi} \sin\beta_m d)\cos\beta_m x_1 +$$

$$+(\vec{Bi} \cos\beta_m d - \beta_m \sin\beta_m d)\sin\beta_m x_1\Big] \times$$

$$\times \left[(\beta_m^2 + \vec{Bi}_*)(2d + \frac{Bi_*^+}{\beta_m^2 + (Bi_*^+)^2}) + Bi^- \right]^{-\frac{1}{2}} . \tag{19}$$

Тут $Bi_*^{\pm} = H_*^{\pm} d$ – значення критерію Біо на поверхнях $x_1 = \pm d$, $H_*^{\pm}$ – значення коефіцієнта тепловіддачі на торцевих перетинах $x_1 = \pm d$ панелі.

Застосуємо скінчене інтегральне перетворення з ядром (19) до системи рівнянь (6). Отримані в результаті дії скінченого інтегрального перетворення (19) рівняння системи (6) на трансформанти функцій $T_1\left(x_1, Fo\right)$ і $T_2\left(x_1, Fo\right)$ інтегруємо за часом Fo. Знаходимо вирази цих трансформант у вигляді:

$$\tilde{T}_1(\beta_m, Fo) = \int_0^{Fo} \left[\tilde{W}_1(\beta_m, Fo-\tau) \sum_{i=1}^{2} \frac{p_i + \beta_m + GR_3}{2(p_i + \beta_{m1})} e^{p_i \tau} - \right.$$
$$\left. -2R_2 \tilde{W}_2(\beta_m, Fo-\tau) \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2(p_i + \beta_{m_1})} e^{p_i \tau} \right] d\tau. \qquad (20)$$

$$\tilde{T}_2(\xi, Fo) = \int_0^{Fo} \left\{ \tilde{W}_1(\xi, Fo-\tau) \left[\left(\frac{1}{2R_2} - 1\right)\sigma(\tau) - \sum_{i=1}^{2} \frac{6R_2^2}{p_i + \beta_{m1}} e^{p_i \tau} \right] + \right.$$
$$\left. + \tilde{W}_2(\xi, Fo-\tau) \sum_{i=1}^{2} \frac{R_2}{p_i + \beta_{m1}} e^{p_i \tau} \right\} d\tau. \qquad (21)$$

Тут

$$\tilde{W}_s(\beta_m, Fo) = \int_{-d}^{d} W_s(x_1, Fo) K(\beta_m, x_1) dx_1, \ (s = 1, 2)$$

– трансформанти інтегральних характеристик джерел тепла:

$$p_{1,2} = -\beta_{m_1} \pm \sqrt{\beta_{m_1}^2 - \beta_{m_1}^2}; \qquad \beta_{m_1} = \beta_m^2 + R_1 + 3R_3;$$

$$\beta_{m_2}^2 = (\beta_m^2 + 2R_1)(\beta_m^2 + 6R_3) - 12R_2^2;$$

вирази величин $R_j (j = \overline{1}, \overline{3})$ наведені у формулах (7).

Оригінали інтегральних характеристик $T_1\left(x_1, Fo\right)$ і $T_2\left(x_1, Fo\right)$ температури, тобто функції $T_s (s = 1, 2)$ за відомими їх трансформантами (20)-(21) отримуємо, використовуючи формулу обернення

$$T_s(x_1, F_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{T}_s(\beta_m, F_0) K(\beta_m, x_1). \qquad (22)$$

Для знаходження виразів функцій $T_s(x_1, Fo)$ у випадку крайових умов першого й другого роду у виразах (20)-(21) виконуємо граничний перехід $Bi_*^{\pm} \to \infty$ або приймаємо $Bi_*^{\pm} \to 0$.

При знайдених функціях $T_s(x_1, Fo)$, $(s = 1, 2)$ вирази температурного поля $T\left(x_1, x_3, Fo\right)$ визначаються за формулою (4) з використанням подань (7).

Висновки. З використанням кубічного закону для апроксимації розподілу температури по товщинній координаті тіла з плоскопаралельними межами вихідна двовимірна початково-крайова задача стосовно температури зведена до одновимірної початково-крайової задачі на її інтегральні характеристики.

Для безмежної плити та панелі з плоскопаралельними межами записано розв'язки отриманих одновимірних початково-крайових задач на інтегральні характеристики температури. У випадку плити використано інтегральне перетворення Фур'є по повздовжній координаті x_2 та перетворення Лапласа по часовій змінній Fo. У випадку панелі використано скінчене інтегральне перетворення по поперечній координаті x_1, а також інтегральне перетворення Лапласа за часом Fo.

Вирази інтегральних характеристик температури отримано у вигляді згорток функцій, що відповідають однорідним розв'язкам початково-крайових задач на інтегральні характеристики температури у плиті та панелі та описують нестаціонарні об'ємно розподілені джерела тепла і крайові значення температури на зовнішніх поверхнях розглядуваних елементів.

Запропонована методика визначення температури у плиті та панелі з плоскопаралельними межами дає змогу суттєво спростити аналітичні розв'язки сформульованих двовимірних задач теплопровідності для комп'ютерного аналізу двовимірних нестаціонарних температурних полів.

Список використаних джерел:

1. Holman J. P. Heat Transfer. New York: Mc Graw Hill, 2009.
2. Hetnarski R. Encyclopedia of Thermal Stresses. Dordrecht: Springer, 2014.
3. Motovilovets I. A., Kozlov V. I. Thermoelasticity. Mechanics of coupled fields in structural elements: in 5 volumes. Kyiv: Nauk. Dumka, 1987. T. 1. 264 p. (in Russian).
4. Musii R., Pukach P., Kohut I., Vovk M., Šlahor Ľ. Determination and Analysis of Joule's Heat and Temperature in an Electrically Conductive Plate Element Subject to Short-Term Induction Heating by a Non-Stationary Electromagnetic Field. *Energies*. 2022. Vol. 15.
5. Hachkevych O. R., Musij R. S., Tarlakovskyi D. V. The thermomechanics of nonferromagnetic conductive bodies for the actions of pulsed electromagnetic fields with amplitude modulation. Lviv: SPOLOM, 2011. 216 p. (in Ukranian).
6. Galitsyn A. S., Zhukovsky A. N. Integral transformations and special functions in heat conduction problems. Kyiv: Nauk. Dumka, 1976. 283 p. (in Russian).

DETERMINATION OF TWO-DIMENSIONAL NONSTATIONARY TEMPERATURE FIELDS IN PLATES AND PANELS WITH PLANE-PARALLEL BORDERS IN THE PRESENCE OF HEAT SOURCES

Non-stationary two-dimensional problems of thermal conductivity for plates and panels with plane-parallel boundaries in the presence of volume-distributed non-stationary heat sources are formulated. A method of constructing a solution to the formulated heat conduction problems for the considered bodies is proposed. The technique uses the approximation of the temperature distribution in both elements by the thickness variable by a cubic polynomial. The coefficients of the approximation polynomial are given through the integral over the thickness variable temperature characteristics and the conditions for the boundary values of the temperature on the outer surfaces of the plate and panel. As a result, the initial two-dimensional initial boundary value problems for the temperature for the plate and panel are reduced to one-dimensional initial boundary value problems for the integral temperature characteristics.

To construct the solution of the initial-boundary value problem for the integral characteristics of the temperature in the case of a plate infinite in longitudinal and transverse coordinates, the integral Laplace transform in time and the integral Fourier transform in the longitudinal coordinate were used. The solution of the problem on the integral temperature characteristics in the case of the panel is found using the integral Laplace transform in time and the finite integral transform in the transverse coordinate. Expressions of integral temperature characteristics for the plate and panel are obtained in the form of convolutions of functions corresponding to homogeneous solutions of initial-boundary value problems for integral temperature characteristics and functions describing the available non-stationary heat sources in these bodies and given surface temperature values.

The general solutions of the two-dimensional initial boundary value problems of thermal conductivity for slabs and panels are recorded for the presence of arbitrarily variable spatial coordinates of non-stationary heat sources and the conditions of convective heat exchange with the external environment on the surfaces of the considered bodies.

Key words: *two-dimensional heat conduction problems, plate and panel, non-stationary temperature field, cubic approximation, integral characteristics, integral transform Fourier, finite transform, Laplace transform.*

Отримано: 22.11.2023