This article considers the inverse theorem – based on the properties of the sequence of best approximations, a conclusion is made about the properties of the element *f* of some Banach space *X* and its generalized derivatives. As well as the relations between Szego constants for different equivalent systems of elements of the Banach space are established.

Keywords: *the best approximations, generalized derivatives, inverse theorems, Szego constants, differential characteristics, Banach space.*

Отримано: 14.11.2023

УДК 517.5
DOI: 10.32626/2308-5878.2023-24.108-118

В. А. Сорич, канд. фіз.-мат. наук,
Н. М. Сорич, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗНАЧЕННЯ НАЙКРАЩИХ НАБЛИЖЕНЬ ЛІНІЙНИХ КОМБІНАЦІЙ ГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ

Екстремальні задачі та їх практичні застосування знаходилися під пильною увагою математиків з давніх часів. Важливий крок в розвиток екстремальних задач зробив П. Л. Чебишев, який ще у 50-х роках XIX століття заклав основи розділу конструктивної теорії функцій – теорії наближення.

Суттєву роль у формуванні теорії наближення функцій відіграла теорема Карла Вейєрштрасса про збіжність до нуля послідовності найкращих наближень многочленами неперервної функції. Як відомо, теорема Вейєрштрасса є неконструктивною – вона не містить оцінок швидкості наближення. Завдяки роботам Д. Джексона, С. Н. Бернштейна, Валле-Пуссена та ін. такі оцінки стали з'являтися в роботах по теорії наближення.

При цьому на перших етапах розвитку теорії наближення проводилось вивчення наближень окремих функцій. Початок нового періоду, більш глибокого дослідження величин відхилень функцій від їх наближаючих многочленів, відноситься до 30-40-х років XX століття і пов'язаний з іменами А. М. Колмогорова, С. М. Нікольського, Ж. Фавара, Н. І. Ахієзера, М. Г. Крейна, Б. Надя. Завдяки їхнім працям основний акцент в теорії наближень зміщується в бік вивчення найкращих наближень чи інших апроксимаційних характеристик для класів функцій, які мають певні диференціально-різницеві чи гладкісні властивості. Зокрема, у 1936 році Ж. Фавар обчислив точні значення найкращих рівномірних наближень тригонометричними многочленами порядку не вищого $n-1$ на класах диференційовних 2π-періодичних функцій, r-ті (r – натуральне) по-

хідні яких знаходяться в одиничній сфері простору суттєво обмежених функцій. Питання отримання точних значень найкращих наближень в рівномірній та інтегральній метриках для різноманітних функціональних компактів знаходилось у полі зору багатьох видатних математиків XX сторіччя.

Загальні питання, пов'язані з вивченням функціоналу найкращого наближення: існування многочлена найкращого наближення, його характеристичних властивостей, детально викладені у багатьох монографіях, зокрема, наприклад, в книзі М. П. Корнєйчука [1]. У 80-90-х роках XX сторіччя О. І. Степанцем (див., напр. [2, розд. III] був розроблений новий підхід до класифікації періодичних функцій, який дозволив здійснювати досить тонку класифікацію надзвичайно широких множин періодичних функцій. При цьому отримані результати для вказаних класів з одного боку мають загальний характер, а з іншого – дають цілу низку нових, невідомих до цього часу, результатів, які на відомих раніше класах отримати було неможливо. Притримуючись підходів до вимог класифікації функцій, ми можемо розглядати лінійну комбінацію класів функцій як деякий один клас – більш складнішого характеру. І тоді задача знаходження точних значень верхніх граней найкращих сумісних наближень зведеться до задачі найкращого наближення цього складеного класу, що відповідає згорткам з твірним складеним ядром.

Ключові слова: *клас функцій, найкраще наближення, гармонічні в крузі функції, лінійні комбінації гармонічних в крузі функцій, умова Надя.*

Вступ. У рівномірній метриці задача про одержання точних значень найкращих наближень на класах функцій, тобто на множинах функцій об'єднаних за їх певною спільною ознакою (найчастіше диференційними властивостями), вперше розв'язана була у 1936 р. Ж. Фаваром [3]. Ці дослідження були продовжені Н. І. Ахієзером та М. Г. Крейном [4, 5], Б. Надем [6]. В приведених теоремах встановлювалася умова Надя N_n^* для ядра згортки досліджуваних функцій і на цій основі отримувалися точні значення величин найкращих наближень неперервних функцій.

Означення 1. Кажуть, що сумовна 2π-періодична функція $K(t)$, яка тотожно не дорівнює нулю, задовольняє умову N_n^*, $n \in N$ $(K \in N_n^*)$, якщо існують тригонометричний поліном $T_{n-1}^*(t)$ степеня $n-1$ і точка $\xi \in \left[0, \dfrac{\pi}{n}\right[$ такі, що різниця $K(t)-T_{n-1}^*(t)$ змінює знак на $[0, 2\pi[$ у точках $t_k = \xi + \dfrac{k\pi}{n}$, $k = 0,1,...,2n-1$, і лише в них.

С. М. Нікольський [7] методами двоїстих співвідношень отримав точні співвідношення верхніх меж найкращих наближень на класах диференційовних функцій тригонометричними поліномами в метриці простору інтегровних в першому степені функцій. Нікольським та багатьма іншими видатними математиками (див. напр. [8-10]) встановлено виконання умови Нікольського A_n^* (дещо ширшої за умову N_n^*) і тим самим знайдено величини найкращих наближень різних функціональних компактів. Такі задачі розв'язані також і в інших важливих випадках (див., зокрема, [11-15]).

Завдяки функції Крейна досить просто вдається побудувати тригонометричний многочлен, який інтерполює ядро $K(t)$ в $2n$ рівномірно розташованих на періоді точках. Труднощі виникають при доведенні того факту, що більше точок співпадіння ядра та многочлена $T_{n-1}^*(t)$ не існує. Власне, всі роботи в цьому напрямі присвячені подоланню цієї проблеми. Але є такі ядра, для яких многочлен $T_{n-1}^*(t)$ співпадає із ядром більше (а буває менше) аніж в $2n$ точках на періоді. Тому аналогічно до виконання умови N_n^* запропонуємо таке означення.

Означення 2. Будемо казати, що сумовна 2π-періодична функція $K(t)$, яка тотожно не дорівнює нулю, задовольняє умову $N_{n,p}^*, n, p \in N$ $(K \in N_{n,p}^*)$, якщо існують тригонометричний поліном $T_{n-1}^*(t)$ степеня $n-1$ і точка $\xi \in \left[0, \frac{\pi}{n+p}\right)$ такі, що різниця $K(t) - T_{n-1}^*(t)$ змінює знак на $[0, 2\pi[$ у точках $t_k = \xi + \frac{k\pi}{n+p}$, $k = 0,1,...,2n+2p-1,$ і лише в них.

Постановка задачі. Нехай L_∞ – простір вимірних 2π – періодичних і суттєво обмежених функцій φ із нормою $\|\varphi\|_{L_\infty} = \|\varphi\|_\infty = ess\sup_t |\varphi(t)|$, C – простір неперервних на всій дійсній осі 2π-періодичних функцій φ із нормою $\|\varphi\|_C = \max_t |\varphi(t)|$, L – 2π-періодичних сумовних на $(0, 2\pi)$ функцій φ із нормою

$$\|\varphi\|_L = \|\varphi\|_1 = \int_0^{2\pi} |\varphi(t)| dt .$$

Через $\Gamma_\infty^\rho(\Gamma_1^\rho)$, $0<\rho<1$, (див. [5]) позначимо класи неперервних гармонічних в крузі 2π-періодичних функцій, що подаються у вигляді згортки (див. [2, глава 1])

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P_\rho(t)\varphi(x-t)dt, \tag{1}$$

де

$$P_\rho(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos kt=\frac{1-\rho^2}{2(1-2\rho\cos t+\rho^2)}, \tag{2}$$

– ядро Пуассона.

При цьому у співвідношенні (1) $\|\varphi\|_\infty\le 1\left(\|\varphi\|_1\le 1\right)$ та $\int_0^{2\pi}\varphi(t)dt=0$, тобто функція $\varphi(e)$ ортогональна константі і належить одиничній кулі просторів $L_\infty\left(L_1\right)$, яку надалі будемо позначати через $U_\infty^0\left(U_1^0\right)$.

Через $\Sigma_{n,m}(\varphi,T_{n-1},t)$ позначимо різницю

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(\varphi*P_{\rho_i}\right)(t)-T_{n-1}(t),$$

де символ «*» – згортка функцій $P_{\rho_i}(t)$ вигляду (2) із функцією φ.

Досліджуються екстремальні величини

$$E_{n,m}(U_\infty^0)_C=\sup_{\varphi\in U_\infty^0}\inf_{T_{n-1}}\left\|\Sigma_{n,m}\left(\varphi,T_{n-1},t\right)\right\|_C, \tag{3}$$

$$E_{n,m}(U_1^0)_L=\sup_{\varphi\in U_1^0}\inf_{T_{n-1}}\left\|\Sigma_{n,m}\left(\varphi,T_{n-1},t\right)\right\|_L, \tag{4}$$

які назвемо величинами найкращого наближення лінійних комбінацій класів гармонічних в крузі функцій в неперервній та інтегральній метриках.

У роботі ми розглядаємо лінійні комбінації $K(t,\alpha)$ гармонічних функцій вигляду $K(t,\alpha)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_iP_{\rho_i}(t)$, $\rho_i\in(0;1)$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$ – довільний числовий вектор розмірності m. У випадку кількості доданків m = 1 на класах функцій Γ_∞^ρ, $0<\rho<1$, точні значення верхніх меж найкращих наближень вигляду (3) отримані М. Г. Крейном [5], на класах Γ_1^ρ – С. М. Нікольським [7].

Допоміжні твердження.

Лема 1. Будь-який тригонометричний поліном $T_{n-1}(t)$ порядку $n-1$ співпадає із функцією $K(t,\alpha)$ на періоді не більше ніж в $2(m+n-1)$ точках.

Доведення. В силу співвідношень (2) для функції $K(t,\alpha)$ справедливе таке подання:

$$K(t,\alpha)=\frac{1}{2\prod_{i=1}^{m}\left(1-2\rho_i\cos t+\rho_i^2\right)}\cdot\sum_{i=1}^{m}\left(1-\rho_i^2\right)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}\left(1-2\rho_k\cos t+\rho_k^2\right)=$$

$$=\frac{\overline{T}_{m-1}(t)}{\prod_{i=1}^{m}\left(1-\rho_i\cos t+\rho_i^2\right)},$$

де $\overline{T}_{m-1}(t)$ – деякий тригонометричний многочлен порядку $m-1$. Тоді рівність $K(t,\alpha)-T_{n-1}(t)=0$ можлива лише при виконанні співвідношення $\overline{T}_{m-1}(t)-T_{n-1}(t)\prod_{i=1}^{m}\left(1-2\rho_i\cos t+\rho_i^2\right)=0$.

Оскільки ліва частина останньої рівності є тригонометричним многочленом порядку не вище $m+n-1$, який може мати на періоді не більше за $2(m+n-1)$ нулів, то **лема доведена.**

Відомо, що для довільних точок $t_k\in(0;\pi)$, $k=\overline{1;n}$, для будь-якої функції $K(t)$ існує парний тригонометричний многочлен порядку не вище за $n-1$, який інтерполює цю функцію в заданих точках.

Зафіксуємо точки $t_k\in(0;\pi)$, $k=\overline{1;n}$, і для будь-якого вектора $\alpha=(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_m)$ через $T_{n-1}^{(\alpha)}(t)=T_{n-1}(t,\alpha)$ позначимо парний тригонометричний многочлен, який інтерполює функцію $K(t,\alpha)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i P_{\rho_i}(t)$ в точках $t_k\in(0;\pi)$, $k=\overline{1;n}$, а

$$\Delta_{n-1}(t,\alpha)=K(t,\alpha)-T_{n-1}^{(\alpha)}(t).$$

Зауважимо, якщо многочлен $T_{n-1}(t,\alpha_1)$ інтерполює функцію $K(t,\alpha_1)$ в точках $t_k\in(0;\pi)$, $k=\overline{1;n}$, а многочлен $T_{n-1}(t,\alpha_2)$ інтерполює в тих же точках $K(t,\alpha_2)$, то многочлен $\lambda_1 T_{n-1}(t,\alpha_1)+\lambda_2 T_{n-1}(t,\alpha_2)$ буде інтерполювати функцію $K(t,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)$, $\lambda_1,\lambda_2\in R$, в цих точках. Покажемо, що функціонал $\Delta_{n-1}(t,\alpha)$ лінійний по α.

Маємо

$$\Delta_{n-1}(t,\lambda_1\alpha^{(1)}+\lambda_2\alpha^{(2)})=\sum_{i=1}^{m}\left(\lambda_1\alpha^{(1)}+\lambda_2\alpha^{(2)}\right)P_{\rho_i}(t)-T_{n-1}^{(\lambda_1\alpha^{(1)}+\lambda_2\alpha^{(2)})}(t)=$$

$$=\lambda_1K(t,\alpha^{(1)})+\lambda_2K(t,\alpha^{(2)})-\left(\lambda_1T_{n-1}(t,\alpha^{(1)})+\lambda_2T_{n-1}(t,\alpha^{(2)})\right)=$$

$$=\lambda_1\Delta_{n-1}(t,\alpha^{(1)})+\lambda_2\Delta_{n-1}(t,\alpha^{(2)}).$$

Спираючись на дану властивість, доведемо справедливість наступного твердження.

Лема 2. Для будь-яких чисел $\rho_i\in(0;1), i=\overline{1;m}$, для будь-яких точок $t_k\in(0;\pi)$, $k=\overline{1;n+l}$, де $l=1,2,...,m-1$, існує лінійна комбінація $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^*P_{\rho_i}(t)$ та парний тригонометричний многочлен $T_{n-1}^*(t)$, який співпадає із цією комбінацією в точках $t_k\in(0;\pi)$, $k=\overline{1;n+l}$.

Доведення. Оскільки $l<m$, то існують лінійно незалежні m-вимірні вектори $\alpha^{(1)},\alpha^{(2)},...,\alpha^{(l+1)}$. Для кожного з цих векторів знайдеться парний тригонометричний многочлен $T_{n-1}^{(j)}(t)$, який інтерполює функцію $K(t,\alpha^{(j)})=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^{(j)}P_{\rho_i}(t)$ в точках $t_k\in(0;\pi)$, $k=\overline{1;n}$, тобто $\Delta_{n-1}(t_k,\alpha^{(j)})=0, k=\overline{1;n}$, $j=\overline{1;l+1}$.

Позначимо через

$$c_{j1}=\Delta_{n-1}(t_{n+1},\alpha^{(j)}),\ c_{j2}=\Delta_{n-1}(t_{n+2},\alpha^{(j)}),...,\ c_{jl}=\Delta_{n-1}(t_{n+l},\alpha^{(j)}),$$

$$j=\overline{1;l+1},$$

будемо мати $(l+1)$ таких l-розмірних векторів:

$$\overline{c_1}=(c_{11},c_{12},...,c_{1l}),\ \overline{c_2}=(c_{21},c_{22},...,c_{2l}),...,\overline{c_{l+1}}=(c_{l+1,1},c_{l+1,2},...,c_{l+1,l}).$$

Ця система векторів лінійно залежна, тому існує їх нетривіальна лінійна комбінація, що рівна нуль-вектору: $\sum_{j=1}^{l+1}\beta_j\overline{c_j}=\theta$, тому виконуються наступні рівності

$$\begin{cases}\beta_1c_{11}+\beta_2c_{21}+...+\beta_{l+1}c_{l+1,1}=0,\\ \beta_1c_{12}+\beta_2c_{22}+...+\beta_{l+1}c_{l+1,2}=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \beta_1c_{1l}+\beta_2c_{2l}+...+\beta_{l+1}c_{l+1,l}=0.\end{cases}\qquad(5)$$

Нехай $\alpha^* = \sum_{j=1}^{l+1} \beta_j \alpha^{(j)} = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_m^*)$ (в силу лінійної незалежності вектор α^* ненульовий), $T_{n-1}^*(t) = \sum_{j=1}^{l+1} \beta_j T_{n-1}^{(j)}(t)$.

Покажемо, що вектор α^* і многочлен $T_{n-1}^*(t)$ шукані. В силу лінійності функціонала $\Delta_{n-1}(t,\alpha)$ маємо: многочлен $T_{n-1}^*(t)$ інтерполює функцію $K(t,\alpha^*)$ в точках

$$t_k \in (0;\pi), \quad k = \overline{1;n},$$

$$\Delta_{n-1}(t_k,\alpha^*) = \Delta_{n-1}\left(t_k, \sum_{j=1}^{l+1} \beta_j \alpha^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{l+1} \beta_j \Delta_{n-1}(t_k,\alpha^{(j)}) = 0 \ .$$

А в точках $t_k \in (0;\pi)$, $k = \overline{n+1;n+l}$, з урахуванням рівностей системи (5) одержимо, що

$$\Delta_{n-1}(t_{n+s},\alpha^*) = \Delta_{n-1}\left(t_{n+s}, \sum_{j=1}^{l+1} \beta_j \alpha^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{l+1} \beta_j \Delta_{n-1}(t_{n+s},\alpha^{(j)}) = \sum_{j=1}^{l+1} \beta_j c_{j,s} = 0 \ ,$$

$$s = 1, 2, ..., l.$$

Тому многочлен $T_{n-1}^*(t)$ та функція $K(t,\alpha^*)$ співпадатимуть і в точках $t_k \in (0;\pi)$, $k = \overline{n+1;n+l}$. **Лема доведена.**

Зауваження. Лема 2 буде справедливою для довільних парних ядер $P_i(t)$.

Найкраще наближення лінійних комбінацій гармонічних функцій. Справедливі твердження.

Теорема 1. Для довільного натурального $n \in N$ існують такі числа α_i^*, $i = \overline{1;m}$, для яких $K(t,\alpha^*) \in N_n^*$, при цьому

$$E_{n,m}(U_\infty^0)_C = E_{n,m}(U_1^0) = \frac{1}{\pi} E_n(K)_L = \left\| K(t,\alpha^*) * sign \cos nt \right\|_C =$$
$$= \left| \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\rho_i^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \right|. \tag{6}$$

Доведення. Для відшукання точних значень верхніх меж найкращих наближень лінійних комбінацій гармонічних в крузі функцій в задачах по відшуканню величин вигляду (3), (4) спершу скористаємося умовою Надя N_n^*, а саме випадком коли число нулів різниці

$\Delta^*_{n-1}(t) = K(t,\alpha) - T^*_{n-1}(t)$ на періоді рівне $2n$. До ядер $K(t,\alpha)$ застосуємо функцію Крейна [5]

$$G_n(K(t,\overline{\alpha})) = \sum_{\nu=0}^{2n-1} (-1)^\nu K\left(t + \frac{\nu\pi}{n}, \overline{\alpha}\right) = \\ = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{\nu=0}^{\infty} \rho_i^{(2\nu+1)n} \cos\left((2\nu+1)\frac{\pi}{2n}\right). \tag{7}$$

Виберемо в (7) всі числа α_i^* одного знаку (наприклад, додатні), при цьому знайдеться єдиний поліном $T^*_{n-1}(t)$ який співпадає з функцією $K(t,\alpha^*)$ в точках $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$, $k = 0,1,...,2n-1$.

При цьому, див. [16, пункт 7.4], різниця $\Delta^*_n(t)$ запишеться у вигляді

$$K(t,\alpha^*) - T^*_{n-1}(t) = 2\cos nt W_n(t), \tag{8}$$

де

$$W_n(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_i^k \cos kt\right) \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \rho_i^{(2\nu+1)n} = \\ = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* \chi_{\rho_i}(t) \cdot \frac{\rho_i^n}{1+\rho_i^{2n}}. \tag{9}$$

В силу того, що функції $P_{\rho_i}(t)$ додатні, то при невід'ємних значеннях чисел α_i^* будемо мати, що $W_n(t) > 0$, $\forall t$. Отже, в силу (7) ядро $K(t,\alpha^*) \in N_n^*$. Далі, на підставі рівності

$$sign\left(K(t,\alpha^*) - T^*_{n-1}(t)\right) = \varepsilon_0 sign \cos nt,\ \varepsilon_0 = \pm 1,$$

одержуємо

$$E_n(K)_L = \left\|K(t,\alpha^*) - T^*_{n-1}(t)\right\|_L = \int_0^{2\pi} \left|K(t,\alpha^*) - T^*_{n-1}(t)\right| dt = \\ = \left|\int_0^{2\pi} \left(K(t,\alpha^*) - T^*_{n-1}(t)\right) sign \cos nt dt\right| = \left|\int_0^{2\pi} K(t,\alpha^*) sign \cos nt dt\right|. \tag{9}$$

Розкладаючи функції $K(t,\overline{\alpha}^*)$ та sign $\cos nt$ у ряди Фур'є:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_i^k \cos kt\right),\ sign \cos nt = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(2k+1)nt}{2k+1},$$

і застосовуючи рівність Парсеваля із (9) отримуємо рівність (6). Отже, теорема доведена.

Теорема 2. Для довільного натурального $n \in N$, довільного $m \in N$ існують такі числа α_i^*, $i = \overline{1;m}$, для яких $K(t,\alpha^*) \in N^*_{n,m-1}$, при цьому

$$E_{n,m}(U_\infty^0)_C = E_{n,m}(U_1^0) = \frac{1}{\pi} E_n(K)_L =$$
$$= \left\| K(t,\alpha^*) * sign\cos(n+m-1)t \right\|_C = \left| \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\rho_i^{(2\nu+1)(n+m-1)}}{2\nu+1} \right|. \quad (10)$$

Доведення. Нехай $t_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2(n+m-1)}, k = 1, 2, ..., n+m-1.$ За лемою 2 існують вектор α^* та многочлен $T^*_{n-1}(t)$ такі, що функція $K(t,\alpha^*)$ та многочлен $T^*_{n-1}(t)$ співпадатимуть у цих точках. А за лемою 1 рівняння $K(t,\alpha^*) - T^*_{n-1}(t) = 0$ більше за $n+m-1$ нулів на півперіоді не може мати. Отже,

$$sign\Big(K(t,\alpha^*) - T^*_{n-1}(t)\Big) = \varepsilon_0 sign\cos(n+m-1)t, \ \varepsilon_0 = \pm 1,$$

тобто $K(t,\alpha^*) \in N^*_{n,m-1}$. Тому, аналогічно до доведення попередньої теореми (див. (9)), справедливі такі рівності:

$$E_n(K)_L = \left\| K(t,\alpha^*) - T^*_{n-1}(t) \right\|_L = \int_0^{2\pi} \left| K(t,\alpha^*) - T^*_{n-1}(t) \right| dt =$$
$$= \left| \int_0^{2\pi} \Big(K(t,\alpha^*) - T^*_{n-1}(t)\Big) sign\cos(n+m-1)t dt \right| =$$
$$= \left| \int_0^{2\pi} K(t,\overline{\alpha}^*)\, sign\cos(n+m-1)t dt \right| = \left| 4 \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\rho_i^{(2\nu+1)(n+m-1)}}{2\nu+1} \right|.$$

Теорема доведена.

Висновки. Обчислено точне значення верхніх меж найкращих наближень у рівномірній та інтегральній метриках лінійних комбінацій класів гармонічних функцій.

Список використаних джерел:

1. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. Москва: Наука, 1976. 320 с.
2. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций. Киев: Наук. думка, 1987. 286 с.

3. Favard J. Sur lapproximation des fonctions periodiques par des polynomes. *C.r. Acad. sci.* 1936. P. 1122-1124.
4. Ахиезер Н. И., Крейн М. Г. О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций. *Докл. АН СССР*. 1937. Вып. 15. № 3. С. 107-112.
5. Крейн М. Г. К теории наилучшего приближения периодических функций. *Докл. АН СССР*. 1938. Вып. 18. № 4-5. С. 245- 249.
6. Nagy B. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten Entwicklungen. *I. Periodischer Fall, Berichte der math.-phys. Kl. Acad. der Wiss. zu Leipzig.* 1938. P. 103-134.
7. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем. *Изв. АН СССР, Сер. мат*. 1946. Вып. 10. С. 207-256.
8. Дзядык В. К. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций. *Изв. АН СССР, сер. мат.* 1959. Вип. 23. С. 933-950.
9. Дзядык В. К. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер. *Мат. заметки.* 1974. Вып. 16. № 5. С. 691-701.
10. Сунь Юн-шен. О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами. *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1959. Вип. 23. С. 67-92.
11. Бушанский А. В. О наилучшем в среднем гармоническом приближении некоторых функций. *Исследования по теории приближения функций и их приложения*. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. С. 29-37.
12. Сорич В. А. Наилучшее совместное приближение функций и их производных. Киев, 1989. С. 3-54. (Препринт/Ін-т математики АН УРСР; 89.19).
13. Сорич В. А., Сорич Н. М. Найкраще наближення лінійної комбінації ядер Пуассона. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації:* зб. наук. пр. за матеріалами всеукр. наук. метод. конф. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський держ. ун-т, 2004. С. 60-69.
14. Сорич В. А., Сорич Н. М. Нові апроксимаційні ефекти ядер Вейля-Надя. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський: Кам’янець- Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2021. Вип. 22. С. 97-109.
15. Сердюк А.С. Найкращі наближення і поперечники класів згорток періодичних функцій високої гладкості. *Укр. мат. журн*. 2005. Вип. 57. №7. С. 946-971.
16. Степанец А. И. Методы теории приближений. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч.II, 468с.

EXTREME VALUES OF THE BEST APPROXIMATIONS OF LINEAR COMBINATIONS OF HARMONIC FUNCTIONS

Extreme problems and their practical applications have been under the scrutiny of mathematicians since ancient times. An important step in the development of extreme problems was made by P. L. Chebyshev, who in the 50s of the 19th century laid the foundations of a section of destructive function theory – the theory of approximation.

A significant role of the formation of the theory of approximation of functions was played by Carl Weierstrass's theorem on the convergence to zero of best approximations by polynomials of a continuous function. As is well known, Weierstrass's theorem is not constructive – it does not contained estimates of the approach speed. Thanks to the work of D. Jackson, S. N. Bernstein, Vallee-Poussin and others, such estimates began to appear in works on approximation theory.

At the same time, at the first stages of the development of the theory of approximation, approximations of individual functions were studied. That beginning of a new period, a dipper study of the deviation values of functions from their approximating polynomials, dates back to the 30s and 40s of the 20th century and is associated with the names of A. M. Kolmogorov, S. M. Nikolsky, J. Favard, N. I. Achieser, M. G. Crane and B. Nagy. Thanks to their works, the main emphasis in the theory of approximations is shifted to the study of the best approximations or other approximation characteristics of functions that have certain differential-difference or smoothness properties. In particular, in 1936, J. Favard calculated the exact values of the best uniform approximations by trigonometric polynomials of order no higher than $n-1$ on classes of differentiable 2π-periodic functions, whose r-th (r – natural) derivatives are in a unit sphere of the space of essentially bounded functions. The problem of obtaining exact values of the best approximations in uniform and integral metrics for various functional compacts was in sight of many prominent mathematicians of the XX century.

General issues related to the study of the best approximation functional: the existence of a polynomial of the best approximation, its characteristic properties, are destribed in detail in many monographs, in particular, for example, in the book by M. P. Korneichuk [1]. In the 80s and 90s of the XX century, O. I. Stepanets (see, [2, section III]) developed a new approach to the classification of periodic functions, which allowed for a fairly fine classification of extremely wide sets of periodic functions. At the same time, the results obtained for these classes are, on the one hand, general, and on the other hand, they give a number of new, hitherto unknown results that were impossible to obtain on previously known classes. Following the approaches to the requirements of function classification, we can consider a linear combination of function classes of a more complex nature. And then the problem of finding the exact values of the upper bounds of the best joint approximations will be reduced to the problem of the best approximation of this composite class corresponding to convolutions with the composite kernel.

Key words: *class of functions, best approximation, harmonic functions in the circle, linear combinations of harmonic functions in the circle, Nagy's condition.*

Отримано: 9.11.2023